# Sur la mesure dans les corps indépendants

*Par* $\boxed{\text{S Banach}}$ *(Lwow)*

Soit $T$ un ensemble quelconque. Nous considérons des corps[1]) d'ensembles dont les éléments appartiennent *à* l'ensemble $T$. Nous dirons qu'un ensemble $K$ des corps $A$ est une famille des corps indépendants, si le produit d'un nombre fini d'ensembles non vides appartenant à des divers corps de l'ensemble $K$ n'est jamais vide. Dans le cas où cette propriété subsiste pour le produit d'une infinité dénombrable des ensembles appartenant à des divers-corps de l'ensemble $K$, celui-ci sera appelé une famille des corps complètement indépendants.

La notion d'une famille des corps indépendants, complètement ou non, est due à E. Szpilrajn, ainsi que le théorème suivant:

Soit $K$ une famille des corps indépendans telle que dans chaque corps $A \epsilon K$ est difinié une mesure $m$. Si $U(K)$ désigne le plus petit corps qui contient tous les corps de la famille $K$, alors on peut définir dans $U(K)$ une (et une seule) mesure $m^*$ [2]) remplissant les conditions

1°. $m^* H = m H \quad (H \epsilon A \epsilon K)$,
$\qquad\quad n \qquad n$

2°. $m^* \underset{i=1}{\Pi} H_i = \underset{i=1}{\Pi} m^* H_i (H_i \epsilon A_i \epsilon K,\ A_r \neq A_s$ pour $r \neq s)$,

Dans le travail présent je me propose de démontrer le théorème suivant:

Si $K$ est une famille des corps complètement additifs et compètement indépendants, telle que dans chaque corps $A \epsilon K$ est définie une mesure $m$ complètement ad-

---

[1]) Une classe $A$ des sous-ensembles de $T$ s'appelle nn corps, lorsque l'ensemble complémentaire, la somme et le produit d'un nombre fini des ensembles contenus dans $A$ appartient à cette classe. Le corps $A$ est dit completèment additif, si la somme et le produit d'une infinité dénombrable des ensembles contenus dans $A$ sont toujours des ensembles du corps $A$.

[2]) Dans un corps $A$ est définie une mesure, lorsqu'à chaque ensemble $H \epsilon A$ correspond un nombre $mH \geqslant 0$ de mainière que $m(T) = 1$ et $m(H_1 + H_2) = mH_1 + mH_2$ pour $H_1$, $H_2 \epsilon A$ et $H_1 H_2 = 0$. On dit, que la mesure est complètement additive, si, pour chaque suite $\{H_i\}$ d'ensembles disjoints contenus dans le corps $A$ telle que $\Sigma H_i \epsilon A$, $m \sum_{i=1}^{\infty} H_i = \sum_{i=1}^{\infty} m H_i$. Il est aisé de voir que cette condition est équivalente à la condition suivante:

Si $H_i \epsilon A$, $H_i \supset H_{i+1}$ $(i=1, 2, \ldots)$ et $\prod_{i=1}^{\infty} H_i = 0$ alors on a $\lim_{i \to \infty} mH_i = 0$.

On peut démontrer que dans le cas où la mesure $m$ définie dans un corps $A$ est complètement additive, il en existe un corps $A^* \supset A$ complètement additif avec une mesure $m^*$ complètement additive de sorte que l'on a $mH = m^* H$ pour $H \epsilon A$ (voir O. Nikodym, Sur l'existence d'une mesure parfaitement additive et non séparable, Mémoires Acad. R. de Belgique, 1938).

ditive, si de plus $V$ est le plus petit corps complètement additif qui contient tous les corps de la famille $K$, il existe alors dans $V$ une et une seule mesure $m^*$ complètement additive, jouissant des propriétés suivantes:

a) $m^* H = m H \qquad (H \in A \in K)$,

b) $m^* \prod_{i=1}^{\infty} H_i = \prod_{i=1}^{\infty} m^* H_i \quad (H_i \in A_i \in K,\ A_i \neq A_j$ pour $i \neq j)$.

Ce théorème a été proposé par $E$. Szpilrajn qui l'a démontré dans ie cas particulier où chaque corps $A \in K$ contient seulement quatre ensembles, à savoir un ensemble non vide $H$, l'ensemble complémentaire $T-H$, l'ensemble vide et l'ensemle $T$. Il est évident, que dans ce cas, chaque corps $A \in K$ et la mesure $m$ correspondante sont complètement additifs.

Un autre cas particulier de ce théorème, dans lequel la classe $K$ contient deux corps seulement et les mesures sont d'une forme spéciale, a été formulé par M. P. Lévy[1]).

Les § 1 et 2 contiennent quelques lemmes, le § 3 contient la démonstration du théorème de E. Szpilrajn et le dernier paragraphe celle du théorème que nous venons d'énoncer.

Certaines applications de notre théorème se trouvent dans un travail encore non publié de E. Szpilrajn sur les mesures dans les produits cartésiens.

## § I

Soit $K$ une famille de corps d'ensembles. Désignons par $U(K)$ le plus petit corps qui contient tous les ensembles appartenant aux corps de la famille $K$. On voit sans peine que $U(K)$ se compose de tous les ensembles de la forme

$$H = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_i} G_{ij} \tag{I}$$

où $n$, $m_i$ sont des entiers positifs quelconques et

$$G_{ij} \in A_{ij} \in K,\ A_{ir} \neq A_{is}\ (r \neq s).$$

Nous désignerons par

$$A_1, \ldots, A_m\ (A_r \neq A_s \text{ pour } r \neq s)$$

les corps $A_{ij}$, Si l'un des ensembles $G_{ij}$ appartient au corps $A_r$, il sera désigné par $H_{ir}$. Dans le cas contraire, nous poserons

$$H_{ir} = T.$$

1) Paul Levy, Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris, Gauthier-Villars, 1937, p. 27.

Avec ces notations, la formule (I) s'écrit

$$H=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}H_{ij} \tag{II}$$

où

$$H_{ij}\in A_j\in K \quad (A_r \neq A_s \text{ pour } r\neq s).$$

Puisque les ensembles $H_{ij}$ figurant dans cette formule appartiennent au corps $A_j$, il existe des ensembles disjoints non vides

$$N_{jk}\in A_j (k=1, \ldots, r_j)$$

tels que chaque $H_{ij}$ est la somme de certains $N_{jk}$. En remplaçant dans (II) chaque ensemble $H_{ij}$ par la somme correspondante on obtient

$$H=\sum_{i=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{m}L_{ij} \tag{III}$$

où $L_{ij}\in A_j$ et les produits figurant au second membre sont des ensembles disjoints.

Soit $F[U(K)]$ l ensemble des fonctions réelles $y(t)$ définies dans $T$, ne prenant qu'un nombre fini des valeurs et telles que

$$E[y(t)=c]\in U(K).$$

En vertu de la formule (III), cet ensemble est celui des fonctions représentables sous la forme

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\prod_{j=1}^{m_i}u_{ij}(t) \tag{I'}$$

où $n$, $m_i$ sont des entiers positifs quelconques et les $u_{ij}(t)$ désignent les fonctions caractéristiques des ensembles

$$G_{ij}\in A_{ij}\in K \quad (A_{ir}\neq A_{is} \text{ pour } r\neq s).$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient la formule

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\prod_{j=1}^{m}x_{ij}(t), \tag{II'}$$

où $x_{ij}(t)$ sont les fonctions caractéristiques des ensembles

$$H_{ij}\in A_j\in K \quad (A_r\neq A_s \text{ pour } r\neq s).$$

Si $N_{jk}$ sont les ensembles définis plus haut et $z_{jk}(t)$ leurs fonctions caractéristiques, on peut définir les nombres

$$\beta_{ijk}(=0,\ 1)$$

de manière que

$$x_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{r_j}\beta_{ijk}z_{jk}(t) \tag{1}$$

En portant dans (II'), on obtient

$$y(t)=\sum_{k_1\ldots k_m}a_{k_1\ldots k_m}\prod_{j=1}^{m}z_{jk_j}(t) \tag{III'}$$

où la somme s'étend sur tous les systèmes d'entiers positifs

$$k_1, \ldots, k_m$$

tels que

$$1 \leqslant k_j \leqslant r_j \quad (j=1, \ldots, m)$$

et

$$a_{k_1 \ldots k_m} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{i1k_1} \ldots \beta_{imk_m} \tag{2}$$

Les produits figurants au second membre de (III') sont évidemment les fonctions caractéristiques des ensembles disjoints, notamment des ensembles

$$L_{k_1 \ldots k_m} = \prod_{j=1}^{m} N_{jk_j} \tag{3}$$

§ 2

Nous supposerons maintenant que $K$ est une famille des corps indépendants.

Lemme 1. Si la fonction $y(t)$ est de la forme (III') et si

$$y(t) \geqslant a \, (t \in T),$$

alors tous les coefficients correspondants satisfont à l'inégalité

$$a_{k_1 \ldots k_m} \geqslant a. \tag{4}$$

Démonstration. Les corps de la famille etant indépendants, il s'ensuit que les ensembles (3) sont non vides. Comme ces ensembles sont de plus disjoints, l'inégalité (4) résulte de (III').

Lemme 2. Si la fonction $y(t)$ est de la forme (II') et si

$$y(t) \geqslant a \, (t \in T),$$

alors on a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{j=1}^{m} x_i(t_j) \geqslant a \tag{5}$$

quels que soient les éléments

$$t_1, \ldots, t_m.$$

Démonstration. Les formules (II'), (III') donnent

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{j=1}^{m} x_{ij}(t_j) = \sum_{k_1 \ldots k_m} a_{k_1 \ldots k_m} \prod_{j=1}^{m} z_{jk_j}(t_j) \tag{6}$$

D'après le lemme 1 on a l'inégalité (4). Si donc $a>0$, la relation (6) entraine (5), puisque l'un des produits au second membre de (6) est égal a 1 et les autres sont nuls. Si

$$a \leqslant 0,$$

tous les produits sont nuls, ou bien un seul produit est égal a 1 et les autres sont nuls; dans les deux cas, la formule (5) résulte de (6).

L e m m e 3. Lorsqu'une fonction $y(t)$ de la forme (II′) satisfait à l'inégalite (5) pour un système particulier d'élèments $t_1, \ldots, t_m$, il existe des ensembles $H_j \in A_j$ $(j=1, \ldots m)$ tels que

$$t_j \in H_j \qquad (j=1, \ldots, m) \tag{$\alpha$}$$

$$y(t) \geqslant a \quad (t \in \prod_{j=1}^{m} H_j) \tag{$\beta$}$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que l'on ait

$$t_j \in \sum_{i=1}^{n} H_{ij} \qquad (j=1, \ldots, m). \tag{7}$$

Dans ce cas, il existe un seul système d'indices $\sigma_1, \ldots \sigma_m$ tel que $z_{1\sigma_1}(t_1) \ldots z_{m\sigma_m}(t_m)=1$. Il en résulte, en vertu de (6), que l'on a $a_{\sigma_1 \ldots \sigma_m} \geqslant a$. Si l'on pose $H_j = N_{j\sigma_j}$, la condition ($\alpha$) sera remplie et en vertu de (III′) aussi la condition ($\beta$).

Si la relation n'est pas verifiée pour $j=r$, alors on a $x_{ir}(t_r)=0$ $(i=1, \ldots, n)$, donc, en vertu de (5), $a \leqslant 0$.

Supposons que la relation (7) n'a pas lieu pour $i=r_1, r_2, \ldots, r_k$. Posons $H_j = T - \sum_{i=1}^{n} H_{ij}$ pour $j=r_1, \ldots, r_k$ et $H_j = \sum_{i=1}^{n} H_{ij}$ pour les autres $j$. On voit sans peine que les ensembles $H_j$ ainsi définis remplissent les conditions ($\alpha$), ($\beta$).

L e m m e 4. Soient $K$ une famille des corps complètement additifs et complètement indépendants et $\{y_\nu(t)\}$ une suite de fonctions de la forme (II′):

$$y_\nu(t) = \sum_{i=1}^{n_\nu} \alpha_{\nu i} \prod_{j=1}^{m_\nu} x_{\nu ij}(t) \tag{8}$$

pour laquelle il existe une suite d'éléments $\{t_j\}$ de manière que

$$\sum_{i=1}^{n_\nu} a_{\nu i} \prod_{j=1}^{m_\nu} x_{\nu ij}(t_j) \geqslant a \quad (\nu=1, 2, \ldots) \tag{9}$$

Alors il existe un élément $\vartheta$ tel que

$$y_\nu(\vartheta) \geqslant a \qquad (\nu=1, 2, \ldots) \tag{10}$$

D é m o n s t r a t i o n. D'après le lemme 3, on peut faire correspondre à chaque $\nu$ des ensembles $H_{j\nu} \in A_j$ $(j=1, \ldots, m_\nu)$ jouissants des propriétés suivantes:

$$t_j \in H_{j\nu} \qquad (j=1, \ldots, m_\nu), \tag{$\alpha'$}$$

$$y_\nu(t) \geqslant a \quad (t \in \prod_{j=1}^{m_\nu} H_{j\nu}). \tag{$\beta'$}$$

Posons

$$N_j = \prod_{\nu-1}^{\infty} H_{j\nu} \qquad (j=1, 2, \ldots) \tag{11}$$

où $H_{j\nu} = T$ pour $j > m_\nu$.

L'ensemble $N_j$ appartient au corps $A_j$ complètement additif et n'est pas vide, parce que, en vertu de ($\alpha'$),

$$t_j \in N_j \qquad (j=1, 2, \ldots).$$

Les corps $A_j$ étant par hypothèse complètement indèpendants, le produit

$$N=\prod_{j=1}^{\infty} N_j$$

n'est pas vide. Il résulte aisément des relations ($\beta'$) et (11) que pour $\vartheta \in N$ on a $y_\nu(\vartheta) \geqslant a$ ($\nu=1, 2, \ldots$).

§ 3

Supposons que $K$ soit une famille des corps indépendants et que dans chaque corps de $K$ soit définie une mesure.

L e m m e 5. Si la fonktion $y(t)$ est de la forme (I′) et si $y(t) \geqslant 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{j=1}^{m_i} m\, G_{ij} \geqslant 0. \tag{12}$$

D é m o n s t r a t i o n. En écrivant $y(t)$ sous la forme (II′), on voit que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{j=1}^{m_i} mG_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{j=1}^{m} m\, H_{ij}. \tag{13}$$

D'après (1)

$$m\, H_{ij} = \sum_{k=1}^{r_j} \beta_{ijk}\, m\, N_{jk},$$

d'où, en vertu de (13),

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{j=1}^{m_i} m\; G_{ij} = \sum_{k_1 \ldots k_m} a_{k_1 \ldots k_m} \prod_{j=1}^{m} N_{jk_j} \tag{14}$$

Puisque $y(t) \geqslant 0$, il résulte du lemme 1 (pour $a=0$) que l'on a $a_{k \ldots k_m} \geqslant 0$. Par coséquent, le premier membre de (14) est $\geqslant 0$.

L e m m e 6. Si la fonction $y(t)$ est de la forme (I′) et si $y(t)=0$ pour $t \in T$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{j=1}^{m_i} m\, G_{ij} = 0.$$

L e m m e 7. Si la fonction $y(t)$ est de la forme (I′):

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i \prod_{j=1}^{m_i} v_{ij}(t),$$

où les $v_{ij}(t)$ désignent les fonctions caractéristiques des ensembles

$E_{ij} \in B_{ij} \in K$ ($B_{ir} \neq B_{is}$ pour $r \neq s$), on a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{j=1}^{m_i} m\, G_{ij} = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i \prod_{j=1}^{m_i} m\, E_{ij}.$$

Les lemes 6 et 7 sont des conséquences immédiates du lemme 5.

Lemme 8. Si la fonction $y$(t) est de la forme (II′) et si $y(t) \geqslant 0$, on a

$$\omega(\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i1}(t) \prod_{j=2}^{m} m\, H_{ij} \geqslant 0 \quad (t \in T).$$

Démonstration. On a d'après (1)

$$m\, H_{ij} = \sum_{k=1}^{r_j} \beta_{ijk}\, m\, N_{jk}.$$

Il en résulte, en vertu de (1), que

$$\omega(t) = \sum_{k_1 \dots k_m} a_{k_1 \dots k_m} z_{1k_1}(t) \prod_{j=2}^{m} m\, N_{jk_j}$$

En se servant du lemme I (pour $a=0$) on en déduit la formule à démontrer.

Définition de l'intégrale. La fonction $y(t) \in F[U(K)]$ [1]) étant de la forme (I′) posons.

$$\int_T y(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{j=1}^{m_i} m\, G_{ij} \tag{15}$$

En vertu du lemme (7), cette intégrale est bien définie. Au moyen des lemmes 5 et 7 il est aisé de vérifier les formules suivantes dans les quelles $y(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ désignent des fonctions contenues dans $F[U(K)]$ et $a$ un nombre quelconque :

$$\int_T 1\, dt = 1 \tag{a}$$

$$\int_T y(t)\, dt \geqslant 0, \text{ si } y(t) \geqslant 0 \text{ pour } t \in T \tag{b}$$

$$\int_T a\, y(t)\, dt = a \int_T y(t)\, dt \tag{c}$$

$$\int_T [y_1(t) + y_2(t)]\, dt = \int_T y_1(t)\, dt + \int_T y_2(t)\, dt \tag{d}$$

Si $y_1(t) \in F(A_1)$, $y_2(t) \in F(A_2)$, où $A_1 \in K$, $A_2 \in K$, $A_1 \neq A_2$, alors on a

$$\int_T y_1(t)\, y_2(t)\, dt = \left(\int_T y_1(t)\, dt\right)\left(\int_T y_2(t)\, dt\right) \tag{e}$$

[1]) Si $A$ est un corps d'ensembles, nous désignons par $F(A)$ l'ensemble des fonctions $f$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs et telles que $E(f=c) \in A$.

Nous définissons encore une mesure $m^*$ de la façon suivante:
Si $H \in U(K)$ et si $y(t)$ est la fonction caractéri-tique de l'ensemble $H$, alors:

$$m^* H = \int_T y(t)\, dt. \tag{16}$$

Des formules (a) — (d) on déduit les bien connnues propriétés de la mesure. La définition (15) et la propriété (e) de l'intégrale entrainent les propriétés (I), (II) formulées dans le théorème de E. Szpilrajn.

§ 4

Nous considérons maintenant une famille $K$ de corps compètement additifs et complètement i dépendants dont chacun est pourvu d'une mesure $m$ complètement additive.

La mesure $m^*$ est alors complètement additive dans chaque corps $A \in K$ puisqu'elle se confond par hypothèse avec la mesure correspondante $m$. Il en résulte une propriété bien connue de l'intégrale fondée sur une mesure complètement additive, à savoir:

Si les fonctions $\omega_\nu(t)$ appartenant à $F(A)$ où $A \in K$, remplissent les conditions

$$\omega_\nu(t) \geqslant \omega_{\nu+1}(t) \qquad (t \in T), \tag{a}$$

$$\int_T \omega_\nu(t)\, dt \geqslant 0; \tag{b}$$

alors il existe un element $\vartheta \in T$ tel que

$$\omega_\nu(\vartheta) \geqslant 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Lemme 9. La mesure $m^*$ définie d'après le § 3 dans le corps $U(K)$ est complètement additive.

Démonstration. Supposons, par impossible, que la mesure $m^*$ ne soit pas complètement additive. Il existe alors une suite d'ensembles $\{H_\nu\}$ appartenant à $U(K)$ de manière que

$$H_\nu > H_{\nu+1} \tag{17}$$

$$m^* H_\nu \geqslant a > 0 \tag{18}$$

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} H_\nu = 0. \tag{19}$$

Soinet $y_\nu(t)$ les fonctions caractéristiques des ensembles $H_\nu$. Puisque ces fonctions appratiennnet à $F[U(K)]$, elles admettent la répresentation (II'):

$$y_\nu(t) = \sum_{i=1}^{n_\nu} \alpha_{\nu i} \prod_{j=1}^{m_\nu} x_{\nu ij}(t), \tag{20}$$

où les $x_{\nu ij}(t)$ sont les fonctions caractéristiques des ensembles

$$H_{\nu ij} \in A_i \in K \text{ et } A_r \neq A_s \text{ pour } r \neq s.$$

Posons

$$H_{\nu ij} = T,\ x_{\nu ij}(t) = 1 \quad (t \in T,\ j > m_\nu). \tag{21}$$

D'après (17), (18) et (20) on a pour $\nu=1, 2, \ldots$:

$$y_\nu(t) \geqslant y_{\nu+1}(t) \quad (t \in T), \tag{22}$$

$$\int_T y_\nu(t)\, d\,t = \sum_{i=1}^{n_\nu} \alpha_{\nu i} \prod_{j=1}^{\infty} m\, H_{\nu ij} \geqslant a \tag{23}$$

Posons encore

$$\omega_\nu(t) = \sum_{i=1}^{n_\nu} \alpha_{\nu i}\, x_{\nu i1}(t) \prod_{j=2}^{\infty} m\, H_{\nu ij}. \tag{24}$$

La différence $y_\nu(t) - y_{\nu+1}(t)$ étant $\geqslant 0$ et de la forme (II'), la relation (21) et le lemme 8 donnent

$$\omega_\nu(t) \geqslant \omega_{\nu+1}(t) \qquad (t \in T,\ \nu=1, 2, \ldots) \tag{25}$$

En vertu de (23), on a

$$\int_T \omega_\nu(t)\ dt = \int_T y_\nu(t)\, dt \geqslant a$$

Puisque les fonctions $\omega_\nu(t)$ appartiennent à l'ensemble $F(A_1)$, il existe, d'après la propriété de l'intégrale signalée plus haut, un élément $t_1$ tel que

$$\omega_\nu(t_1) \geqslant a \quad (\nu=1, 2, \ldots),$$

on a donc, en vertu de (24),

$$\sum_{i=1}^{n_\nu} \alpha_{\nu i} x_{\nu i1}(t_1) \prod_{j=2}^{\infty} m\, H_{\nu ij} \geqslant a > 0. \tag{26}$$

Posons

$$y_{\nu 1}(t) = \sum_{i=1}^{n_\nu} \alpha_{\nu i}\, x_{\nu i1}(t_1) \prod_{j=2}^{\infty} x_{\nu ij}(t). \tag{27}$$

On a, en vertu de (21), (22) et du lemme 2,

$$y_{\nu 1}(t) \geqslant y_{\nu+1,1}(t) \quad (t \in T,\ \nu=1, 2, \ldots) \tag{28}$$

et, d'après (26), (21),

$$\int_T y_{\nu 1}(t)\, dt \geqslant a > 0 \qquad (\nu=1, 2, \ldots) \tag{29}$$

Les relations (28), (29) sont analogues aux relations (22), (23) remplies par les fonctions $y_\nu(t)$.

On établit de même l'existence d'un élément $t_2$ satisfaisant à la condition

$$\sum_{i=1}^{n_\nu} \alpha_{\nu i}\, x_{\nu i1}(t_1)\, x_{\nu i2}(t_2) \prod_{j=3}^{\infty} m\, H_{\nu ij} \geqslant a > 0,$$

analogue à (26). En répétant ce procédé, on obtient une suite d'éléments $\{t_k\}$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n_\nu} \alpha_{\nu i}\, x_{\nu i 1}(t_1) \ldots x_{\nu i r}(t_r) \prod_{j=r+1}^{\infty} m H_{\nu i j} \geqslant a \,(\nu,\ r=1, 2, \ldots).$$

Il en résulte, en vertu de (21), que

$$\sum_{i=1}^{n_\nu} \alpha_{\nu i} \prod_{j=1}^{m_\nu} x_{\nu i j}(t_j) \geqslant a > 0 \quad (\nu=1,\ 2, \ldots).$$

De cette inégalité et du lemme (4) il s'ensiut qu'il existe un élément $\vartheta$ tel que

$$y_\nu(\vartheta) \geqslant a > 0 \quad (\nu=1,\ 2, \ldots).$$

Par conséquent $\vartheta \in H_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots)$, contrairement à (19).

Démonstration du théorème. D'après le lemme 9 et la remarque 2) de la page 81 il s'ensuit que l'on peut ét endre la définition de la mesure $m^*$ au plus petit corps complètement additif $V$ qui contient tous les corps de la famille $K$.

La condition (b) du théorème résulte aisément de la propriété 2° de la mesure formulée dans le théorème de Szpilrajn et de l'additivité complète de la mesure $m^*$ et du corps $V$. L'unicité de la mesure $m^*$ résulte facilement de notre construction.

Institut Mathématique
de l'Académie des Sciences
de la RSS d'Ukraine.

Reçu le 7.XII 1940