№ 8 ЗБІРНИК ПРАЦЬ ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ 1946
АКАДЕМІЇ НАУК УРСР

RECUEIL DES TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE

Про міру в незалежних тілах

С. С. Банах (Львів)

Нехай T є довільна множина елементів. Ми розглядаємо тіла[1]) множин, елементи яких належать до множини T. Ми скажемо, що сукупність K тіл A являє собою сім'ю тіл незалежних, якщо добуток скінченного числа непорожніх множин, що належать до різних тіл сукупності K, є завжди непорожній. У випадку, коли ця властивість має ще місце і для добутку зліченно-нескінченної кількості множин, і що належать до різних тіл сукупності K, називатимемо останню сім'єю тіл цілком незалежних.

Поняття сім'ї тіл незалежних або цілком незалежних належить Е. Шпільрайнові таксамо, як і наступна теорема.

Хай буде K сім'я незалежних тіл така, що в кожному тілі $A \in K$ є означена міра m. Тоді, якщо $U(K)$ позначає найменше тіло, яке містить усі тіла сім'ї K, то можна означити в $U(K)$ одну й тільки одну міру m^* [2]), що задовольняє умови

1^0. $m^*H = mH$ $(H \in A \in K)$

2^0. $m^* \prod_{i=1}^{n} H_i = \prod_{i=1}^{n} m^* H_i$ $(H_i \in A_i \in K,\ A_r \neq A_s$ при $r \neq s)$.

. В цій роботі я доводжу таку теорему:

---

1) Клас A підмножин множини T зветься тілом, якщо доповнення, сума та добуток скінченного числа розглядуваних підмножин належать до того самого класу A. Тіло A зветься цілком адитивним, якщо воно містить також суму та добуток зліченно-нескінченної кількості будьяких множин, що належать до A.

2) В тілі A є означена міра, якщо кожній множині $H \in A$ відповідає число $mH \geqslant 0$ таким чином, що $mT = 1$ і $m(H_1 + H_2) = mH_1 + mH_2$ при $H_1, H_2 \in A$ та $H_1 H_2 = 0$. Кажуть, що міра є цілком адитивна, якщо для всякої послідовності $\{H_i\}$ множин, які належать до тіла A і попарно не мають спільних елементів, такої, що $\Sigma H_i \in A$, маємо $m\sum_{i=1}^{\infty} H_i \sum_{i=1}^{\infty} mH_i$.

Легко бачити, що ця умова еквівалентна наступній умові:

Якщо $H_i \in A$, $H_i \supset H_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, при чому $\prod_{i=1}^{\infty} H_i = 0$, тоді $\lim_{i \to \infty} m H_i = 0$.

Можна довести, що у випадку, коли міра m, означена в тілі A, є цілком адитивна, існує тіло $A^* \supset A$ цілком адитивне і з цілком адитивною мірою m^* такою, що $mH = m^*H$ для $H \in A$ (див. O. Nikodym, Sur l'existence d'une mesure parfaitement additive et non séparable, Mémoires Acad. R. de Belgique, 1938).