Lwów i matematyka

Przedstawienie na posiedzeniu Akademii Krakowskiej, a później opublikowanie przez Banacha pierwszej pracy w „Biuletynie Akademii Krakowskiej" zwróciło uwagę świata naukowego na efektowny start niewątpliwego talentu. Cóż to była za praca! Opublikowana została wspólnie z Hugonem Steinhausem i nosiła tytuł *Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier* (O zbieżności w średniej szeregu Fouriera). Zawierała ważny przyczynek do modnej ówcześnie teorii szeregów Fouriera, które zostały wprowadzone na potrzeby równań różniczkowych fizyki matematycznej, takich jak równania przewodnictwa ciepła, rozchodzenia się fal i innych. Obecnie rezultaty tej pracy są prostym wnioskiem z ogólnej teorii analizy funkcjonalnej, rozwiniętej później przez Banacha. Można sądzić, że miała ona pewien wpływ na rozwój tych ogólnych idei.

Jak już wspomnieliśmy w poprzednim rozdziale – jej główny wynik to dowód istnienia funkcji całkowalnej, której rozwinięcie w szereg Fouriera nie jest zbieżne do niej w średnim (w obecnej terminologii: w normie L^1). Wynik ten, to ważny przyczynek do żywo rozwijającej się w tych latach teorii szeregów Fouriera, która odgrywa niezwykle ważną rolę w teorii równań różniczkowych fizyki matematycznej. Dziś wynik zawarty w tej pracy jest bardzo łatwy dla każdego studenta matematyki obeznanego z analizą funkcjonalną. Właśnie analiza funkcjonalna – dzieło życia Stefana Banacha, rozwinięta przez niego w kilka lat potem – daje uniwersalną i łatwą metodę rozwiązywania problemów podobnych temu z pierwszej jego pracy. Zapewne ta praca była pierwszym stopniem na jego drodze ku najwyższym piętrom matematyki, jakim jest ta piękna, abstrakcyjna i uniwersalna metoda zwana analizą funkcjonalną.

Banach spotyka się z innymi matematykami, nawiązuje przyjaźnie i znajomości w elitarnym środowisku matematyków. W marcu 1917 roku wyjeżdża na krótko do Lwowa na wykład habilitacyjny Steinhausa. Systematycznie spotyka się ze Steinhausem w jego krakowskim mieszkaniu przy ulicy Karmelickiej 3.

Koniec pierwszej wojny światowej i pierwsze lata niepodległości to czas formowania się polskiego Towarzystwa Matematycznego.

W *Księdze protokółów* Towarzystwa Matematycznego w Krakowie (w rękopisie) pod datą 2 kwietnia 1919 roku znajdujemy notatkę, że zebranie konstytucyjne odbyło się o godz. 5 po południu w lokalu seminarium filozoficznego przy ulicy Św. Anny 12. Jednym z członków–założycieli był Stefan Banach.

Franciszek Leja, wybitny matematyk krakowski, tak relacjonuje to pierwsze spotkanie inauguracyjne, na którym obecnych było 16 osób:

„Przewodniczącym zebrania obrano prof. S. Zarembę i na wniosek prof. K. Żórawskiego uchwalono założenie towarzystwa pod nazwą: Towarzystwo Matematyczne w Krakowie. [...] Statut określił jako cel Towarzystwa – wszechstronne pielęgnowanie matematyki czystej i stosowanej przez odbywanie posiedzeń naukowych z odczytami [...] Wszyscy uczestnicy zebrania konstytuującego zgłosili swój akces do Towarzystwa i wybrali pierwszy Zarząd w składzie następującym: S. Zaremba – prezes, A. Hoborski – zastępca prezesa, F. Leja – sekretarz i I. Horodyński – skarbnik [...]

W ciągu roku 1919 Towarzystwo odbyło 11 posiedzeń naukowych czyli zwyczajnych i jedno Nadzwyczajne Walne Zebranie. Na posiedzeniach zwyczajnych wygłoszono szereg odczytów [Wśród nich dwa odczyty Banacha: *Z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej* – 7 maja i *Z teorii funkcji linii* – 17 grudnia – R.K.] i przeprowadzono dyskusje...

W ciągu pierwszego roku istnienia Towarzystwa liczba członków wzrosła z 16 do 50 [...]

Na Nadzwyczajnym Walnym Zebraniu w dniu 29 XI 1919 roku Przewodniczący S. Zaremba odczytał list A. Łomnickiego ze Lwowa z wiadomością, że przed dwoma laty powstało we Lwowie Towarzystwo Matematyczne, którego członkowie gotowi są przystąpić do Towarzystwa zorganizowanego w Krakowie w razie rozszerzenia jego działalności na całą Polskę. Następnie S. Dickstein przypomniał, że już w roku 1880 powstało w Petersburgu Koło Matematyków Polaków, które wydało 4 tomy prac swoich członków i że tę działalność wydawniczą przejęły *„Prace Matematyczno–Fizyczne"* powstałe w roku 1888 w Warszawie.

W dniu 22 XII 1920 uchwalono nowy Statut (wcześniej uchwalono zmianę nazwy); członkowie zamiejscowi mogli tworzyć oddziały Towarzystwa, na przykład Lwowski Oddział Polskiego Towarzystwa Matematycznego – MPT.

Jeśli chodzi o program matematyczny to była już mowa o roli, jaką odegrały *Principia Mathematica* Alfreda Whiteheada i Bertranda Russella oraz ogólna teoria względności Alberta Einsteina. Naturalnie dzieła te pobudzały do pracy twórczej wszystkich przedstawicieli nauk ścisłych, ale brak w protokołach informacji, jakoby poświęcono im w Krakowie specjalne posiedzenia, a było tak np. w Niemczech).

W owym czasie, dzięki opiece i przyjaźni Steinhausa, Banachem zaczynają się interesować najsławniejsi koryfeusze polskiej matematyki. Przecież ten samouk rozwiązuje z dnia na dzień – wedle zapewnień szanownego przecież Hugona Steinhausa – trudne i zawiłe problemy matematyczne.

Tymczasem Banach napisał już swą drugą, a pierwszą samodzielnie opublikowaną pracę: *Sur la valeur moyenne des fonctions ortogonales* (O wartości średniej funkcji ortogonalnych). Dowodzi w niej, że ciąg średnich arytmetycznych ortonormalnego ciągu funkcji jest prawie wszędzie zbieżny do zera. Wynik ten związany jest z silnym prawem wielkich liczb w teorii prawdopodobieństwa. Został on później znacznie wzmocniony przez innych matematyków zauważono także, że zastosowanie prostego Lematu Kroneckera bardzo znacznie upraszcza dowód. Sprawiło to, że praca Banacha straciła na znaczeniu.

W tym samym roku powstaje nowa praca Banacha opublikowana później w „Fundamenta mathematicae": *Sur l'équation fonctionnelle f(x+y)=f(x)+f(y) [O równaniu funkcyjnym f(x+y)=f(x)+f(y)].*

Równanie funkcyjne, o którym mowa w tytule, było przedmiotem zainteresowań wielu matematyków, począwszy od Cauchy'ego w XIX wieku. W swojej dwustronicowej pracy Banach udowodnił, że funkcja, spełniająca to równanie jest mierzalna, wówczas jest ona funkcją ciągłą, a stąd wynika, że jest ona funkcją liniową. Wynik ten i obecnie znajduje zastosowanie w kilku działach analizy matematycznej. Kolejną pracą jest *Sur les ensembles de points ou la dérivée est infinie* (O zbiorze punktów, gdzie pochodna jest nieskończona). Ta krótka notka zawiera dowód twierdzenia, które mówi, że zbiór punktów, gdzie pochodna prawostronna dowolnej funkcji jest nieskończona, ma miarę zero. Rezultat ten jest znacznie silniejszy, niż uprzednio znany wynik, w którym zakładało się, że funkcja jest ciągła, oraz rozpatrywało się pochodną obustronną. Jednocześnie dowód jest prostszy.

Ta praca, a właściwie już poprzednia, rozpoczęły całą serię prac Stefana Banacha z teorii funkcji rzeczywistych. Już tylko te prace zapewniłyby mu pozycję wybitnego matematyka.

W roku 1920 prof. Antoni Marian Łomnicki, powołany na profesora Politechniki Lwowskiej, autor cenionych podręczników szkolnych i akademickich oraz prac z dziedziny geometrii i kartografii, proponuje Banachowi asystenturę, (wiązały się z tym zresztą różne obowiązki w domu profesora np. opieka na córeczką–niemowlęciem).

Banach w tych latach pracuje dużo. Zaprzyjaźnia się ze Stanisławem Ruziewiczem i piszą wspólnie *Sur les solutions d'une équation fonctionelle de J.Cl. Maxwell* (O rozwiązaniach równania funkcyjnego J.Cl. Maxwella). W pracy tej znajdują wszystkie funkcje f i 1/3 które spełniają równość $f(u)f(v)f(w) = (u^2+v^2+w^2)$, dla wszystkich liczb u, v, w. Równanie to zostało wprowadzone przez Maxwella na potrzeby fizyki i zostało przez niego rozwiązane przy założeniu różniczkowalności funkcji, co go całkowicie zadowalało. Rozwiązanie podane przez Banacha i Ruziewicza jest zupełnie elementarne i dosyć proste.

Kolejna praca Banacha *Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables* (O funkcjach pochodnych funkcji mierzalnych) dotyczy znowu teorii funkcji rzeczywistych. Praca ta wnosi nowy impuls do badania pochodnych bardzo ogólnych funkcji. Banach łączy tutaj starą klasyczną teorię pochodnych z nową teorią miary i funkcji mierzalnych. Jest dosyć typowe dla Banacha, że bardzo umiejętnie i śmiało znajdował zastosowanie nowo powstałych dyscyplin teorii miary do starych klasycznych zagadnień. Zyskiwała na tym klasyczna teoria, a równocześnie prace te przyczyniały się do rozwoju nowych teorii.

Była to już szósta praca Banacha, a czwarta całkowicie samodzielna. W jakich warunkach prace te powstawały?

Początkowo Banach mieszkał i stołował się u swojego profesora.

„Byłam kilkunastoletnią panną – wspomina Irena Wachlowska, starsza córka prof. Łomnickiego – kiedy Banach przyjechał w roku 1920 do Lwowa i zamieszkał w naszym domu przy ulicy Nabielaka 19. Nasze mieszkanie składało się z trzech pokoi – jadalni, sypialni i gabinetu ojca oraz kuchni i łazienki. Banach prawdopodobnie nocował w gabinecie ojca. Mieszkał u nas niedługo – może kilka miesięcy, zanim nie urządził się we Lwowie. Ubrany był nader skromnie: w pocerowanym garniturze, w połatanych butach. Pozostawił wrażenie miłego, nie przeszkadzającego domownikom pana. Moja matka Władysława lubiła literaturę i miała dużo książek. Banach czasami pożyczał coś do czytania. Matka dziwiła się, że tak szybko czyta i świetnie pamięta szczegóły z przeczytanej lektury".

Już w czasie, kiedy sława Banacha jako geniusza matematycznego była raz na zawsze ustalona, Antoni Łomnicki lubił opowiadać o fenomenalnej pamięci, jaką odznaczał się jego podpieczny. Potrafił na przykład po wielu latach dokładnie odtworzyć treść przeczytanej u profesora powieści, cytować całe jej fragmenty, a wszystko to z charakterystycznym żartobliwie sceptycznym uśmieszkiem.

W tymże samym 1920 roku po długich ociąganiach napisał Banach pracę doktorską. Praca nosiła tytuł *O ope-*

racjach na zbiorach abstrakcyjnych i ich zastosowaniach do równań całkowych. Ogłoszono ją w trzecim tomie „Fundamenta Mathematicae" w 1922 roku w języku francuskim *(Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrales).*

O pracy tej trzeba powiedzieć znacznie więcej, i to nie tylko dlatego, że jest to rozprawa doktorska Stefana Banacha, lecz dlatego, że jest to jedna z najważniejszych jego prac. Cóż takiego zawiera? Przede wszystkim to, co wkrótce po ukazaniu się tej pracy przyjęto nazywać przestrzeniami Banacha. Banach podaje tu aksjomatyczny opis takich przestrzeni, wprowadza też pojęcie operatora liniowego w tych przestrzeniach. Pokazuje wiele konkretnych przykładów, traktowanych do tej pory w oderwaniu od siebie, które podpadają pod ten ogólny schemat. Jednak wprowadzenie tych abstrakcyjnych pojęć i ustanowienie aksjomatyki to jeszcze nie cała zasługa Banacha. Podobne idee dojrzewały już u kilku innych matematyków. W 1921 roku matematyk austriacki E. Helly ogłasza pracę z podobną treścią. W Polsce wcześniej Hugo Steinhaus wprowadza pojęcie abstrakcyjnej operacji liniowej. Również sławny matematyk Norbert Wiener upomina się o prymat w tej dziedzinie, o czym wyraźnie pisze w swej autobiografii. Natomiast tym, co wyróżnia pracę Banacha spośród innych na ten temat, jest, że Banach przyjął jako podstawową własność przestrzeni jej zupełność i pokazał, że własność ta pozwala dowodzić głębokie i niezwykle użyteczne twierdzenia. W swej pracy Banach dowodzi dwa takie twierdzenia. Pierwsze z nich mówi, że granica punktowa ciągu operacji liniowych i ciągłych sama jest liniowa i ciągła; drugie, to znane dziś każdemu matematykowi twierdzenie Banacha o punkcie stałym dla operacji zwężającej. Twierdzenie to jest abstrakcyjną wersją znanej dużo wcześniej, w pewnych konkretnych zagadnieniach, metody kolejnych przybliżeń. Daje ono bardzo użyteczną metodę znajdywania rozwiązań wielu równań różnego rodzaju. Oba te twierdzenia to dwa uniwersalne klucze do wielu drzwi, które poprzednio otwierane były przy pomocy ślusarza. Bez żadnej przesady można powiedzieć, że rozprawa doktorska Stefana Banacha jest fundamentem, na którym głównie on, a także jego uczniowie i inni, wznieśli wspaniały gmach analizy funkcjonalnej.

Otto Nikodym, po wojnie profesor uniwersytetu w USA, opowiadał Andrzejowi Turowiczowi, iż profesorowie lwowscy orientowali się, że Banach ma wszystko gotowe do doktoratu, ale nie zabiera się do napisania pracy doktorskiej. Zresztą Banach, który był samoukiem – nie ukończył żadnych studiów oprócz dwóch lat Politechniki Lwowskiej – musiał uzyskać, zgodnie z ustawą, zezwolenie ministra na zdawanie od razu egzaminu magisterskiego. Ale nie to było najważniejsze. Banach, gdy dowiódł jakichś twierdzeń, najczęściej ich nie zapisywał, bo go to nudziło. Bardziej pociągały go spekulacje myślowe, niż jałowa praca związana z ich zapisem. Wówczas według relacji Nikodyma zanotowanej przez Andrzeja Turowicza „profesor Ruziewicz polecił swemu asystentowi, aby chodził z Banachem do kawiarni, wypytywał go i notował twierdzenia i dowody. Gdy już było to gotowe, wręczano notatki Banachowi, aby skontrolował, czy tekst mu odpowiada, i albo go autoryzował, albo przeredagował. Banach przeredagował i tak powstała jego praca doktorska.

Warto dodać, że praca doktorska Stefana Banacha była jego siódmą z kolei pracą matematyczną, pierwszą zaś poświęconą analizie funkcjonalnej.

W ten sposób Banach w wieku 28 lat został doktorem nauk matematycznych. Promotorem pracy doktorskiej

Banacha był naturalnie profesor Antoni Łomnicki.

Stanisław Marcin Ulam, profesor Harvard University i wykładowca Columbia University, podaje w swoich wspomnieniach, jak w owym czasie odbywały się promocje pracy doktorskiej na Uniwersytecie Jana Kazimierza:

„Obrona była raczej formalną ceremonią, odbywała się w obecności rodziny i przyjaciół. Musiałem założyć białą muszkę i rękawiczki. Stożek i Kuratowski, promotorzy, wygłosili krótkie mowy charakteryzujące moje dotychczasowe prace i publikacje. Po paru słowach o tezie doktorskiej wręczyli mi pergaminowy dokument".

Kiedy zdawało się we Lwowie egzamin doktorski – obok przedmiotu głównego trzeba było zdawać egzamin z przedmiotu dodatkowego. Banach, namówiony przez Steinhausa i początkowo pełen dobrych chęci, wybrał astronomię i zgłosił się do prof. Stanisława Lorii, aby dowiedzieć się, czego ma się nauczyć. Loria podał mu spis lektur, później zaś dziwił się bardzo będąc świadkiem, jak sam mawiał, gigantycznych postępów w opanowywaniu materiału i to dosłownie z dnia na dzień. Ale gdy Banach przerobił pomyślnie podany przez Lorię materiał, zniechęcił się do zdawania egzaminu i trzeby było użyć podstępów, aby go na egzamnin ściągnąć.

Po zrobieniu doktoratu, Banach wchodzi w nowy okres, jeszcze intensywniejszej pracy. Zaczynają ukazywać się drukiem jego wcześniejsze opracowania. „Fundamenta Mathematicae" i „Bulletin International de l'Academie Polonaise des Sciences et de Lettres", w których Banach publikuje, rozprowadzane są za granicą – intensyfikują się więc, normalną koleją rzeczy, kontakty zagraniczne.

Powstaje praca Banacha opublikowana w roku 1923 w języku angielskim *An example of an orthogonal development whose sum is everywhere different from the* *developed function* (Przykład ortogonalnego rozwinięcia, w którym suma jest wszędzie różna od rozwijanej funkcji). Wynik zawarty w tej pracy zaskakuje swą prostotą, mówi on, że dla każdej funkcji całkowitej lecz nie całkowalnej w kwadracie można zbudować układ ortogonalny i zupełny, złożony z funkcji ograniczonych, taki że wszystkie współczynniki rozwinięcia Fouriera tej funkcji względem tego układu są równe zeru. Wynik ten stał się punktem wyjścia dla kilku innych prac.

W programie szkoły politechnicznej we Lwowie w roku akademickim 1920/21 wymienione zostaje nazwisko Stefana Banacha jako asystenta przy katedrze matematyki, kierownikiem której był prof. Łomnicki, wykładający trzy godziny tygodniowo.

Osiągnięcia Banacha są coraz większe. Swobodna wymiana idei i myśli owocuje nadzwyczaj szybko. Powstaje w tym czasie praca mająca niezmiernie duże znaczenie dla rozwoju matematyki *Sur le problème de la mesure* (O problemie miary) zreferowana 27 lutego 1922 roku na posiedzeniu naukowym Wydziału Matematyczno–Przyrodniczego, a opublikowana później w FM 4. Na czym polegała doniosłość tej pracy Banacha?

Problem mierzenia powierzchni objętości brył, figur sięga starożytności. Już od niepamiętnych czasów ludzie radzili sobie z mierzeniem pól tak prostych figur jak prostokąt, trójkąt czy dowolny wielokąt. Archimedes podał pewien sposób obliczania pól i objętości bardziej skomplikowanych tworów takich jak koła, kule, stożki itd. Idee te uściślił i rozwinął dopiero w połowie XIX wieku Jordan. Znacznie rozszerzył on klasę figur, które można mierzyć. Jeszcze bardziej rozszerzył klasę tę w początku XX wieku Lebesgue. Pokazał, że można pole na płaszczyźnie, ewentualnie objętość w przestrzeni przypisać w sposób wysoce zadawalający praktycznie każdemu zbiorowi, który możemy opisać (lub tak, jak to się nazywa w matematyce, skonstruować). Pozostał jednak nie rozwiązany problem postawiony przez Lebesgue'a: czy można przypisać pole każdemu zbiorowi na płaszczyźnie, ewnetualnie objętość każdemu zbiorowi w przestrzeni tak, by spełnione były dwie bardzo naturalne własności. Pierwsza własność to: pola (objętości w przestrzeni) zbiorów przystających są równe; druga to: pole (objętość w przestrzeni) sumy rozłącznych zbiorów jest równe sumie pól (objętości) tych zbiorów. Hansdorff w roku 1914 wykazał, że nie można tego uczynić z objętością w przestrzeni. Natomiast Banach pokazuje, w pewien bardzo pomysłowy sposób, że można to uczynić na płaszczyźnie i na prostej (w tym ostatnim przypadku chodzi o długość zbioru). Jest to nie tylko rozwiązanie problemu ale i początek wielu prac licznych matematyków. Z tej pracy wywodzi się całka Banacha z dowolnej funkcji ograniczonej, granica uogólniona Banacha. Badania w tym kierunku prowadzi się również obecnie. Sposób mierzenia skonstruowany przez Banacha, choć ważny, nie odegrał jednak takiej roli w matematyce, jak sposób Lebesgue'a, gdyż, co obecnie stało się zupełnie jasne, jeśli chce się zachować pewną dodatkową własność tzw. przejść granicznych, wówczas klasa wprowadzona przez Lebesgue'a jest najszersza.

W roku 1922 Stefan Banach habilitował się. *Kronika Uniwersytetu Jana Kazimierza* we Lwowie za rok akademicki 1921/22 w rubryce „Sprawy osobowe" podaje co następuje: „dr Stefan Banach habilitowany jako docent matematyki (uchwałą Rady Wydziałowej z dnia 7.IV.1922) i mianowany profesorem nadzwyczajnym tego przedmiotu (postanowienie Naczelnika Państwa z dnia 22.VII.1922)". Niemal natychmiast po habilitacji zostaje zatem profesorem nadzwyczajnym Uniwersytetu Jana Kazimierza.

W ten sposób, zostając w 30 roku życia profesorem nadzwyczajnym prężnego i cenionego w świecie naukowym uniwersytetu, osiągnął w sensie pozycji społecznej – więcej niż mógł kiedykolwiek przypuszczać. Jego sytuacja życiowa, intelektualna i społeczna została w maksymalnym stopniu ugruntowana. Był znanym i mimo młodego wieku wybitnym naukowcem, lubianą postacią lwowskiego świata naukowego. Tu mała dygresja.

Uniwersytet Jana Kazimierza utworzony został w 1661 roku przez króla Jana Kazimierza na mocy dekretu przekształcającego dotychczas istniejące kolegium jezuickie w Akademię Lwowską. W okresie zaborów był to ważny ośrodek nauki i oświaty dla wszystkich polskich patriotów. Przed I wojną światową nosił nazwę cesarsko–królewskiego Uniwersytetu imienia Cesarza Franciszka I. Pod nazwą Uniwersytet Jana Kazimierza działał w latach 1918–39. Gmach uniwersytecki przy ul. Św. Mikołaja 4 należał ongiś do fundacji Samuela Głowińskiego. Jest to ogromny gmach w austriackim stylu koszarowym. Po odrodzeniu się państwa polskiego znaczna część zakładów uniwersyteckich znajdujących się w tym gmachu przeniesiona została do gmachu posejmowego (przy ulicy Marszałkowskiej 1) nazywanego od tego czasu „nowym uniwersytetem". Na UJK istniał Wydział Filozoficzny, na którym habilitował się Stefan Banach. Jego dziekanem był prof. Kazimierz Kwietniewski, prodziekanem – Zygmunt Weyberg. Oprócz Wydziału Filozoficznego istniały Wydziały: Teologiczny, Prawa i Umiejętności Politycznych oraz Lekarski. Rektorem UJK był wówczas Jan Kasprowicz.

Profesorom uniwersyteckim na ogół powodziło się bardzo dobrze. Życie we Lwowie było tańsze niż w Warszawie i jak wynika z materiałów Towarzystwa naukowego we Lwowie przyjezdny mógł za kwotę równoważną jednemu dolarowi, dziennie przyzwoicie się utrzymać, wliczając w to również wynajęcie dobrego mieszkania. Osobom o skromniejszych wymaganiach wystarczyło nawet pół dolara dziennie.

Obiektywnie biorąc, finansowa sytuacja Banacha jako profesora uniwersytetu powinna być dobra, ale z uwagi na jego specyficzny tryb życia była nienajlepsza. Przez pewien czas prowadził życie ponad stan i często był zadłużony. Aby poprawić swoją trudną sytuację finansową zaczął pisać podręczniki. O tym „podręcznikowym" okresie życia Banacha tak pisał Hugo Steinhaus:

„Najwięcej czasu i sił zabrało Banachowi pisanie podręczników arytmetyki, algebry i geometrii dla szkół średnich. Pisał je z Sierpińskim i Stożkiem, a także sam. Nie było to nigdy kopiowanie już istniejących książek szkolnych. Banach – dzięki swym doświadczeniom korepetytora zdawał sobie doskonale sprawę z tego, że każda definicja, każdy wywód i każde zadanie jest problemem dla autora książki szkolnej, który dba o jej wartość dydaktyczną."

I dalej oceniając tę działalność wspomina:

„Moim zdaniem brak było Banachowi tylko jednego z wielu talentów potrzebnych autorowi podręczników szkolnych: umiejętności widzenia przestrzennego".

W latach 1929 i 1930 Banach opublikował dwa podręczniki akademickie: *Rachunek różniczkowy i całkowy* tom I, wydany przez Zakład Narodowy im. Ossolińskich we Lwowie oraz tom II, wydany przez Książnicę Atlas we Lwowie. Podręczniki te odznaczały się troską o ścisłość merytoryczną, wypełniały lukę w podręcznikach akademickich z matematyki.

Oprócz tej – nazwijmy ją uboczną – działalności Banach bardzo dużo pracuje, wykłada, publikuje.

Powstają wówczas prace:

Sur un théorème de M. Vitali (O pewnym twierdzeniu Vitalego). W pracy tej Banach podaje prosty dowód ważnego twierdzenia z teorii miary i jednocześnie odpowiada na problem stawiany przez innego sławnego matematyka. Idee tej pracy były wykorzystywane znacznie później.

Sur une classe de fonctions d'ensemble (O pewnej klasie funkcji zbioru). Praca ta, to dosyć ważny wkład w teorię różniczkowania ogólnych funkcji.

Un théorème sur les transformations biunivoques (Pewne twierdzenie o przekształceniach wzajemnie jednoznacznych). Jest to przyczynek do ważnego twierdzenia w teorii mnogości, pochodzącego od Schrödera i Bernsteina.

Sur la décomposition des ensambles de points en parties respectivement congruentes (O rozkładzie zbiorów punktów na części odpowiednio przystające). Praca ta – napisana wspólnie z Alfredem Tarskim, młodszym od Banacha o 10 lat filozofem i matematykiem, późniejszym docentem Uniwersytetu Warszawskiego i profesorem w Berkeley – zawiera szokujący wynik, który rzuca nowe światło na teorię mierzenia zbiorów, a także wręcz na pojmowanie wielu rzeczy z podstaw matematyki. By wyjaśnić ten rezultat musimy wprowadzić dwie definicje. Powiedzmy, że dwa podzbiory kuli są przystające, jeśli obracając kulę wokół jej środka można przeprowadzić jeden zbiór na drugi. Powiemy również, że dwa zbiory są równoważne poprzez skończony rozkład, jeśli oba te zbiory można rozbić na tę samą ilość części tak, że kolejne części z obu zbiorów są przystające.

W pracy tej autorzy dowodzą istnienia dwu rozłącznych podzbiorów kuli, z których każdy jest równoważny z całą kulą poprzez rozkład skończony. Mówiąc skrótowo, lecz za to bardziej obrazowo, kulę można rozdzielić tak na kawałki, a następnie z tych kawałków można złożyć dwie kule takie same jak kula wyjściowa. Wynika z tego, że nie można mówić o objętości, w zwykłym sensie, tych podzbiorów, gdyż wówczas objętość kuli byłaby co najmniej taka sama jak podwojona objętość.

Paradoks ten między innymi doprowadził do nowych badań nad rozumieniem podstawowych pojęć w matematyce, a zwłaszcza nad rolą tzw. pewnika wyboru. Wyjaśniono, że w tym paradoksalnym rozkładzie kuli mowa o istnieniu takiego rozkładu, ale nie wskazuje się go; jak obecnie wiadomo nie można tego zrobić.

Praca ta była zaczątkiem wielu innych prac matematyków na całym świecie i należy do jednej z ciekawszych prac Banacha.

Jest to bardzo szczęśliwy okres w jego życiu. Jest honorowany, wybierany członkiem towarzystw naukowych, zapraszany do wygłaszania wykładów. Wśród składu osobowego Wydziału Komunikacyjnego Politechniki Lwowskiej odnajdujemy nazwisko Banacha jako wykładowcy mechaniki ogólnej i mechaniki teoretycznej. W tym charakterze wykłada 3 godziny tygodniowo, ma też 2 godziny ćwiczeń ze studentami.

W roku 1924 zostaje członkiem–korespondentem Akademii Umiejętności (która 15 lat później przyzna mu swoją Grand Prix). Wkrótce potem wyjeżdża na wykłady do Francji.

O jego wyjeździe do Francji dowiadujemy się pośrednio – czytając *Kronikę Uniwersytetu Jana Kazimierza*:

„Jak w poprzednich latach, tak i w roku ubiegłym Ministerstwo W.R. i O.P. udzieliło kilku profesorom

Wydziału Matematyczno–Przyrodniczego urlopów, by mogli bezpośrednio zapoznać się z najnowszymi zdobyczami wiedzy i nawiązać osobiste stosunki naukowe z przedstawicielami jej w innych krajach. Urlopy takie otrzymali na cały rok 1924/25: prof. Loria, w celu kontynuowania rozpoczętych prac w California Instytute of Technology w Pasadena i prof. Banach w celu kontynuowania prac matematycznych rozpoczętych w Paryżu".

Ta sama kronika w tym samym roku podaje dalsze informacje na temat Banacha. Najpierw mówi o podziale Wydziału Filozoficznego na Wydział Humanistyczny (facultas litterarum) i Wydział Matematyczno–Przyrodniczy (facultas scientiarum). Dalej, że w roku akademickim 1924/25 korzystali z rocznych płatnych urlopów na wyjazd za granicę w celach naukowych profesorowie: Leon Kozłowski, Franciszek Groer, Stefan Banach, Stanisław Loria. Dalej mówi się o posiedzeniu 1 października 1924 roku Rady Wydziału, na którym do Wydziału Matematyczno–Przyrodniczego zostały przydzielone katedry dla następujących profesorów: Żylińskiego, Steinhausa, Ruziewicza, Banacha. Mimo – najprawdopodobniej – nieobecności wówczas Banacha we Lwowie, Rada Wydziału Filozoficznego na posiedzeniu z dnia 12 listopada 1924 roku uchwaliła jednomyślnie, aby zaproponować zmianę tytułu profesora nadzwyczajnego matematyki na profesora zwyczajnego tegoż przedmiotu w przypadku Stefana Banacha. Nikt się tej propozycji nie sprzeciwiał i Banach mając 32 lata osiągnął najwyższy stopień naukowy, chociaż – w gruncie rzeczy – stopnie, stanowiska, tytuły i godności nie interesowały go zbytnio.

Nie wiemy, w jakim stopniu wyjazd Banacha do Francji był ważny dla rozwoju jego drogi twórczej. Wzajemne oddziaływania istniały już wcześniej. Jeśli chodzi o wpływ matematyki francuskiej na lwowską szkołę matematyczną, to tak pisał o tym Marek Kac, późniejszy profesor Cornell University i członek American Academy of Arts and Sciences, autor prac z teorii prawdopodobieństwa, analizy matematycznej i fizyki statystycznej.

„Wpływ Lebesgue'a na Szkołę Lwowską był bardzo bezpośredni. Szkoła ta, założona przez Steinhausa i Banacha (nieco później niż Szkoła Warszawska) zajmowała się głównie analizą funkcjonalną z jej rozmaitymi zastosowaniami, ogólną teorią systemów ortogonalnych i teorią prawdopodobieństwa. Nie ma wątpliwości, że żadna z tych teorii nie osiągnęłaby swojego dzisiejszego poziomu bez istotnej interwencji całki i miary Lebesgue'a, i że idee całki i miary Lebesgue'a właśnie tam znalazły najbardziej uderzające i owocne zastosowania".

W owym czasie odkrycia Banacha wychodziły już poza problemy matematyków francuskich. Niemniej epizod francuski w życiu Banacha wart jest dokładniejszego zbadania.

Z kroniki życia naukowego dowiadujemy się, że Stefan Banach prowadził wykłady w roku akademickim 1925/26 na Uniwersytecie Jana Kazimierza z „przedmiotu rachunek nieskończonościowy" oraz kierował ćwiczeniami z tego samego przedmiotu. Udzielał również konsultacji uczestnikom Kół Matematyczno–Fizycznych Polskiej Młodzieży Akademickiej z innych ośrodków, m.in. z Wilna i Krakowa.

Na posiedzeniach Oddziału Lwowskiego Towarzystwa Matematycznego Stefan Banach jest zawsze aktywny. Dzień 3 marca 1926 roku był dniem dyskusji nad jego publikacjami naukowymi. A jest ich coraz więcej.

Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie (O liniach prostowalnych i powierzchniach z polem skończonym). Jest to ważna praca o krzywych o długości skończonej, lub bardziej ściśle – o funkcjach o wariacji ograniczonej i pewnych tego uogólnieniach na funkcjach dwu zmiennych. Z pracy tej pochodzi bardzo ładny wzór Banacha na wariację funkcji ciągłej, z którego wynika, że wariacja ta jest równa całce z indykatrycy tej funkcji (indykatrycja funkcji jest funkcją, która w każdym punkcie *a* jest równa mocy przeciwobrazu punktu *a* poprzez funkcję *f*). Wzór ten znalazł zastosowania między innymi w teorii losowych miar.

Sur une propriété caractéristique des fonctions orthogonales (O własności charakterystycznej funkcji ortogonalnych). Praca ta zawiera efektowne zastosowanie twierdzenia z rozprawy doktorskiej Banacha o granicy ciągu operacji liniowych do teorii szeregów ortogonalnych.

Sur le prolongement de certaines fonctionnelles (O przedłużeniu pewnych funkcjałów). Praca ta jest rozwiązaniem problemu postawionego przez sławnego matematyka francuskiego Paula Levy'ego. Problem nie był zbyt ważny, lecz Banach zastosował tu bardzo nowoczesne jeģo rozwiązania.

Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires (O zbieżności prawie wszędzie funkcjonałów liniowych). I w tej pracy Banach, odpowiadając na konkretny problem Lebesgue'a dotyczący ciągu przekształceń całkowych, zastosował swoją niezwykle owocną metodę postępowania – analizę funkcjonalną. Twierdzeniem, które udowodnił jest twierdzenie o granicy ciągu operacji liniowych z przestrzeni, Banacha w przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych, i jest ono znowu ściśle związane z twierdzeniem z jego pracy doktorskiej.

Sur une classe de fonctions continues (O pewnej klasie funkcji ciągłych). Praca zawiera badania nad funkcjami ciągłymi i teorią miary oraz częściowe rozwiązania problemu postawionego przez Łuzina – wybitnego matematyka rosyjskiego.

Kolejna praca, napisana wspólnie ze Steinhausem *Sur le principe de la condensation de singularités* (O zasadzie zagęszczania osobliwości), opublikowana w 1927 roku w *„Fundamenta Mathematicae"*, to praca bardzo znana. Banach i Steinhaus podają w niej uogólnienie twierdzenia Banacha o ciągu operacji liniowych z jego pracy doktorskiej. Jednocześnie dzięki Stanisławowi Saksowi dowód został bardzo znacznie uproszczony, stał się bardzo elegancki i krótki. Saks recenzując tę pracę zauważył, że autorzy powtarzają argumenty Baire'a za tym, że Rnnie jest przeliczalną sumów zbiorów nigdzie gęstych, czyli nie jest zbiorem I kategorii.Ponieważ fakt ten jest również słuszny dla przestrzeni Banacha, pozwala on prawie natychmiast udowodnić twierdzenie o ciągu operacji liniowych. Metoda kategorii okazała się niezwykle użyteczna w analizie funkcjonalnej, Banach używał jej potem wielokrotnie, „wycisnął z niej wszystkie soki".

Obecnie twierdzenie o ciągu operacji liniowych, powszechnie nazywa się twierdzeniem Banacha–Steinhausa i jest ono jednym z trzech podstawowych twierdzeń analizy funkcjonalnej.

W pracy tej podana jest także abstrakcyjna metoda, tzw. zasada zagęszczania osobliwości, łatwego dowodzenia istnienia wielu przykładów w analizie, jak przykład funkcji ciągłej, której szereg Fouriera jest rozbieżny na zbiorze gęstym.

Ówczesną aktywność Banacha odnotowują kroniki naukowe. W rocznikach Polskiego Towarzystwa Matematycznego (Annales de la Sociète Polonaise de mathématique) można znaleźć liczne tytuły, a często i streszczenia komunikatów naukowych, które wygłaszał na posiedzeniach Towarzystwa.

Banach prowadzi również ożywioną działalność dydaktyczną. Wedle Kroniki Uniwersytetu Jana Kazimierza z lat 1926/27, na Wydziale Matematyczno–Przyrodniczym Uniwersytetu, działały cztery seminaria matematyczne: seminarium A – z prof. Żylińskim jako kierownikiem, seminarium B – ze Steinhausem, C – z Ruziewiczem i D – z Banachem. O działalności seminarium Banacha pisano w *Kronice* następująco:

„W roku sprawozdawczym odbywało się seminarium i ćwiczenia. Na seminarium referowano prace oryginalne, przeważnie w zakresie teorii zmiennej rzeczywistej, teorii operacji funkcyjnych i teorii mnogości i topologii. Liczba uczestników wynosiła 45, Na ćwiczeniach studenci rozwiązywali przy tablicy zadania z zakresu wykładów. Seminarium nabyło w ciągu ostatniego roku 13 książek w 17 tomach za łączną sumę 310 zł. 80 gr. Ponadto otrzymało w darze od autorów 16 odbitek z rozpraw"

Z tejże *Kroniki* dowiadujemy się również, że kuratorem kółka matematyczno–fizycznego był właśnie Banach, natomiast Steinhaus był kuratorem Towarzystwa Żydowskich Studentów Filozofii.

W Kronice UJK za rok 1928/29 czytamy, że Stefan Banach występuje jako przewodniczący Zarządu Powszechnych Wykładów Uniwersytetu i Politechniki z ramienia Uniwersytetu, a członkowie tej organizacji, razem z przewodniczącym, figurują jako członkowie senatu akademickiego.

Ze sprawozdania kierowników zakładów Wydziału Matematyczno–Przyrodniczego:

„Seminarium matematyczne D. Kierownik: prof. dr

Stefan Banach, personel pomocniczy naukowy: Zenon Wojakowski demonstrator. W okresie sprawozdawczym odbyło się seminarium matematyczne, poświęcone teorii funkcji zmiennej rzeczywistej, na którym uczestnicy referowali prace specjalne z tego zakresu. Ponadto odbywały się ćwiczenia z mechaniki ogólnej, na których studenci rozwiązywali przy tablicy i oddawali na piśmie zadania, w związku z równoczesnym wykładem tego przedmiotu. Liczba uczestników: a) seminarium ok. 10, b) ćwiczeń z mechaniki ok. 200".

Na temat prowadzonych wówczas zajęć z matematyki na Uniwersytecie Jana Kazimierza ciekawe światło rzucają wspomnienia Marka Starka opublikowane w „Wiadomościach Matematycznych". Oto może przydługi, ale ciekawy cytat:

„Na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie były wówczas cztery katedry matematyki: E. Żylińskiego, H. Steinhausa, S. Ruziewicza i S. Banacha (podana tu kolejność odpowiada kolejności obsadzania katedr). Zwyczajem było, że co roku inny z profesorów prowadził wykład z analizy dla pierwszego roku. Ten sam profesor w następnych latach kontynuował wykład analizy, prowadził seminaria i opiekował się danym rokiem do końca trzeciego roku akademickiego, po czym studenci powinni byli uczęszczać już tylko na wykłady monograficzne i seminaria. Cykl był więc czteroletni.

Mój rocznik był kierowany przez profesora Steinhausa. Był to rocznik bardzo liczny, na wykład uczęszczało ponad 220 studentów stłoczonych w niedużej, dusznej sali, stojących w przejściach i siedzących na oknach. Cały zakład matematyki miał tylko czterech asystentów (jednego starszego, jednego młodszego i dwóch tzw. pomocniczych), wobec czego nie było podziału na grupy, ćwiczenia dla całego rocznika prowadził prof. Steinhaus osobiście, bez pomocy asystentów".

Opisując atmosferę wykładów, Stark pisze:

„Wróćmy do wykładu prof. Steinhausa. Nad zatłoczoną salą dominowała wysoko na katedrze jego postać przy małej (ok. 1,5x1,5) tablicy. [...] Mimo starannego przygotowania wykład był za trudny dla przeciętnego studenta. Pod tym względem był przeciwieństwem Banacha, który wykłady miał starannie przygotowane i wygłaszał je w taki sposób, że chyba nie było nikogo na sali, kto by ich nie rozumiał".

Dalej Stark opisuje wzajemne kontakty między profesorami Uniwersytetu:

„Chciałbym parę słów powiedzieć o stosunku prof. Steinhausa do pozostałych matematyków lwowskiej szkoły matematycznej. Są tu pewne nieporozumienia, zwłaszcza jeśli idzie o ocenę wzajemnego stosunku Banacha i Steinhausa. [...] było wypowiedziane zdanie, że Banach zajął się analizą funkcjonalną pod wpływem prof. Steinhausa. Interesowałem się tym już dawno i krótko po wojnie zadałem prof. Steinhausowi pytanie czy to miało miejsce. Prof. Steinhaus zastanowił się milcząc kilka minut, a potem powiedział krótko: „Nie!". Banach poszedł w tym kierunku samodzielnie, tak jak samodzielnie zajął się teorią mnogości i bardzo wcześnie, całką Lebesgue'a (był wtedy jeszcze studentem, a całka Lebesgue'a nie figurowała jeszcze w podręcznikach). Steinhaus niewątpliwie wywarł duży wpływ na Banacha. Wynikiem postawionego przez Steinhausa Banachowi problemu, była pierwsza praca tegoż, z szeregów trygonometrycznych. Pod wpływem Steinhausa, Banach zajął się szeregami ortogonalnymi. Z początkiem lat dwudziestych współpracowali ze sobą ściślej. Z czasem jednak, w miarę rozbudowy gmachu analizy funkcjonalnej, drogi ich zaczęły się rozchodzić. Banach stworzył grono własnych uczniów zajmujących się analizą funkcjonalną i jej zastosowaniami, jak Schauder, Mazur, Orlicz (ostatni był również uczniem Steinhausa), Ulam (który zaczął pracę pod kierunkiem prof. Kuratowskiego)".

W dniach 7–10 września 1927 roku zostaje zorganizowany we Lwowie I Polski Zjazd Matematyczny.

Jak pisze St.Warhaftman w „Mathesis Polskiej":

„Zjazd zgromadził sto kilkadziesiąt osób spośród profesorów szkół wyższych i nauczycieli średnich zakładów naukowych. Poza uczonymi polskimi brali udział w Zjeździe również uczeni zagraniczni. Aksel Andersen (Kopenhaga), Nina Bari (Moskwa), Vaclaw Hlavaty (Praga), Leon Lichtenstein (Lipsk), Mikołaj Łuzin (Moskwa), Dymitr Mienszow (Moskwa), Mojżesz Jacob (Wiedeń), John ven Neumann (Budapeszt), Pierre Segrescu (Bukareszt) i inni.

Obrady Zjazdu odbywały się w sekcjach: 1) logiki matematycznej i podstaw matematyki, 2)algebry i teorii liczb, 3) teorii funkcji zmiennej rzeczywistej, 4) analizy, 5) geometrii, 6) matematyki stosowanej, 7) mechaniki i fizyki matematycznej, 8) astronomii, 9) dydaktyki, historii i filozofii matematyki i wreszcie 10) sekcji o charakterze ogólnym. Największą liczbę prelekcji wygłoszono w sekcjach logiki matematycznej i podstaw matematyki, teorii mnogości i funkcji zmiennej rzeczywistej oraz sekcji analizy. Jeżeli wziąć pod uwagę, że ilość referatów pierwszych dwóch wyżej wymienionych sekcji stanowiła faktycznie 40% ogólnej ich liczby (w programie było przewidziane nawet 50%), należy stwierdzić, że Zjazd był pod wybitnym wpływem dominującego specjalnie na Uniwersytecie Warszawskim, kierunku badań, obejmującego przeważnie zagadnienia teorii mnogości, topologii, logistyki i dziedzin pokrewnych. [...]

W sekcji teorii mnogości i funkcji zmiennej rzeczywistej dominowały ośrodki warszawski i lwowski, które w sensie naukowym można śmiało uważać za jedną dużą szkołę reprezentującą właściwy matematyce polskiej kierunek.

Przewodniczący delegacji warszawskiej jeden z najwybitniejszych matematyków polskich, prof. Wacław Sierpiński zakomunikował swoje *Uwagi o twierdzeniu Jegorowa*. Ponadto wygłosili referaty i odczyty docenci Uniwersytetu Warszawskiego: Kazimierz Kuratowski, Bronisław Knaster, Stanisław Saks, Stefan Straszewski, Alfred Tarski i Antoni Zygmund. Grupę lwowską reprezentowali: prof. Stefan Banach, który wygłosił odczyt *O metodzie majorant Gauchy'ego w teorii funkcjonałów*, oraz referaty *O szeregach funkcyjnych warunkowo zbieżnych* i *Krótki dowód istnienia wartości charakterystycznej jądra symetrycznego*; prof. Stanisław Ruziewicz – referat *O funkcjach spełniających uogólniony warunek Lipchitza*; prof. Hugo Steihaus – odczyt pt. *Zastosowanie operacji funkcyjnych do zagadnień z teorii szeregów ortogonalnych*; prof. Włodzimierz Stożek – referat *O punktach stałych przy ciągłych odwzorowaniach*. Z młodszych sił należy zanotować referaty dr. Stefana Kaczmarza pt. *Warunki zbieżności szeregów ortogonalnych* i Stanisława Mazura *O metodach sumowalności.*"

Banach wygłosił ponadto w sekcji dydaktyki matematycznej referat *O pojęciu granicy*. Udział jego był więc, jak widzimy, największy ze wszystkich zgromadzonych ówczesnych sław matematycznych.

W czasopiśmie „Mathesis Polska" czytamy dalej:

„Jeżeli chodzi o wnioski natury ogólnej, to Zjazd wykazał, że »specjalnością« polskiej myśli matematycznej jest teoria mnogości oraz badania nad podstawami matematyki. Ten dział badań matematycznych cechuje również Polskę poza granicami kraju. Dziesiąty z rzędu tom zakrojonego na europejską skalę czasopisma »Fundamenta Mathematicae« świadczy o tym dobitnie."

Natomiast autor z żalem zauważa, że „piękne dziedziny zastosowań matematyki, a więc przede wszystkim mechanika i cały obszar fizyki matematycznej mają w Polsce, poza nielicznymi wyjątkami, małe zrozumienie wśród młodych zwłaszcza sił naukowych".

W listopadzie 1927 roku Banach ogłasza komunikat *Sur les équelations a' infinité d'inconnus I (á paratre)* (O równaniach z nieskończoną ilością niewiadomych). Jest członkiem Oddziału Lwowskiego Towarzystwa Matematycznego, bardzo aktywnym i twórczym.

W roku akademickim 1928/29 prowadzi wykłady, wspólnie zresztą ze Steinhausem, na temat *Wybrane kwestie fizyki matematycznej*, samodzielnie zaś wykłady z mechaniki analitycznej, teorii funkcjonałów oraz seminarium wyższe.

W rok później wykłada analizę wyższą (wraz z ćwiczeniami), mechanikę ogólną, dynamikę ciała sztywnego oraz prowadzi seminarium matematyczne niższe.

Jak wnioskujemy na podstawie tych wspólnych wykładów, współpraca Banacha ze Steinhausem nie słabnie, ale pogłębia się jeszcze bardziej. Efektem tego jest założenie i wspólne wydanie, począwszy od roku 1929, monumentalnego (jak się później okaże) wydawnictwa periodycznego „Studia Mathematica".

W numerze 7/8 „Mathesis Polska" (wrzesień–październik 1929 roku) znajdujemy wiadomość o utworzeniu we Lwowie tego wydawnictwa matematycznego:

„Pod redakcją profesorów Stefana Banacha i Hugona Steinhausa ukazał się we Lwowie tom I nowego wydawnictwa periodycznego pt. – Studia Mathematica. Wydawnictwo będzie publikowało prace oryginalne z dziedziny matematyki czystej i stosowanej, przy czym redakcja

zamierza zgrupować w swem piśmie badania dotyczące analizy funkcyjnej i dziedzin pokrewnych. [...]
– Studia Mathematica ogłasza prace jedynie w językach francuskim, niemieckim, angielskim lub włoskim. Prace należy kierować na ręce jednego z redaktorów pisma (prof. Stefana Banacha, Lwów, ul. św. Mikołaja 4 lub prof. Hugo Steinhausa, Lwów, ul. Kadecka 14). Cena tomu wynosi zł 12. – za granicą 1.50. Administracja mieści się we Lwowie, ul. św. Mikołaja 4, Uniwersytet".

Warto tutaj dodać o pewnym stylu, jaki charakteryzował Hugona w kontaktach z innymi ludźmi, a który nadawał jego postaci pewien filozoficzny urok, a jego działalności – wymiar głębszy, nie ograniczony li tylko do przekazywania czystej wiedzy. Sądzę, że ma to pewien związek z Banachem, a nie tylko z atmosferą ogólną, w jakiej pracowali matematycy lwowscy. To, co chciałbym zilustrować relacją Andrzeja Turowicza, jest syntezą pragmatyzmu i szczególnego rodzaju poczucia metafizyki dwóch cech niezbędnych, jak sądzę, aby wyjść poza matematyczną przeciętność.

A oto wspomnienia prof. Turowicza:

„Przytoczę tutaj anegdotkę, którą słyszałem przed wojną od profesora Steinhausa w Kawiarni Szkockiej we Lwowie, a o której zresztą on także pisał w swoich wspomnieniach. Profesor Steinhaus spytał mnie: Czy pan wie, jakie jest najważniejsze zagadnienie w ogóle? Powiedziałem, że nie mam pojęcia i wtenczas opowiedział mi to: Pewnego razu na wykładzie Hilbert powiedział, że jeśliby dotknięciem różdżki czarodziejskiej zasnął na 500 lat i obudził się potem, to nie pytałby ani o to, jakie zaszły zmiany dziejowe, jakie były przemiany społeczne, ale zapytałby się, co teraz wiadomo o miejscach zerowych funkcji dzeta Riemanna, bo to jest najważniejsze zagadnienie w ogóle (Hilbert był promotorem pracy doktorskiej Steinhausa).

Profesor Steinhaus miał, choć może to trochę pretensjonalne co powiem, pewną wspólną z Sokratesem metodę. Lubił mianowicie doprowadzać ludzi do głębszego zrozumienia zagadnienia, zadając im pytania. I tymi pytaniami tak ich przypierał do muru, że sami nie wiedzieli, co powiedzieć. Chyba w swoich getyńskich wspomnieniach opowiada o wypadku, gdy rozmawiał ze swoją gospodynią i pytał jej, po co się płaci podatki. Ona na to: – No płaci się podatki po to, żeby wojsko utrzymać. – Ale na co wojsko? – No, żeby bić Francuzów. – A po co? Tego już nie wiedziała. Był to sposób, bardzo często przez niego stosowany.

Profesor Steinhaus lubił uczyć młodych ludzi porządku i dokładności w pracy. Opowiem, co słyszałem od profesora Mazura, który będąc jeszcze studentem napisał pierwszą swoją pracę matematyczną i przedstawił ją profesorowi Steinhausowi. Ten miał ją zreferować na posiedzeniu Lwowskiego Towarzystwa Naukowego. Zebranie miało się odbyć wieczorem. Na niewiele godzin przedtem profesor Steinhaus wzywa Mazura i mówi: – Proszę pana, jak ja mogę referować pańską pracę, skoro mi jej pan dotąd nie dostarczył? Mazur zdębiał. – Jak to, przecież wręczyłem panu pracę. – No, dał mi pan cztery arkusze czystego papieru. Tamten przerażony jest jeszcze bardziej, a profesor Steinhaus. – No, niech pan popatrzy. A sprawa wygląda tak: Przed wojną był pewien rodzaj najtańszego papieru tzw. konceptowego, który był trochę żółtawy. Panu Mazurowi skończył się akurat atrament, a nie chciało mu się iść do sklepu i dolał do niego wody. Profesor Steinhaus bierze pracę Mazura i mówi: – No tak, coś tu jest napisane. Ale proszę pana, jeśli pan chce pracować naukowo niech pan pamięta zaopatrzyć się w biały papier i czarny atrament."

Sam Steinhaus wysoko oceniał swą współpracę z Banachem. On, jego odkrywca, pierwszy nauczyciel, ba, nawet opiekun pozostawił sobie rolę skromnego obserwatora z zewnątrz, a przecież to od niego wyszły inicjatywy: powstanie Towarzystwa Matematycznego w Krakowie i czasopisma „Studia Mathematica", wspólne wykłady, wspólne odkrycia. Jego psychika skonstruowana była w jakiś wspaniały sposób: nie zazdrościł, bezinteresownie pomagał, był skromny. Był idealnym człowiekiem do współpracy niemal z każdym. Steinhaus skromnie ocenia swoją rolę w życiu Banacha. Pisze w swojej autobiografii:

„W roku 1927 współpraca z Banachem dała *Sur le principe de la condensation des singularités* (Fund. Math.9), czyli – zasadę zagęszczania osobliwości, którą swego czasu wypowiedział Henkel jako wskazówkę heurystyczną. Już przy redagowaniu pracy pomógł nam S. Saks, który potem pogłębił ją, wprowadzając do niej koncepcję kategorii, tak że stała się istotną pozycją polskiego dorobku międzywojennego w zakresie operacji funkcyjnych. [...]

Często wyżej cytowane – Studia Mathematica założyliśmy z Banachem w roku 1928. Pierwszy tom wyszedł w 1929 roku we Lwowie – obecnie to czasopismo doszło do XIX tomu. Było ono poświęcone operacjom funkcyjnym i można je uważać za organ tzw. szkoły lwowskiej. Do wojny drukowano w – Studiach prace w językach francuskim, niemieckim, angielskim i włoskim – potem język rosyjski wszedł na miejsce włoskiego".

W pierwszym tomie „Studia Mathematica" Stefan Banach zamieszcza dwie prace pod tym samym tytułem *Sur les fonctionnelles lineaires* (O funkcjonałach liniowych). Prace te zawierają niezwykle ważne wyniki. Pierwsza z nich zawiera dowód podstawowego w analizie funkcjonalnej twierdzenia, o rozszerzeniu funkcjonału liniowego oraz pewne jego proste konsekwencje. Obecnie twierdzenie to nazywa się twierdzeniem Hahna–Banacha. Matematyk niemiecki Hans Hahn udowodnił je wcześniej, bo w 1922 roku, o czym Stefan Banach, który niezbyt pilnie śledził literaturę, nie wiedział. Praca druga, to cała seria twierdzeń i pojęć ważnych dla analizy funkcjonalnej. Między innymi jest w niej twierdzenie o słabej, ciągowej zwartości kuli w przestrzeni sprzężonej, twierdzenie o tym, że zbiór, na którym każdy funkcjał liniowy ciągły jest ograniczony, sam musi być ograniczony. Banach wprowadza w niej pojęcie operatora sprzężonego i podaje jego podstawowe własności, skąd wyprowadza piękne twierdzenie o równaniu liniowym, które jest już bardzo bliskie twierdzeniu o wykresie domkniętym. To ostatnie twierdzenie jest trzecim filarem analizy funkcjonalnej i zostanie udowodnione przez Stefana Banacha wkrótce potem.

Powstają w tym czasie dalsze prace Banacha. Jak powstawały, w jakiej atmosferze się rodziły, jakie okoliczności temu towarzyszyły – to wszystko znajdzie Czytelnik w rozdziale *Kawiarnia Szkocka*. Tymczasem zajmijmy się przez chwilę pracami, nad którymi Banach „siedział" w tym okresie. I tu na uwagę zasługuje fakt, że coraz częściej opracowuje swe rozwiązania wspólnie z innymi matematykami.

Następnie pisze (wspólnie z Kuratowskim) *Sur une géneralisation du probleme de la mesure* (O pewnym uogólnieniu problemu miary). Praca ta zawiera bardzo ważny wynik z teorii mnogości: przy założeniu hipotezy continuum niemożliwe jest zdefiniowanie miary każdego podzbioru na prostej tak ,by miara zbioru jednopunktowego była zawsze równa zeru oraz by miara była przeliczalnie addytywna. Twierdzenie to i metody użyte przez Banacha w dowodzie wykorzystywane są często i obecnie, a z pracy tej wyrosło wiele innych, ważnych prac.

Potem – znów ze Stanisławem Saksem – *Sur la convergence forte dans le champ Lp* (O zbieżności silnej w polu Lp). Praca odnosi się do teorii sumowalności w abstrakcyjnych przestrzeniach. Pochodzi z niej nazwa pewnej klasy przestrzeni, którą obecnie bada się intensywnie, a mianowicie przestrzeni z własnością Banacha–Saksa. Również i ta praca stała się zaczątkiem wielu innych prac, zwłaszcza w ostatnich latach.

W pewnej mierze właśnie dzięki Steinhausowi, Banach, obok dużej, ożywionej działalności dydaktycznej, rozwija wielką działalność naukowo–badawczą. Zbliża się do ludzi z kręgów lwowsko–warszawskiej szkoły filozoficznej – oczywiście na zasadach towarzyskich. Zapoczątkowała to zbliżenie współpraca z Kazimierzem Kuratowskim. Tu wspomnieć trzeba, że lwowsko–warszawska szkoła filozoficzna, grupująca głównie logików i filozofów, powstała we Lwowie jeszcze przed I wojną światową, dzięki ludziom zbliżonym do wybitnego filozofa Kazimierza Twardowskiego. W późniejszych latach szczyciła się wieloma wybitnymi uczonymi tej miary co Jan Łukasiewicz, Tadeusz Kotarbiński, Tadeusz Hipolit Czeżewski, Kazimierz Ajdukiewicz i inni. Ludzi określonych mianem przedstawicieli polskiej szkoły filozoficznej cechował programowy antyirracjonalizm, niechęć do spekulacji filozoficznych, dążność do precyzji w wyrażaniu myśli, do posługiwania się ścisłym i jasnym językiem, tendencje do szerokiego korzystania z osiągnięć logiki matematycznej i metod analizy semantycznej w badaniach filozoficznych.

Szkoła lwowsko–warszawska, z której przedstawicielami Banach miał luźne, aczkolwiek kontakty, miała znaczne osiągnięcia w badaniach logicznych i semantycznych; wywarła duży wpływ na rozwój logiki matematycznej i pośrednio na powstanie polskiej szkoły logiki matematycznej, z której wybitnym przedstawicielem Leonem Chwistkiem Banach żył w wielkiej przyjaźni.

Banach zawsze z podziwem wyrażał się o pracach Chwistka, a gdy swego czasu Chwistek starał się o katedrę logiki we Lwowie, która to sprawa bulwersowała wówczas pół Polski (Chwistek był wybitnym uczonym, ale bardzo ekscentrycznym artystą i dziwakiem, co ludzi o raczej wąskich horyzontach myślowych trochę przerażało) – Banach wyraźnie się za nim opowiedział i pomógł mu w zdobyciu katedry.

Poza kontaktami z grupą filozofów i logików oraz oprócz udziału w trwających czasem dzień i noc dyskusjach matematycznych, Banach uczestniczył również w licznych międzynarodowych kongresach. Na przykład w dniach 3–10 września 1928 roku, był obecny na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Bolonii. Kongres zgromadził ponad 800 matematyków z 40 krajów, w tym liczną grupę Polaków. W prezydium Kongresu zasiadał profesor Wacław Sierpiński, a oprócz Banacha udział w nim wzięli: Antoni Zygmund, Hugo Steinhaus, Otto Marcin Nikodym, Franciszek Leja, Leon Chwistek, Kazimierz Kuratowski i inni.

Na Kongresie tym przedstawiciele krajów słowiańskich postanowili zwołać Kongres Matematyków Krajów Słowiańskich w Warszawie, a wykonanie tej decyzji powierzono Komitetowi Wykonawczemu, w skład którego weszli wybitni uczeni z różnych krajów. W wyniku ich działania, jesienią 1929 roku, odbył się w Warszawie Kongres Matematyków Krajów Słowiańskich. Zainaugurowany uroczyście 23 września zgromadził około 200 osób. W auli Politechniki Warszawskiej, obradowało pięć sekcji. I. Podstaw matematyki, historii dydaktyki matematyki; II. Arytmetyki, algebry, analizy; III. Teorii mnogości, topologii i ich zastosowania; IV. Geometrii; V. Mechaniki i matematyki stosowanej. Wyrazem zainteresowania władz polskich były zorganizowane przyjęcia oficjalne. Premier Kazimierz Świtalski oraz minister Czerwiński podejmowali członków Kongresu w pięknych salonach Prezydium Rady Ministrów, władze miejskie zaś urządziły przyjęcie w salonach Rady Miejskiej. Poza tym – jak podawała prasa – odbyło się przedstawienie w Operze oraz bankiet w restauracji Oaza.

W Kronice Uniwersytetu Jana Kazimierza zachowała się lista zaproszonych i przybyłych gości.

„Kongres Matematyków Krajów Słowiańskich odbył się pod honorowym protektoratem Pana Prezydenta Rzeczpospolitej, a pod prezydencją prof. dr. Wacława Sierpińskiego w Warszawie w dniach 23–27 września 1929 roku. Na kongres przybyli przedstawiciele Bułgarii, Czechosłowacji i Jugosławii, poza tym byli przedstawiciele emigracji rosyjskiej. Gości z ZSRR nie było, gdyż rząd sowiecki stanął na stanowisku, że obywatele ZSRR nie mogą brać udziału w zjazdach regionalnych, opartych na zasadzie narodowej, a nie międzynarodowej. Z krajów niesłowiańskich przybyli goście z Rumunii, Rzeszy Niemieckiej, Austrii, Holandii i Japonii. Z Anglii przybył na zaproszenie Kongresu W. Young, prezes Międzynarodowej Unii Matematycznej".

Spotkania z tyloma znakomitymi uczonymi, udział w zjazdach międzynarodowych, kontakt, i to bardzo ścisły, z osiągnięciami matematyki światowej, stanowiły dla Banacha niewątpliwy bodziec i impuls.

Powstają kolejne prace, w tym, co bardzo ważne, kilka opracowanych ze Stanisławem Mazurem, przyjacielem Banacha. Warto dodać, że tak jak Ruziewicz tłumaczył prace Banacha na francuski, tak Mazur – na niemiecki, którym władał znakomicie.

Są to: *Über einiger Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reichen* (O pewnych własnościach lakunarnych szeregów trygonometrycznych) oraz *Bemerkung zur Arbeit „Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen)* (Uwaga do pracy „O pewnych własnościach lakunarnych szeregów trygonometrycznych"). W tych pracach Banach zastosował metody analizy funkcjonalnej do rozwijanych wówczas intensywnie zagadnień z teorii szeregów trygonometrycznych. Na uwagę zasługuje fakt, że wyniki uzyskał za pomocą bardzo ogólnych rozważań.

„Pod redakcją prof. S. Banacha (Lwów), doc. B. Knastera (Warszawa), prof. K. Kuratowskiego (Warszawa), prof. S. Mazurkiewicza (Warszawa), prof. W. Sierpińskiego (Warszawa) oraz prof. H.Steinhausa (Lwów) zaczęła się ukazywać nowa wersja Monografii Matematycznych w językach obcych. Tom I stanowi dzieło prof. Stefana Banacha *Théorie des opérations linéaires*, tom II będzie zawierał pracę doc. S. Saksa i niebawem ukaże się w druku. Monografie Matematyczne ukazują się z subwencji Funduszu Kultury Narodowej".

Teoria operacji liniowych Banacha spotykała się z szerokim oddźwiękiem w świecie. Między innymi jako jedni z pierwszych zareagowali Amerykanie.

W Biuletynie Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego J. D. Tamarkin, omawiając dorobek twórczy Banacha, stawia go w jednym szeregu z Volterrą, Fredholmem, Hilbertem, Hadamarem, Freuchetem i Rieszem, czyli z matematykami najwyższej miary, zasłużonymi dla rozwoju nauki w sposób nie dający się przecenić. Tamarkin stwierdził, że sformułowana przez Banacha *Teoria operacji liniowych* jest sama w sobie fascynującą dziedziną, ale jej ważność podkreślają jeszcze liczne i piękne zastosowania".

W roku 1932 Polskie Towarzystwo Matematyczne powierza Banachowi stanowisko wiceprezesa. Banach bez wahania bierze na siebie te nowe obowiązki, które z uwagi na rangę i znaczenie instytucji były niemałe. Władysław Ślebodziński tak opisuje działalność tego niezmiernie zasłużonego towarzystwa:

„Na posiedzeniach oddziałów PTM, które są stale najważniejszą formą działalności Towarzystwa, referowano głównie wyniki własne, rzadziej sprawozdania z literatury, z podróży naukowych i zjazdów. Oddziały często wymieniały swych referentów; referantami bywali również matematycy zagraniczni, przyjeżdżający do Polski dla nawiązania łączności z matematykami polskimi".

Niezależnie od coraz intensywniejszej pracy twórczej trwa działalność dydaktyczna Banacha na Uniwersytecie Jana Kazimierza i na Politechnice. Nie sądzę, by warto było nudzić Czytelnika podając spis wykładów i zwykłych zajęć dydaktycznych, ale uważam, że interesujące będzie podanie kilku przykładów. W Programie Politechniki Lwowskiej na rok 1929/30 Banach figuruje wielokrotnie. Wykłada na Wydziale Inżynierii Lądowej i Wodnej mechanikę dla geodetów – 3 godz. tygodniowo w półroczu zimowym i 2 godz. w półroczu letnim, a także kinetykę, dynamikę punktu i systemu punktów materialnych, teorię potencjału newtonowskiego (charakterystyczne własności potencjału, a twierdzenie Stokesa, potencjał elipsoidy) oraz teorię ruchu Ziemi dookoła Słońca. Na Wydziale Ogólnym wykłada mechanikę teoretyczną – 4 godz. tygodniowo i prowadzi ćwiczenia – 2 godz. tygodniowo w obu półroczach, dla III i IV roku studiów.

W roku 1930/31 Banach wykłada oprócz wymienionych przedmiotów również teorię funkcjałów i zastosowania – 3 godz. tygodniowo w obu semestrach. Na Wydziale Inżynierii Lądowej – w roku 1931/32 – mechanikę dla geodetów, na Wydziale Ogólnym zaś mechanikę teoretyczną (kinematykę, dynamikę punktu i układu punktów, zasady mechaniki, tzn. zasadę d'Alemberta, zasady wariacyjne, dynamikę ciała sztywnego, równania Fulera). Rachunek wariacyjny – 3 godz. tygodniowo; najprostsze zagadnienia rachunku wariacyjnego, warunki i dostateczne ekstremum, teorię Weierstrassa, ekstremum absolutne, ekstrema całek podwójnych.

W roku 1932/33 wykłada na Wydziale Inżynierii Lądowej mechanikę dla geodetów, na Wydziale Ogólnym zaś – mechanikę teoretyczną. Dalej: teorię funkcji wielu zmiennych rzeczywistych – 3 godz. tygodniowo. W programie tym mieściły się: miara i całka Lebesgue'a, funkcje o wahaniu ograniczonym, miara pola, zastosowanie do różnych działów matematyki.

W roku 1933/34 na Wydziale Inżynierii Lądowej i Wodnej wykłada to samo, co poprzednio. Na Wydziale Ogólnym – mechanikę teoretyczną i teorię operacji – 3 godz. tygodniowo. Przestrzenie metryczne, wektorialne, funkcjonały i operacje liniowe. Wariacja. Zastosowanie do analizy równań różniczkowych i całkowych.

W roku 1934/35 nie ma Banacha na liście wykładowców Politechniki Lwowskiej; zamiast niego prowadzi Nikliborc na Wydziale Inżynierii Lądowej i Wodnej, wykład mechaniki ogólnej dla geodetów. Ulega likwidacji Wydział Ogólny. Było to wynikiem tzw. reform jędrzejewiczowskich (od nazwiska ministra odpowiedzialnego za ten fakt: Wydział Ogólny utworzony przez premiera Bartla został z niezbyt jasnych powodów zlikwidowany przez ministra Janusza Jędrzejewicza).

A oto tytuły prac wydanych w latach 1932–1936.

W roku 1932 ukazała się praca *Sur les transformations biunivoques* (O przekształceniach wzajemnie jednoznacznych).

Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen (Uwaga o zbiorach punktów ciągów operacji liniowych). Praca ta, napisana ze Stanisławem Mazurem, a wydana w roku 1933, stoi trochę na uboczu głównych kierunków analizy funkcjonalnej.

Następna praca, tym razem pisana z Kazimierzem Kuratowskim, *Sur la structure des ensambles linéaires* (O strukturze zbiorów liniowych), również rok 1933, znajduje się na pograniczu topologii i analizy funkcjonalnej.

I znów dwie prace pisane z Mazurem: *Zur Theorie der linearen Dimension* (Przyczynek do teorii wymiaru liniowego) *i Sur la dimension linéaire des espaces fonctionnels* (O wymiarze liniowym przestrzeni funkcyjnych), obie z roku 1933. Prace te zawierają nowe wyniki dotyczące pojęcia wymiaru liniowego wprowadzonego w podstawowej monografii.

W tym samym roku ukazują się dwie samodzielne prace Banacha: *Sur les séries lacunaires* (O szeregach lakunarnych) oraz *Sur la mesure de Haar* (O mierze Haara) stanowiąca dodatek do książki Stanisława Saksa *Théorie de l'intégrale* (Teoria całki). Jest to nowe podejście do bardziej ważnej w matematyce współczesnej tzw. miary Haara; podejście poprzez aparat analizy funkcjonalnej sprawia, że wprowadzenie tego pojęcia staje się bardziej zwięzłe i eleganckie.

Rok 1934, Banach wspólnie z Mazurem wydaje *Über mehrdeutige stetige Abbildungen* (O wielowartościowych odwzorowaniach ciągłych). Praca dosyć znacząca w topologii metrycznych przestrzeni.

Rok 1935: *Sur un théoréme de M. Sierpiński* (O pewnym twierdzeniu Sierpińskiego).

Rok 1936: Banach jest już autorem 47 prac (nie licząc nieopublikowanych i tych, nad którymi właśnie pracuje).

Zainteresowanie świata matematycznego wynikami naukowymi Banacha sięga zenitu. W roku 1936 na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Oslo Banachowi powierzono jeden z odczytów plenarnych – *Die Theorie der Operationen und ihre Bedeutung für die Analysis* (Teoria operacji i jej znaczenie w analizie), co było niewątpliwie wyrazem szczególnego wyróżnienia i zainteresowania jego osobą i dziełem.

Na temat tego Kongresu zachowało się bardzo ciekawe sprawozdanie pióra wybitnego matematyka, późniejszego profesora uniwersytetu w Chicago, Antoniego Zygmunda),,Mathesis Polska" z 1938 roku):

,,Kongres w Oslo nie był tak liczny jak poprzednie. Wzięło w nim udział około 500 uczestników (w Bolonii było 1200, w Zurychu 700). Jest to dość zrozumiałe, gdyż istniejące obecnie w wielu państwach, ograniczenia walutowe utrudniają branie udziału w kongresach. Nie obyło się też bez przyczyn politycznych. Włosi zupełnie nie wzięli udziału w zjeździe, motywując swoją odmowę sankcjami. Nie przyjechali też Rosjanie, którzy początkowo zgłosili swój udział. W ostatniej chwili zatrzymały ich w kraju sprawy związane z reorganizacją matematyki sowieckiej. Nie dopisali wreszcie Niemcy, zazwyczaj chętnie i licznie uczestniczący w zjazdach. Przybyło ich z Rzeszy około 20 osób. Podobno mała liczba uczestników z Niemiec miała być odpowiedzią na nie wysłanie przez uniwersytet w Oslo delegacji na tegoroczne uroczystości jubileuszowe uniwersytetu w Heidelbergu.

[...] Najliczniejsi na zjeździe byli Amerykanie, których przybyło około 70 osób. Z Polski przyjechali (z Warszawy) doc. dr Borsuk, dr Eilenberg, dr H. Grużewska, dr Lubelski, prof. dr Sierpiński, prof. dr Straszewicz, doc. dr Zarankiewicz; (ze Lwowa) prof. dr S. Banach, doc. dr Kaczmarz, doc. dr Schauder, prof. dr Żyliński; (z Krakowa) doc. dr Gołąb, prof. dr Ważewski, doc. dr Zaremba; (z Wilna) prof. dr Zygmund. Prawie wszyscy uczestnicy polscy zgłosili referaty".

Pomimo mniejszej niż zwykle liczby uczestników kongres był niewątpliwie udany, a to zarówno ze względu na bardzo dobrą organizację, jak i omawiane tematy.

„Jest to już zwyczajem – wspomina prof. Zygmund – że odczyty na kongresach matematycznych są dwóch rodzajów: ogólne i sekcyjne. Odczytów ogólnych jest zawsze ilość ograniczona. Odbywały się one w godzinach przedpołudniowych i każdy z nich trwał około godziny. Odczyty takie są powierzane przez organizatorów wybitnym matematykom, którzy referują ogólniejsze tematy najczęściej z własnymi wynikami. Zaproszenie do wygłoszenia odczytu ogólnego uważa się zawsze za duże wyróżnienie. Z Polski odczyt taki wygłosił prof. Banach".

Odczyty sekcyjne, których zgłoszono przeszło 200, nosiły inny charakter. Trwały na ogół 15 minut każdy i odbywały się w 8 sekcjach poświęconych różnym działom matematyki. Sekcje te obradowały jednocześnie tak, że obecność na wszystkich chociażby ciekawszych referatach była zupełną niemożliwością.

Rok 1937 – Banach ogłasza pracę *The Lebesgue integral in abstract spaces* (Całka Lebesgue'a w abstrakcyjnych przestrzeniach), przypis do wspomnianej już książki Saksa *Theory of the Integral*. Jest to niestandardowe podejście do teorii całki, zawierające wiele oryginalnych ujęć. Jednak idea ta pojawiła się już wcześniej – po raz pierwszy u matematyka amerykańskiego P.J. Daniella i jemu przypisuje się to podejście.

Rok 1938. Banach wydaje *Über homogene Polynome in (L^2)* (O jednorodnych wielomianach w L^2). Jest to wkład do nowego działu analizy funkcjonalnej, tzw. operacji wielomianowych. Dział ten powstał i rozrósł się głównie dzięki pracom Mazura i Orlicza (w ostatnim dziesięcioleciu prace zagranicznych matematyków sprawiły, że dział ten przeżywa swój renesans).

W ostatnim przed II wojną światową roku akademickim, Banach opublikował tylko jedną pracę *Über das „Loi suprème" von Hoene–Wroński* (O „Prawie najwyższym" Hoene–Wrońskiego) i rozpoczął pracę nad *Sur la divergence des séries orthogonales* (O rozbieżności szeregów ortogonalnych) – był to przyczynek do teorii szeregów ortogonalnych – oraz nad *Sur la divergence des interpolations* (O rozbieżności interpolacji), pracę zawierającą dużo ciekawych obserwacji z teorii aproksymacji.

Dużą popularnością i uznaniem cieszył się podręcznik Banacha *Mechanika w zakresie szkół akademickich* w dwóch częściach. Po wojnie w 1951 roku podręcznik ten został przetłumaczony na język angielski, jako 34 tom Monografii Matematycznych.

Najlepsze lata Banacha, lata sławy i międzynarodowego uznania, przypadły niestety na lata politycznych burz, naporu faszyzmu, zaostrzających się starć politycznych, napięć społecznych i międzynarodowych.

W kwietniu 1939 roku Banach został wybrany prezesem Polskiego Towarzystwa Matematycznego (którego uprzednio – w latach 1932–35 – był wiceprezesem). Było to jakby uwieńczeniem jego działalności społecznej. Polskie Towarzystwo Matematyczne, o którym była mowa już nieraz, działało intensywnie i owocnie nie tylko na terenie Polski. Za jego pośrednictwem, kontakt z polską matematyką utrzymywało wielu bardzo wybitnych matematyków świata: Paweł Aleksandrow, Emil Borel, Elie Cartan, Rene Maurice Fréchet, Harold Hardy, Leonid Kantorowicz, Henry Lebesgu'e, Solomon Lefschetz, Tulio Levi–Civita, Nikołaj Łuzin, Karl Menger, Paul Montel, Frigyes Riesz, Iwan Winogradow, Ernst Zermelo i wielu innych.

Następne prace to: *Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen* (O operacjach przedstawianych analitycznie w przestrzeniach abstrakcyjnych), *Über metrische Gruppen* (O grupach metrycznych) oraz praca *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen* (O Bairowskiej kategorii pewnych zbiorów funkcji), zawierająca niezwykle prosty dowód oparty na metodzie kategorii istnienia funkcji ciągłej, która nie ma pochodnej w żadnym punkcie (prostej–stycznej). Fakt ten, był znany już znacznie wcześniej, ale uzyskano go drogą dosyć skomplikowanych konstrukcji. Napisana wspólnie z Hermanem Auerbachem praca *Über die Höldersch Bedingung* (O warunku Höldera) nieznacznie uogólnia wyniki poprzedniej pracy.

Banach staje się wkrótce największym autorytetem w analizie funkcjonalnej, którą współtworzył i współbudował. Zaczyna się coraz głośniej mówić o lwowskiej szkole matematycznej, a Banacha obdarza się mianem niewątpliwego jej inspiratora i przywódcy. Jest on zapraszany do wygłaszania coraz to nowych wykładów, odczytów, wybierany na członka wielu towarzystw naukowych. Wiosną 1930 roku otrzymuje nagrodę naukową miasta Lwowa. Nagroda ta, imienia Benedykta Dybowskiego, przyznawana była w dziedzinie matematyczno–przyrodniczej.

Zorganizowany w następnym roku drugi Zjazd Matematyków Polskich wykazał wielką siłę polskiej szkoły matematycznej. Odbył się on w Auli Kolumnowej Uniwersytetu Stefana Batorego w Wilnie, w dniach 23–26 września 1931 roku, a wygłoszono na nim 47 referatów oraz 6 odczytów ogólnych. Z odczytem ogólnym *Zagadnienia przestrzeni wektorialnej* wystąpił Stefan Banach.

W roku 1931 ukazuje się drukiem najwybitniejsze dzieło Banacha *Teorja operacyj. Tom I. Operacje liniowe* nakładem Kasy im. Mianowskiego. W wydaniu polskim znajduje się dedykacja „Dzieło to poświęcam mojej żonie", w wydaniu francuskim – „A Madame Lucie Banach". Zdaniem historyków matematyki dzieło to w decydującym stopniu przyczyniło się do spopularyzowania osiągnięć Banacha wśród ogółu matematyków światowych i do rozwoju analizy funkcjonalnej, której był twórcą. Na czym polega doniosłość *Teorii operacji*? Banach zawarł w niej zarówno wiele dotychczasowych prac z analizy funkcjonalnej, jak i wiele, bardzo wiele nowych twierdzeń i zastosowań. Teoria, która wyłania się z tej pracy, jest bardzo elegancka, wręcz zaskakuje możliwością zastosowań. Stała się rewelacją w skali światowej i przez wiele lat matematycy na całym świecie uczyli się z niej analizy funkcjonalnej. Do dziś dzieło to zawiera wiele interesującego materiału, który nie został pochłonięty przez bardziej nowoczesne prace. Z poszczególnych jego rozdziałów wyrosły całe obszerne działy analizy funkcjonalnej. Powstały również nowe działy, w książce tej jeszcze nie poruszone. Można śmiało powiedzieć, że dzieło to otworzyło matematykom bramy prowadzące do nowej, obszernej i niezwykle atrakcyjnej krainy. W języku francuskim *Théorie des opérations linéaires* ukazała się w roku 1932 jako I tom seryjnego wydawnictwa Monografie Matematyczne.

A oto, co na temat dzieła Banacha pisała „Mathesis Polska" (styczeń–luty 1933):

„Pod redakcją prof. S. Banacha (Lwów), doc. B. Knastera.

Trzy zjazdy PTM (trzeci w roku 1937 był połączony z jubileuszem prof. Samuela Dicksteina) ujawniły prawdziwą erupcję matematycznych talentów w Polsce i należały do najbardziej owocnych w świecie. Jako przegląd dorobku matematyki polskiej oraz forum dyskusji, zgłaszania postulatów i potrzeb wychodzących często poza samą dziedzinę matematyki, – były nie do przecenienia.

Polskie Towarzystwo Matematyczne miało też szczególne zasługi na polu wydawniczym. Jeden z budowniczych polskiej szkoły matematycznej (zmarły w roku 1980 Kazimierz Kuratowski) tak ocenia tę działalność:

„Do szczególnie ważnych wydarzeń dla matematyki polskiej zaliczyć należy powołanie do życia w 1931 roku „Monografii Matematycznych". Fakt ten oznaczał nowy etap w rozwoju Polskiej Szkoły Matematycznej. Etap wcześniejszy, który można nazwać pionierskim, charakteryzował się produkcją niemal wyłącznie krótkich publikacji, zawierających nowe wyniki (drukowane przede wszystkim w „Fundamentach i Studiach"). Nadszedł jednak czas na syntezę osiągnięć polskich matematyków bądź na syntezę całych dyscyplin matematycznych, do których Polacy wnieśli szczególnie duży wkład. Wstępny plan przewidywał wydanie monografii obejmujących analizę funkcjonalną (I tom – *Opérations linéaires* Banacha), teorię całki (II tom – *Théorie de l'integrale* Saksa), topologię (III tom – autora niniejszego opracowania), hipotezę continuum (IV tom – Sierpińskiego), teorię szeregów trygonometrycznych (V tom – Steinhausa i Kaczmarza). W krótkim czasie „Monografie Matematyczne" zdobyły sobie pozycję wśród najpoważniejszych seryjnych wydawnictw naukowych".

Wśród licznych zaszczytów, jakie w roku wybuchu II wojny spotkały Banacha, na uwagę zasługuje jeszcze jeden. Dnia 9 czerwca 1939 roku Walne Zgromadzenie Polskiej Akademii Umiejętności z funduszu im. Janiny z Ryczterów Mościckiej przyznało – po raz pierwszy nagrodę za dzieło z dziedziny matematyki i astronomii Stefanowi Banachowi za pracę *Sur les fonctionnelles linéaires* (O funkcjonałach liniowych). Nagroda ta w wysokości 20 000 zł była najwyższą nagrodą przyznawaną w Polsce (jakkolwiek by rozumieć to wyrażenie). Pieniądze wpłacono na konto, ale niestety Banach nie zdążył ich odebrać: z powodu wybuchu wojny nastąpiła blokada konta. Oficjalnie wręczenie nagrody miało nastąpić podczas nowego roku akademickiego, niestety wojna uniemożliwiła jakiekolwiek uroczystości.

W ten sposób informacją o wybraniu Stefana Banacha prezesem Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz o uhonorowaniu go nagrodą Polskiej Akademii Umiejętności można zamknąć ten pobieżny, chronologiczny przegląd ważnych, z tych czy innych względów, wydarzeń w międzywojennym okresie życia Banacha.

Pozostaje jednak pytanie, jakie były warunki i przesłanki tych twórczych dokonań, atmosfera panująca w tym okresie, ta atmosfera, która umożliwiła wytężoną, tak owocną i tak aktywną pracę. I tu już zaczyna się historia Kawiarni Szkockiej we Lwowie. Była to chyba najbardziej zdumiewająca kawiarnia świata. Miejsce zwariowane, a zarazem święte. Ale o tym w następnym rozdziale.