W oczach przyjaciół i następców

„Matematykiem jest, kto umie znajdować analogie między twierdzeniami, lepszym, kto widzi analogie dowodów i jeszcze lepszym, kto dostrzega analogie teorii, a można wyobrazić sobie i takiego, co między analogiami widzi analogie" – powiedział Stefan Banach w czasie jednego z przemówień.

Dowodów na rolę i znaczenie twórczości Stefana Banacha nie trzeba chyba przedstawiać. Jego udział i wkład w rozwój matematyki jest przeogromny i nie do przecenienia. Warto jednak – sądzę – zapoznać się z wypowiedziami niektórych matematyków, dotyczącymi osoby i dzieła naszego rodaka. Wypowiedzi te pochodzą z przemówień wygłoszonych na międzynarodowej Konferencji Funkcjonalnej zorganizowanej w 15 rocznicę śmierci Stefana Banacha w 1960 roku przez Instytut Matematyczny PAN. Oddaję głos uczonym:

„Odkrywca" Banacha, **Hugo Steinhaus**, tak pisał o podejściu Banacha do matematyki*:

„Nie lubował się w dociekaniach logicznych, choć rozumiał je doskonale; nie pociągały go także praktyczne zastosowania matematyki, choć z pewnością mógłby się nimi zająć, gdyby chciał – przecież już w rok po doktoracie wykładał mechanikę na Politechnice. Mawiał, że matematyka legitymuje się specyficznym pięknem i nie da się

* *Cytat ten, podobnie jak inne fragmenty wypowiedzi uczonych w tym rozdziale, zaczerpnięty został z „Wiadomości Matematycznych", 1961, seria III, tom IV 3.*

nigdy sprowadzić do sztywnego systemu dedukcyjnego, gdyż prędzej czy później rozsadza każdą ramę formalną i tworzy nowe pryncypia. Decydująca była dla niego wartość teorii matematycznych, ale ich wartość swoista, a nie utylitarna, jego współzawodnicy zagraniczni w teorii operacji liniowych traktowali zbyt ogólnie przestrzenie, wskutek czego uzyskiwali tylko banalne rezultaty, albo też zakładali zbyt wiele o tych przestrzeniach, co zwężało zakres zastosowań do nielicznych i sztucznych przykładów – geniusz Banacha objawiał się w znalezieniu złotego środka. Ta umiejętność trafiania w sedno legitymuje Banacha jako rasowego matematyka".

Wybitny matematyk radziecki **Sergiej Sobolew:**

„Ten znakomity i poważny matematyk, jeden z twórców analizy funkcjonalnej, najważniejszego współczesnego kierunku w matematyce, swoimi licznymi pracami, stworzeniem własnej szkoły matematycznej, której uczniów i kontynuatorów znaleźć można na całej kuli ziemskiej, pozostawił ludzkości szereg doniosłych wyników, wspaniałych osiągnięć ludzkiego geniuszu.

Pierwsza połowa wieku XX była epoką niezwykłych odkryć w dziedzinie fizyki i matematyki. W wyniku rewolucji w fizyce, wywołanej odkryciem teorii względności i teorii kwantów, zmieniło się zupełnie oblicze współczesnej nauki, zmienił się sam światopogląd uczonych. Zniknęły klasyczne wyobrażenia o przestrzeni w czasie, o wielkościach fizycznych. We współczesnym ujęciu, wielkości fizyczne to operatory – pojęcie nieznane w wieku XIX. Cały zespół idei współczesnej fizyki, zespół jej podstawowych pojęć powstał dzięki osiągnięciom nowej matematyki. Rewolucja w matematyce, niemniej ważna i przygotowująca grunt dla nowej fizyki, przebiegała równolegle z rewolucją w fizyce, a nawet trochę ją wyprzedzała.

Tu nie zostały odrzucone stare pojęcia ani obalone poprzednie poglądy. Nie byłoby to zgodne z charakterem matematyki.

Ale tu, tak jak w dziedzinie fizyki, nieoczekiwanie nastąpiło odkrycie nowego, niezmierzonego świata, nowego wszechświata, gdzie poprzednie wyniki matematyczne ukazały się w odmiennym świetle.

Obecnie nie pozostała dosłownie ani jedna gałąź matematyki, gdzie nie odczuwałoby się wpływu idei analizy funkcjonalnej uosabiającej gorące tchnienie współczesności.

U kolebki analizy funkcjonalnej, wśród wyróżniających się jej twórców, stał wielki polski uczony, Stefan Banach. (...) chciałbym w kilku zdaniach scharakteryzować najważniejsze z tego, czego dokonał w nauce Stefan Banach, zatrzymać się nad znaczeniem jego prac dla rozwoju analizy klasycznej, metod numerycznych, teorii równań o pochodnych cząstkowych, równań całkowych i pokrewnych dziedzin.

Przede wszystkim należy oczywiście wymienić ogólną teorię przestrzeni unormowanych zupełnych, zwanych dziś przestrzeniami Banacha. Teoria ta zawiera wiele opracowanych przez niego, zgoła pierwszorzędnych zagadnień, jak twierdzenie o przedłużeniu funkcjonału liniowego, twierdzenie o ograniczoności operatora odwrotnego, twierdzenie o słabej zbieżności operatorów, twierdzenie o możliwości zanurzenia przestrzeni ośrodkowej w przestrzeni C i jeszcze wiele innych.

Współczesne prace w dziedzinie metod numerycznych to już nie zbiór recept na rozwiązanie tych lub innych zagadnień praktycznych, jak to było przed Banachem. Zmienił się w nich sam przedmiot badań. Teraz jest to zawsze badanie konkretnych metod zbudowania sieci w zbiorach zwartych należących do przestrzeni Banacha. Dzięki tym ogólnym ideom został określony cel i kierunek prac tej dziedziny nauki, stały się jasne jej główne problemy i ogólne metody. Bez przestrzeni Banacha nie mogłyby istnieć współczesne metody numeryczne.

Nie ma także współczesnych prac z teorii równań cząstkowych, gdzie by u samej podstawy nie leżało pojęcie rozwiązania jako elementu pewnej funkcyjnej przestrzeni Banacha.

Te nowe poglądy zostały zapoczątkowane jeszcze za życia Stefana Banacha przez jego najbliższych przyjaciół i uczniów.

Klasyczne pojęcia istnienia i jednoznaczności rozwiązania były później niezwykle ważnym w teorii równań pojęciem poprawności postawienia zagadnienia, tj. ciągłej zależności rozwiązania od warunków brzegowych i innych. Ciągłość ta prawie zawsze da się wyrazić za pomocą terminów przestrzeni Banacha: małym zmianom warunków w sensie normy Banacha odpowiadają małe zmiany rozwiązania w sensie innej normy Banacha.

Wpływ analizy funkcjonalnej nie ogranicza się tylko do postawienia zagadnień i sformułowania podstawowych pojęć. Powtórne zastanawianie się nad treścią istniejących dotąd metod rozwiązywania pewnych zagadnień doprowadziło do rozszerzenia ich zastosowań, a w wielu przypadkach również do stworzenia istotnie nowych metod.

Metody analizy funkcjonalnej w fizyce matematycznej, oparte na teorii przekształceń zbliżających, na teorii odwracalności operatorów i na rozszerzaniu przestrzeni funkcyjnych, stały się niemal powszechne, wypierając klasyczne, często algorytmiczne metody oparte na ideach teorii funkcji.

Teoria operacji liniowych Stefana Banacha, podobnie jak to często bywało z dziełami klasycznymi, stała się własnością szerokiego świata matematycznego. Wprowadzone w niej pojęcia, poszczególne twierdzenia i całe teorie silnie utrwaliły się w świadomości każdego z nas.

Naród polski podarowawszy światu takich ludzi, jak Fryderyk Chopin, Adam Mickiewicz, Maria Skłodowska, którzy na zawsze weszli do historii kultury ogólnoludzkiej, słusznie chlubi się swym godnym synem – Stefanem Banachem, którego imię będzie trwale związane z rozwojem matematyki wieku XX".

Profesor **Stanisław Mazur**, uczeń, współpracownik i przyjaciel Banacha jeszcze z czasów lwowskich:

„Istnienie analizy funkcjonalnej jako samodzielnej dyscypliny matematycznej zawdzięczamy geniuszowi Stefana Banacha. On ukształtował jej podstawowe pojęcia i od niego pochodzą jej podstawowe twierdzenia.

Powstanie analizy funkcjonalnej, tak jak powstanie każdej nowej dyscypliny naukowej, było etapem długiego historycznego procesu. Obszerna jest lista matematyków, których badania przyczyniły się do powstania analizy funkcjonalnej; obejmuje takie sławne nazwiska, jak Vito Volterra, Dawid Hilbert, Jacques Hadamard, Maurice Fréchet i Fryderyk Riesz. Ale rok 1922, w którym Stefan Banach w polskim czasopiśmie „Fundamenta Mathematicae" ogłosił swą rozprację doktorską *Sur les opérations. dans les ensembles abstraits et leur application aux equations intégrales,* jest datą przełomową w historii matematyki XX wieku. Ta kilkudziesięciostronicowa rozprawa ugruntowała bowiem ostatecznie podstawy analizy funkcjonalnej, nowej dyscypliny matematycznej, która – jak to wykazały rezultaty badań Stefana Banacha i innych – posiada kapitalne znaczenie dla dalszego rozwoju nie tylko samej matematyki, ale również nauk przyrodniczych, a w szczególności fizyki.

Analiza funkcjonalna, zastąpiła podstawowe dla analizy matematycznej pojęcie liczby przez ogólniejsze pojęcie, które dziś w tysiącach rozpraw matematycznych określone jest nazwą „punkt przestrzeni Banacha". Uzyskane w ten sposób uogólnienie analizy matematycznej, nazwane analizą funkcjonalną, pozwoliło traktować w sposób prosty i jednolity pozornie różne zagadnienia analizy matematycznej i rozwiązywać spośród nich wiele takich, z którymi poprzednio matematycy borykali się bezskutecznie. Zwiększyło to wydatnie pomoc udzieloną przez matematykę naukom przyrodniczym, w szczególności fizyce. Jednak znaczenie matematyki w nauce polega nie tylko na tym, że pozwala ona na podstawie sprawdzonych lub historycznych prawidłowości wyprowadzać wnioski dotyczące przebiegu zjawisk, ale i na tym, że stwarza w ciągu rozwoju nowe pojęcia, dzięki którym staje się w ogóle możliwe tłumaczenie pewnych zjawisk na język matematyczny i tym samym ich rozumienie. Analiza funkcjonalna stworzyła między innymi właściwy aparat pojęciowy do budowy matematycznych modeli dla różnych zjawisk stanowiących przedmiot badań współczesnej fizyki.

W ciągu niespełna 40 lat, które upłynęły od czasu ukazania się rozprawy doktorskiej Stefana Banacha, analiza funkcjonalna rozrosła się w potężny dział matematyki, który skupia na sobie uwagę coraz liczniejszych matematyków w świecie. Dzięki badaniom zarówno matematyków polskich, jak i badaniom prowadzonym w wielkich ośrodkach analizy funkcjonalnej w Związku Radzieckim, w Stanach Zjednoczonych i we Francji, idee Stefana Banacha uległy z czasem znacznemu rozszerzeniu. Cały dotychczasowy rozwój analizy funkcjonalnej dowodzi, że koncepcje Stefana Banacha mają wielką nieprzemijającą wartość w nauce. Analiza funkcjonalna, to wspaniały trwały pomnik jej twórcy".

Profesor **Bela Szökelavi–Nagy**, wybitny matematyk węgierski:

„Przekazując hołd, który pełni największego szacunku matematycy węgierscy składają pamięci Stefana Banacha, nie mogę pominąć milczeniem ścisłych związków łączących dzieło Banacha z dziełem naszego wielkiego nauczyciela zmarłego przed czterema laty, Fryderyka Riesza. W istocie, klasyczne prace Riesza o przestrzeniach funkcyjnych, o operacjach i przekształceniach liniowych w tych przestrzeniach inspirowały w dużym stopniu badania, o bardzo rozległym zasięgu, Banacha i Jego współpracowników, badania, których wyniki zostały przedstawione we wspaniałym dziele Banacha – jego *Teorii operacji liniowych*. Jest to bez wątpienia jedna z książek, które wywarły największy wpływ na rozwój matematyki współczesnej. Chociaż rozwinięta w tej książce teoria poprzedzona była dziełem E. H. Mooréa *Analiza ogólna* i przygotowana przez badania M. Frécheta i innych, dotyczące przestrzeni abstrakcyjnych, i choć mogła korzystać z metod rozwiniętych uprzednio do celów bardziej szczególnych, których autorzy zresztą, jak na przykład Fryderyk Riesz, przewidzieli i przepowiedzieli ich ogólną skuteczność, to była ona stworzona niemal w całości przez Banacha i jego współpracowników. Fryderyk Riesz wyrażał się zawsze o wartości tej książki z największym szacunkiem, dał mu zresztą wyraz w analizie *Teorii operacji* napisanej dla wychodzącego w Szeged czasopisma „Acta Scientiarum Mathematicarum".

Teoria rozwinięta w dziele Banacha pozwala objąć swymi metodami wielką rozmaitość zagadnień: przede wszystkim zagadnienia istnienia dotyczące równań różniczkowych i całkowych, ogólniej nawet – równań funkcyjnych liniowych, następnie układy równań liniowych z nieskończoną ilością niewiadomych, szeregów Fouriera, sumowanie szeregów rozbieżnych, wreszcie funkcje bez pochodnej. Pomiędzy użytymi tam metodami znaleźć można metody niezwykle pomysłowe i głębokie – są również i inne, mniej być może skuteczne, ale za to zadziwiająco proste. Fryderyk Riesz w swej analizie książki Banacha wyróżnia szczególnie twierdzenie Banacha i Steinhausa o jednostajnej ograniczoności, twierdzenie stanowiące uogólnienie twierdzenia Osgooda, dowiedzionego dla zwyczajnych funkcji ciągłych, na operacje ciągłe w ogólnych przestrzeniach liniowych. Z twierdzenia tego wynikają między innymi twierdzenia Alfreda Haara i Henri Lebesgue'a o zbieżności całek osobliwych, twierdzenia Hellingera i Toeplitza głoszące, że ciąg reduktów kwadratowej nieskończonej ilości zmiennych może być zbieżny we wszystkich punktach przestrzeni Hilberta, jedynie wówczas, gdy ta forma jest ograniczona i twierdzenia o istnieniu rozmaitych kategorii funkcji bez pochodnych. Tak więc twierdzenie to zawiera wyniki należące do rozmaitych teorii i to wyniki, których odkrycie stanowiło niemałe wydarzenie.

Twierdzenie o jednostajnej ograniczoności, twierdzenie Hahna–Banacha o przedłużeniu operacji liniowych i twierdzenie Banacha zwane często „twierdzeniem o domkniętym wykresie", to trzy naprawdę podstawowe twierdzenia analizy liniowej. Panowie Dunford i Schwartz słusznie też umieścili te trzy „podstawy" na początku swej niedawno wydanej monografii o operatorach liniowych, książki wywierającej duże wrażenie i dającej przegląd rozwoju teorii zainaugurowanej między innymi pracami Fryderyka Riesza, Stefana Banacha i szkoły polskiej".

Marshal Harvy z Chicago:

"Piętno, które wycisnął Stefan Banach na matematyce naszego wieku zapewnia mu stałe miejsce w historii nauki. Zarówno swym sławnym dziełem, jak również przez pobudzenie zainteresowań i działalności innych matematyków w swej ojczyźnie, Polsce, a także i w innych krajach, wywarł decydujący wpływ na rozwój współczesnej analizy funkcjonalnej. Wielu spośród nas, zebranych tutaj dla uczczenia tego wielkiego polskiego matematyka, uświadamia sobie wpływ jego idei na nasze własne rozważania lat dwudziestych i początku trzydziestych. Inni, którzy działalność swą rozpoczęli nieco później, pamiętają go raczej jako mistrza, w którego oryginalnym dziele *Teoria operacji liniowych* szukali wiedzy i natchnienia. Hołd, który składamy teraz Stefanowi Banachowi, płynie zarówno z naszych serc, jak i umysłów. Wszyscy, którzy mamy szczęście być obecni i wyrazić, uczestnicząc w tej uroczystości nasz podziw dla niego, mamy kolegów w wielu krajach, którzy żałują, że nie mogą być tu z nami.

Zatrzymując się, by przypomnieć sobie nasz dług wobec Banacha, należy poświęcić trochę czasu na zastanowienie się nad przyczynami, które spowodowały, że dzieło jego wywarło tak głęboki i doniosły wpływ na rozwój analizy funkcjonalnej. Ponieważ matematyka staje się coraz bardziej skomplikowana i szczegółowo opracowana, czujemy rosnącą potrzebę uzyskania ogólnej perspektywy i poglądu, które prowadziły nas najkorzystniejszymi drogami do głębi tajemnic, które chcemy zbadać. Jeśli takie wskazania są możliwe, najbardziej prawdopodobnym jest znaleźć je rozważając osiągnięcia, a także i niepowodzenia matematyków, których dzieło jest na tyle zakończone w naszych czasach, że możemy jeszcze widzieć wyraźnie w godnych uwagi szczegółach, wzajemne oddziaływanie jego i dzieł jemu współczesnych, a także jego bezpośrednich następców.

Z przykładu Stefana Banacha możemy wyciągnąć wiele wartościowych wniosków. Oparł się on, jak my wszyscy czynimy, na osiągnięciach wielu wybitnych poprzedników, wśród których wymienić należy Volterrę, Frécheta, Hilberta i F. Riesza. Główne kierunki analizy funkcjonalnej były już wyznaczone zanim Banach rozpoczął swą pracę. Rola podstawowych struktur liniowo-algebraicznych była wyraźnie podkreślona przez Fredholma, Hilberta i Riesza; uświadomiono sobie wagę rozważań topologicznych, wprowadzonych pierwotnie przez Frécheta; wyraźnie sformułowano uogólnienie i abstrakcję jako właściwe, pożądane cele analizy funkcjonalnej (Riesz i E. H. Moore).

Wydaje się, że wczesne prace Banacha powstały w warunkach, które opisane przez profesora Steinhausa, każą wysoko cenić jego niezależność ducha. Warunki te mogły przeszkodzić Banachowi w poznaniu dorobku jego poprzedników. Polska w czasie pierwszej wojny światowej i bezpośrednio po niej, na pewno nie była dla młodego matematyka dogodnym miejscem do rozpoczęcia kariery; nawet dla takiego, którego warunki osobiste były znacznie lepsze niż Banacha. Z drugiej strony wielki entuzjazm dla matematyki, który towarzyszył tworzeniu się wspaniałej szkoły matematycznej na początku lat dwudziestych, dostarczał Banachowi właściwej i nadzwyczaj pobudzającej atmosfery dla rozwoju jego własnych idei. Oczywiście skorzystał z żywego w Polsce zainteresowania zagadnieniami topologii teoriomnogościowej, nie zapominając jednocześnie o swych własnych celach w analizie. Dzięki temu jego osiągnięcia charakteryzują się przede wszytkim mistrzowskim wykorzystaniem metod topologii w celu otrzymania głębokich twierdzeń analizy funkcjonalnej, których nie dostrzegali jego poprzednicy i jemu współcześni. Swoje idee Banach przedstawił w sposób dojrzały i zwarty w słynnej monografii z nadzwyczajną jasnością podkreślając subtelną współzależność rozważań algebraicznych i topologicznych w czynieniu naprawdę owocnymi pojęć abstrakcyjnych i ogólnych, z którymi miała do czynienia współczesna analiza funkcjonalna. Tym, co uczyniło wpływ dzieła Banacha tak silnym, jest zjednoczenie szeregu różnych, znalezionych poprzednio wyników z dziedziny analizy, wyrywkowych i niepełnych.

Chociaż Banach uważał uogólnienie za cel sam w sobie, widzimy dzisiaj, że nie szedł on w tym kierunku tak daleko, jak wymaga tego nowoczesna analiza. Należy to zapewne przypisać przenikliwości Banacha, dotyczącej strategii, jaką należało wówczas stosować. Trudno wątpić, że Banach rozumiałby i doceniał współczesne nam zainteresowanie grupami topologicznymi i przestrzeniami liniowo–topologicznymi, lecz w czasie, gdy pisał swą książkę, najbardziej interesujące problemy analityczne były związane z topologiami metrycznymi. Chociaż oczywiste było dokonanie uogólnienia na topologie niemetryczne, zostało ono przedsięwzięte dopiero kilka lat po ukazaniu się jego książki. Banach czuł zapewne, że należy najpierw zająć się przypadkiem najważniejszym, korzystając z dostępnych środków, które, jak wykazał, nadawały się do użycia właśnie w tym momencie. Niezależnie od tego, czy odczuwał on to, czy też nie, sądzę, że możemy zgodzić się *post factum*, iż miał rację, dokonując uogólnienia do tego miejsca, gdzie można było otrzymać głębokie wyniki, które mogły być bezpośrednio zastosowane do najbardziej wówczas interesujących problemów. Prawdę powiedziawszy, wydaje mi się słusznym zaznaczyć, że dzieło dokonane w końcu lat trzydziestych w dziedzinie przestrzeni liniowo–topologicznych i lokalnie wypukłych przestrzeni liniowo–topologicznych przyniosło owoce dopiero wtedy, gdy sformułowanie teorii dystrybucji przez Laurenta Schwartza wskazało nowy kierunek i dostarczyło nowych bodźców do zajmowania się tymi przestrzeniami.

Pomimo intensywnych badań prowadzonych od czasu wprowadzenia przez Banacha i, niezależnie, Norberta Wienera, przestrzeni Banacha, ich teorii wiele jeszcze brakuje do tego, by być dokładnie zrozumianą. Wydaje się, że w tej teorii nie tylko wiele poszczególnych rozwiązanych problemów, wśród nich znaczna część sformułowanych przez samego Banacha, ale i pewne spośród najbardziej naturalnych kierunków dalszych badań napotykają na poważne przeszkody. Aby to potwierdzić, wystarczy uświadomić sobie, jak nieznaczna część naszej wiedzy o przestrzeni Huberta może być obecnie rozszerzona na przestrzenie Banacha, lub ogólniej na przestrzenie liniowo–topologiczne. Szczególna struktura metryczna przestrzeni Hilberta daje nam silny punkt oparcia, którego nie mamy w innych przypadkach i bez którego nasze próby oczywistych uogólnień, jak na przykład w teorii spektralnej, prowadzą co najwyżej do częściowych wyników. Istnieje wiele działów analizy, które obecnie mogą być rozpatrywane tylko w ramach teorii przestrzeni Hilberta. Warto podkreślić, że dotyczy to nie tylko problemów związanych z teorią spektralną, lecz nawet i tych, gdzie są stosowane elementarne rozważania z zakresu analizy funkcjonalnej. W szczególności wiele współczesnych osiągnięć w teorii różniczkowych o pochodnych cząstkowych opiera się na pomysłowym zastosowaniu rozumowań teorii przestrzeni Hilberta. Stanowi to wyraźny odwrót od wcześniejszych dążeń zmierzających do korzystania z norm Banacha specjalnie dostosowanych do poszczególnych problemów. Można więc powiedzieć, że geniusz Stefana Banacha stworzył dla nas tyle problemów, ile sam ich rozwiązał.

Niewątpliwie Banach musiał tak uczynić. My, którzy idziemy drogą przez niego wskazaną, możemy mu być wdzięczni zarówno za światło, które rzucił na tyle aspektów analizy funkcjonalnej, jak i za wiele problemów, które sam zostawił."

Fenomen Banacha i w ogóle lwowskiej szkoły matematycznej próbował ująć w kontekście ogólniejszym wybitny uczony amerykański polskiego pochodzenia, przyjaciel i uczeń Banacha profesor **Stanisław Ulam** w opublikowanych w roku 1971 w „Wiadomościach Matematycznych" bardzo refleksyjnych wspomnieniach:

„Rozwój matematyki w ciągu całych dziejów doznawał impulsów bądź z pewnych środowisk, bądź od pewnych grup ludzkich. Środowiska te zarówno duże, jak i małe, tworzyły się dookoła jednej lub czasem kilku indywidualności, a czasem były wynikiem prac badawczych pewnej liczby osób, które stanowiły wyrównaną grupę pracującą równocześnie i rozwijającą działalność matematyczną. Grupa taka stanowi więcej niż tylko wspólnotę specyficznych zainteresowań, ma ona zupełnie określony nastrój i charakter zarówno w doborze problemów, jak i metod myślenia. Na pierwszy rzut oka może to się wydać dziwne, gdyż osiągnięcia matematyczne, czy to nowa, brzemienna w treści definicja, czy też skomplikowany dowód rozstrzygający pewną kwestię, wydają się wynikiem zupełnie indywidualnego wysiłku, niemal jak kompozycja muzyczna, co do której niełatwo pojąć, jak mogłaby być napisana przez więcej niż jednego osobnika.

Jeśli jednak idzie o grupę indywidualnych matematyków, to wybór tych czy innych problemów i metod powtarza się wielokrotnie, co jest wynikiem wspólnych zainteresowań. Na wybór taki, często wywiera wpływ splot pytań i odpowiedzi, które zapewne pojedynczy matematyk może sam postawić i rozwiązać, lecz które powstają w sposób naturalny w wyniku pracy kilku umysłów.

W ten sposób wielkie centra matematyczne XIX wieku, takie jak Getynga, angielski Cambridge, Paryż i ośrodki rosyjskie, wywarły szczególny i swoisty wpływ na rozwój matematyki.

Znaczna część osiągnięć matematyków w Polsce w okresie dwudziestolecia międzywojennego stanowi etap w tworzeniu fundamentów współczesnej matematyki światowej. Wywierają one wpływ nie tylko na przedmiot, lecz również na ton badań współczesnych.

Od czasów Cantora duch teorii mnogości coraz bardziej przenikał matematykę. Ostatnio byliśmy świadkami renesansu zainteresowania tą teorią i nieoczekiwanych jej postępów. Mam na myśli nie tylko teorię mnogości w jej najbardziej abstrakcyjnej formie, lecz także jej bezpośrednie zastosowania, topologię w jej najogólniejszym ujęciu, najogólniejsze przedstawienie idei algebraicznych. Temu wszystkiemu nadała kierunek i impuls szkoła polska.

Znaczna część tego wkładu jest zasługą matematyków lwowskich. Tutaj zainteresowania nie koncentrowały się wyłącznie na teorii mnogości, lecz na nowym ujęciu problemów klasycznych, które może być analizą funkcjonalną w duchu geometrycznym i algebraicznym. Jeśli chciałoby się dać mocno uproszczony opis źródeł tej aktywności, można by powiedzieć, że w Polsce zadomowiły się badania oparte na dziele Cantora, logików szkoły niemieckiej, matematyków francuskich Baire'a, Borela, Lebesgue'a i innych.

Badania te, wraz z problemami analizy sformułowanymi przez Hilberta i innych w Niemczech, prowadziły do prostych, ogólnych konstrukcji nieskończenie wielowymiarowych przestrzeni funkcjonalnych. Równocześnie w Ameryce, i to w pewnym sensie niezależnie, prace E. H. Moore'a, O. Veblena i innych, pobudzonych przez ogólne tendencje, doprowadziły do zbliżenia różnych sposobów widzenia i unifikacji intuicji matematycznej.

Ważną cechą matematyki nowoczesnej, która została w pełni rozwinięta we Lwowie, jest współpraca między różnymi indywidualnościami, a nawet całymi szkołami matematycznymi. Wbrew rosnącej różnorodności i specjalizacji a nawet hiperspecjalizacji badań matematycznych kierunki i wątki badawcze pochodzące z różnorodnych i niezależnych źródeł częstokroć zbiegają się.

Nie będę starał się dać opisu historycznego ani też genetycznego, bądź wyjaśnienia filozoficznego tego znakomitego środowiska lwowskiego. Podam tylko swe osobiste impresje, zarówno jako studenta, jak i uczestnika, o duchu i charakterze grupy pracowników Uniwersytetu i Politechniki we Lwowie.

Wspomnienia te, z okresu między dwiema wojnami światowymi, piszę po trzydziestu latach spędzonych w Stanach Zjednoczonych. W tym czasie miałem tylko sporadyczny kontakt z matematykami polskimi, z wyjątkiem krótkiego okresu tuż przed drugą wojną światową, gdy odwiedziłem Lwów w czasie wakacji.

Kalejdoskop typów matematyków lwowskich przedstawiał wielką rozmaitość indywidualności matematycznych, nie tylko w zakresie zainteresowań i wykształcenia, lecz również w rodzajach intuicji i zwyczajów matematycznych. Głównym napędem oryginalnej pracy badawczej były dziedziny o nastawieniu teoriomnogościowym: podstawy teorii mnogości, topologia mnogościowa, a następnie – pod wpływem Banacha i Steinhausa – analiza funkcjonalna z zastosowaniem do analizy klasycznej.

Schauder, który był docentem uniwersytetu, zajmował się równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Jego metody i rezultaty stały się dziś klasyczne i stanowią jedno z najpotężniejszych narzędzi dowodzenia twierdzeń o istnieniu.

Banach, Mazur i Schauder są twórcami tak dziś popularnej metody traktowania problemów analizy za pomocą geometrycznych metod przestrzeni funkcyjnych.

Jeżeli zależałoby mi na określeniu głównej cechy charakterystycznej tej szkoły, to wymieniłbym zainteresowania podstawami różnych teorii. Rozumiem przez to, że jeśliby rozważyć matematykę jako drzewo, to grupa lwowska oddawała się studiowaniu korzeni i pni, być może nawet głównych konarów, mniej interesując się bocznymi pędami, liśćmi i kwiatami.

Głębokie badania konstrukcji matematyki klasycznej doprowadziły grupę lwowską do rozważania pojęć bardziej ogólnych, które mogłyby służyć jako baza dla innych możliwych definicji.

Z tego teoriomnogościowego i aksjomatycznego punktu widzenia badano raczej naturę ogólnych przestrzeni niż jakiś przykład szczegółowy; raczej ogólne znaczenie ciągłości niż na przykład ciągłości funkcji jednej zmiennej; raczej naturę bardziej ogólnych zbiorów punktów przestrzeni euklidesowej niż tylko klasyczne figury geometryczne; raczej ogólne funkcje jednej lub kilku zmiennych rzeczywistych, ogólne przestrzenie funkcyjne, ogólniejsze pojęcia długości krzywej, pola i objętości, tzn. pojęcia miary i sformułowanie pojęcia prawdopodobieństwa. Badano i porównywano znaczne konstrukcje matematyczne, a z nich abstrahowano wspólne cechy strukturalne.

Rezultaty ogólne można było zinterpretować w każdym ze specyficznych przykładów bez przeprowadzania na nowo dowodów w każdym poszczególnym przypadku. Na przykład wiele dobrze znanych przestrzeni matematycznych spełnia aksjomaty tego, co później stało się powszechnie znane pod nazwą przestrzeni Banacha.

Patrząc retrospektywnie wydaje mi się rzeczą osobliwą, że nie rozważono tam na równie ogólnym tle, idei algebraicznych. Jest jasne, że grupa lwowska była liczebnie skromna i rozwój algebry w duchu nowoczesnym musiał oczekiwać na powstanie innych centrów w innych krajach.

Jest rzeczą równie dziwną, że studium podstaw fizyki, a zwłaszcza studium czasoprzestrzeni, nie zostało nigdzie podjęte w tym duchu do dnia dzisiejszego. Nic dziwnego, że przy tak ogólnym ujęciu nowe i dziwne obiekty matematyczne ukazują się równolegle do ogólnych idei klasycznych. Na przykład, w topologii na równi ze wszystkimi figurami geometrycznymi spotyka się cudaczne continua punktów płaszczyzny i trójwymiarowej przestrzeni.

W badaniach funkcji zmiennej rzeczywistej okazało się, że wśród funkcji ciągłych funkcje nieróżniczkowalne stanowią „większość".

W badaniach przestrzeni wektorowych nieskończenie wielowymiarowych okazało się, że cały szereg takich przestrzeni ma tę samą doniosłość, co przestrzeń Hilberta. Analiza różnych własności funkcji, ich różniczkowalności lub rodzajów ciągłości wykazała, że każde z tych pojęć prowadzi do pewnej przestrzeni wektorowej nieskończenie wielowymiarowej, równie nieraz interesującej jak przestrzeń Hilberta. Własności ciągów liczb rzeczywistych, ich zbieżność czy też sumowalność, były rozważane za pomocą przestrzeni wektorowych takich ciągów. Badanie podstaw, tzn. aksjomatycznego sformułowania teorii prawdopodobieństwa, wymagało zbadania bardzo ogólnych miar i budowy nowych przestrzeni „zdarzeń" złożonych, które konstruowano wychodząc z danych przestrzeni.

Podniecenie wywołane znaleziem takiej rozmaitości nowych obiektów, którymi można było operować za pomocą kilku ogólnych metod, było tak duże, że częstotliwość dyskusji w pracy zespołowej w tych latach była rzeczywiście wyjątkowa. Jedynym wypadkiem, gdy spotkałem się z podobną wspólnotą zainteresowań i intensywnością współżycia intelektualnego, był okres mych badań w czasie lat wojennych nad nowym wówczas zagadnieniem – energią jądrową."

* * *

Chciałbym zakończyć ten rozdział jeszcze jedną wypowiedzią. Wypowiedzią samego Banacha, która wręcz przypomina wyznanie miłosne:

„Matematyka jest napiękniejszym i najpotężniejszym tworem ducha ludzkiego. Matematyka jest tak starą, jak stary jest człowiek"*.

* *Stefan Banach, wstęp do książki Egmonta Colerusa „Od tabliczki do różniczki",* 1938.