KSIĘGA SZKOCKA

~~Pa~~

17/lipiec 1935

Problemat Banach

~~Banach~~. a) Kiedy przestrzeń metryczna (ewentualnie ~~***~~ typu B) da się zmetryzować tak, by ~~zo~~stała się kompaktnym, przyczem ciągi zbieżne według starej odległości mają być zbieżne według nowej.

b) Czy np. [c_0] może być zmetryzowana jak wyżej.

Banach-Ulam Problemat

a) Czy w każdej przestrzeni E metrycznej kompaktnej można określić miarę (skończenie addytywną) przyczem zbiory Borelowskie przystające mają mieć równe miary

b) Jeżeli $E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$ przyczem $E_1 \cong E_2 \dots \cong E_n$ i $\{E_n\}$ są rozłączne wówczas piszemy $E_i = \frac{1}{n} E$.
Czy może zachodzić $\frac{1}{n} E \cong \frac{1}{m} E$ $n \neq m$,
jeżeli zakładamy że $\frac{1}{n} E$ jest Borelowskim zbiorem,
zaś $\frac{1}{m} E$ jest ~~metryczny~~. kompaktnym.

Banach-Ulam. Twierdzenie

Udowodniono: Zbiór kompaktny zupełny nie może być przystający do swej części właściwej.

Ad 5) Mazur: Gdy ciągi zbieżne w sensie podanym nazwiemy asymptotycznie zbieżnemi to zachodzą twierdzenia: 1° Gdy metoda (a_{ik}) sumuje wszystkie ciągi asymptotycznie zbieżne, to $a_{ik}=0$ dla $k>k_0$, $i=1,2,\ldots$ oraz istnieją skończone $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ik}$ dla $k=1\ldots k_0$, tak, że metoda sumuje wogóle wszystkie ciągi; 2° Gdy metoda (a_{ik}) sumuje wszystkie ciągi zbieżne i każdy ciąg ograniczony sumowalny nią jest asymptotycznie zbieżny, to istnieje ciąg rosnący liczb nat. $\{k_n\}$ o gęstości 1, taki, że przy każdym ciągu $\{\xi_n\}$ sumowalnym rzeczoną metodą ograniczonym, ciąg $\{\xi_{k_n}\}$ jest zbieżny. Z 1° wynika, że nie istnieje metoda permanentna sumująca wszystkie ciągi asymptotycznie zbieżne, z 2° wynika, że metoda permanentna sumująca wszystkie ciągi ograniczone asymptotycznie zbieżne, sumuje również pewne inne ciągi ograniczone. — (22. VII. 1935)

Twierdzenie
Schreier Jeżeli $\{\xi_n\}$ jest ciągiem ograniczonym i sumowalnym pierwszą średnią do ξ, to prawie każdy podciąg jest sumowalny pierwszą średnią do ξ.

Problemat (Mazur): Które metody sumowalności mają powyższą własność pierwszej średniej.

Problemat Mazur

Def. Ciąg $\{\xi_n\}$ jest asymptotycznie zbieżny do ξ jeżeli istnieje podciąg o gęstości 1 zbieżny do ξ.

Twierdzenie **Mazur** Granica powyższa nie jest równoważna w zakresie wszystkich ciągów żadnej metodzie Töplitza. Czy jest w zakresie ciągów ograniczonych?

Problemat - Mazur, Orlicz (nagroda: flaszka wina)
S. Mazur

Czy tablica wierszami skończona odwracalna (jednoznacznie) jest równoważna z tablicą normalną.

Problemat Mazur-Banach

Czy dwa zbiory wypukłe, zamknięte, zwarte, ∞ wymiarowe, położone w przestrzeni typu B są homeomorficzne.

Problemat Mazur (nagroda: 5 małych piw) S. Mazur

a) Czy każdy szereg sumowalny pierwszą średnią jest iloczynem Cauchy'ego dwóch szeregów zbieżnych.

lub równoważnie

b) Czy do każdego ciągu zbieżnego $\{z_n\}$ istnieją ciągi zbieżne $\{x_n\}, \{y_n\}$ takie, że
$$z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots x_n y_1}{n}$$

Problemat Mazur-Orlicz
Twierdzenie Ulam

Jeżeli E jest zbiorem mnogości skończonych z których każda zawiera mniej niż n elementów i jeżeli każde n+1 mnogości zbioru E posiada element wspólny, wówczas istnieje element wspólny wszystkim ~~zb~~ mnogościom zbioru E.

Twierdzenie Banach - Mazur

Niechaj H będzie dowolnym zbiorem abstrakcyjnym, zaś E zbiorem wszystkich funkcji rzeczywistych określonych w H.
Liczymy $\{x_n(t)\} \to x(t)$ [gdzie $t \in H$, $x_n, x \subset E$] jeżeli $\lim x_n(t) = x(t)$ dla każdego $t \in H$.
Twierdzenie: Każdy funkcjonał liniowy $f(x)$ określony w E jest kształtu

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x(t_i)$$

gdzie α_i i t_i niezależne od x.

10.2) **Twierdzenie Mazur - Auerbach - Ulam - Banach**
(Problemat Mazur)

Jeżeli $\{K_n\}$ ($n=1,2,\ldots$ in inf) są bryłami wypukłemi o średnicy $\leq a$ przyczem suma objętości $\leq b$, wówczas istnieje sześcian o krawędzi $c = f(a,b)$, w którym bryły dane można umieścić rozdzielnie.

Wniosek: Kilogram kartofli da się umieścić w worku.

Problemat: Wyznaczyć funkcję $c = f(a,b)$

Problemat. Banach - Ulam

Przyjmijmy, ~~gęstość~~ że w zbiorze liczb naturalnych określona jest miara przyczem punkt ma miarę zero. Rozszerzmy tę miarę na produkty ~~sko~~ $E_1 \times E_2 \times \dots$ skończone lub nieskoń-czone w ten sposób by zbiory produktowe miały miarę równą iloczynowi miar.

a) czy zbiór ciągów $\{x_n\}$ zbieżnych do nieskończoności jest mierzalny?

b) czy zbiór par (x, y) gdzie x, y są względnie pierwsze jest mierzalny

c) Tw. Schreiera: Zbiór par (x, y) gdzie $x < y$ jest niemierzalny.

Uwaga: Zbiór jest niemierzalny, jeżeli nie można w nim miarę rozumnie określić, ~~spełn~~ zachowując żądane warunki.

Problemat Banach

Czy powierzchnia typu kuli mająca a) płaszczyznę ~~s~~ styczną b) płaszczyznę styczną ciągłą jest równoważna powierzchni kuli. Czyli czy istnieje homeomorfizm przestrzeni prze-kształcający daną płaszczyznę na powierzchnię kuli.

Problemat Ulama

Niechaj E będzie klasą wszystkich podzbiorów ~~liczb~~ liczb naturalnych. Dwa zbiory $K_1, K_2 \in E$ nazywamy równoważnymi tj. $K_1 \equiv K_2$ jeżeli $K_1 - K_2$ i $K_2 - K_1$ są zbiorami skończonemi lub pustemi. Dana jest funkcja $F(K)$ określona dla $K \in E$, której przeciwdziedzina mieści się w E, przyczem

$$F(K_1 + K_2) \equiv F(K_1) + F(K_2)$$

$$F(\text{kompl. } K) \equiv \text{kompl. } F(K)$$

Pytanie: czy ~~F(K) jest~~ istnieje funkcja $f(x)$ [~~liczba~~ x i $f(x)$ naturalne] taka, że

$$f(K) \equiv F(K)$$

Problemat Schauder-Mazur

Niechaj funkcja $f(x_1 \dots x_n)$ określona będzie w kostce K_n. Załóżmy, że f posiada prawie wszędzie wszystkie pochodne ciągłe aż do r-tego rzędu, przyczem pochodne do rzędu $r-1$ są absolutnie ciągłe na prawie każdej prostej równoległej do osi układu. Wszystkie poch. rzędu r [aż do r-tego] $\in L^p$. $p>1$. Czy istnieje ciąg wielomianów $\{w_i\}$ zbiegających średnio (z p-tą potęgą do f i do wszystkich pochodnych ciągłych aż do rzędu r.

Dla $r=1$ rozstrzygnięte pozytywnie przez autorów.

Pytanie analogiczne dla innych obszarów niż K_n.

(Ad 15.1) Negatywnie: wystarczy wziąć za E przestrzeń szeregów liczbowych $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ takich, że $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$, gdzie $0 < p < 1$, przy zwykłych działaniach oraz $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$; zamiast tej przestrzeni (l^p) można więc również (L^p) złożoną z funkcyj rzecz. $x = x(t)$ w $\langle 0,1\rangle$ mierz. i takich, że $\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$, przy działaniach zwykłych oraz $|x| = \int_0^1 |x(t)|^p dt$.

1.I.37. Mazur

Problemat Schauder

Niechaj $f(x_1 \ldots x_n)$ będzie funkcją określoną w K_n (tj. w kostce n wymiarowej).

Czy dla każdego n istnieje takie $p_n \geq 2$, że jeżeli $f \in L^{p_n}$ wówczas istnieje funkcja ciągła w K_n $u(x_1 \ldots x_n)$ a) zerująca się na brzegu K_n, b) mająca pierwsze pochodne prawie na każdej prostej równoległej do [illegible] pr. wszędzie osi układu absolutnie ciągłe c) drugie pochodne uogólnione (wszystkie) $\in L^{p_n}$ d) spełniająca równanie $\Delta u = f$.

Udowodnił autor, że dla $n = 2, 3$ $p_n = 2$. Mazur zauważył że dla $n = 4$, p_n nie może być równe 2.

Dla jakich n istnieje $p_n > 2$?

7) Problemat Mazur-Orlicz (nagroda: 2 małe piwa)

S. Mazur

Czy przestrzeń E typu (F) w której istnieje kula K stanowiąca zbiór ograniczony jest typu (B)? (Kula K jest ograniczona $\equiv$ gdy $x_n \in K$, liczby $t_n \to 0$, to $t_n x_n \to 0$).

Problemat Ulama

Znaleźć miarę Lebesgua w przestrzeni funkcyj mierzalnych spełniającą warunek: Jeżeli $\{H_n\}$ są zbiorami mierzalnymi położonymi na prostych $\{x = x_n\}$ wówczas zbiór wszystkich funkcyj $f(x)$ ~~spe~~ mierzalnych spełniających warunek $f(x_n) \in H_n$ ma miarę $|H_1| \cdot |H_2| \cdots$ gdzie $|H_n|$ oznacza miarę zbioru H_n.

Problemat Ulama

Udowodnić odwrócenie twierdzenia Poissona. tj.

Dany jest ciąg urn (zawierających kule białe (1) i czarne (0)) o nieznanych składach $\{p_n\}$ i dany jest rezultat ciągnienia z każdej urny po kolei $\{X_n\}$. Wykazać że z prawdopodobieństwem 1 wynika $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = p$ pociąga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i = p$$

17'1) Problemat Ulam

Niech f będzie funkcją ciągłą określoną dla $0 \le x \le 1$
Czy istnieje taki zbiór doskonały C i funkcja analityczna φ tak że na zbiorze C zachodzi $f \equiv \varphi$.?

18) Problemat Ulam

Niech stały prąd przepływa przez zwęzłoną krzywą zamkniętą. Pytanie: Czy istnieje zwęzłona zamknięta linja siły.
(zwęzłona $\equiv$ nierównoważna przez homeomorfizm całej przestrzeni R_3 z obwodem koła)

19) Problemat Ulam

Ciało o stałej gęstości, pływające we wodzie w każdem położeniu jest kulą.

Problemat Ulama (jedno-jedn. i ciągłe)

(8)?) Rozważmy przekształcenia płaszczyzny postaci: $x' = x;\ y' = f(x,y)$

i $y' = y;\ x' = g(x,y)$

ich przekształcenia powstałe przez składanie takich skończoną ilość razy. Czy każde homeom. przekształcenie da się przez takie przybliżyć? (Analog. problem dla przestrzeni n-wym.)

20.1) Problemat Mazur-Orlicz

Przy naturalnem n wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną k_n o następującej własności: Gdy $f(x_1, \ldots x_n)$ jest wielomianem nieprzywiedlnym, to istnieją punkty $(x_{11}, \ldots x_{1n}), \ldots (x_{k_n 1}, \ldots x_{k_n n})$ takie, że $f(\lambda_1 x_{11} + \cdots + \lambda_{k_n} x_{k_n 1}, \ldots \lambda_1 x_{1n} + \cdots + \lambda_{k_n} x_{k_n n})$ jako wielomian zmiennych $\lambda_1, \ldots \lambda_{k_n}$ jest nieprzywiedlny. Czy ciąg $\{k_n\}$ jest ograniczony? ($x_{11} \ldots x_n$ oraz $\lambda_{11} \ldots \lambda_{k_n}$ są zmiennemi rzeczywistemi lub zespolonemi)

21) Problemat Ulam

Czy można z krążka $x^2+y^2\le 1$ zrobić powierzchnię torusa przez użycie przekształceń o dowolnie małych warstwach?

(Tzn. czy przy każdem $\varepsilon>0$ istnieje takie przekształcenie pow. krążka na torus f, że gdy $|p_1-p_2|\geq\varepsilon$ to $f(p_1)\neq f(p_2)$)

22) Problemat Ulam-Schreier

Czy każdy zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem borelowskim ze względu na zbiory które są grupami złożonemi z liczb rzecz. (Tzn. czy daje się otrzymać zapomocą operacji Σ przeliczalnych i tworzenia różnic zbiorów wychodząc ze zbiorów o tej własności że gdy liczby x, y należą do nich to także $x-y$ należy)

Problem: Schauder.

23) Def a) Funkcja określona w pewnym obszarze n-wymiarowym jest w tym obszarze monotoniczna, jeżeli przyjmuje w każdym podobszarze maximum i minimum na brzegu. Funkcja nazywa się siodłowa, jeżeli po odjęciu dowolnej funkcji liniowej jest zawsze monotoniczna.

Def b) Niech C będzie obszarem płaskim, c krzywą Jordana, która jest jego brzegiem, K krzywą przestrzenną nad c o rzucie jednoznacznym. (tj. dwa różne punkty K mają różne rzuty na c). Będę mówił, że krzywa K spełnia warunek trójkątowy ze stałą Δ, jeśli stromość płaszczyzny przeprowadzonej przez 3 różne punkty K jest stale $\leq \Delta$. Stromością płaszczyzny $z = ax+by+c$ nazywamy liczbę $\sqrt{a^2+b^2}$

Rado (później J. v. Neumann) udowodnił twierdzenie: Powierzchnia (funkcja) ciągła $z=f(x,y)$ określona w obszarze wypukłym C, siodłowa, o której krzywa brzegowa spełnia warunek trójkątowy ze stałą Δ, spełnia warunek Lipschitza w C z tą samą stałą Δ, t.zn dla $(x_1 y_1)$ oraz $(x_2 y_2) \in C$ zachodzi

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \Delta \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Problemat A. Co można powiedzieć, gdy krzywa brzegowa jest tylko funkcją ciągłą? Czy jest n.p. spełniony warunek Lipschitza w każdym obszarze domkniętym zawartym całkowicie (wewnątrz) C?

Problemat B. Co się da powiedzieć analogicznego do twierdzenia Rado dla funkcji większej ilości zmiennych $(n>2)$?

24) Problemat Mazur (nagroda: 2 małe piwa)

S. Mazur

Dany jest w przestrzeni E typu (B) funkcjonał addytywny $F(x)$ o wartościach z E o własności następującej: gdy $x(t)$ jest funkcją ciągłą w $0 \leq t \leq 1$, to $F(x(t))$ jest funkcją mierzalną. Czy $F(x)$ jest ciągły?

25) Problemat Schauder.

Niedawno uogólniono teorję równań całkowych na równania całkowe osobliwe, t.zn. w których wyrażenie całkowe $\int K(s,t)\,y(t)\,dt$ rozumiane jest jako niewłaściwa całka w sensie Cauchy'ego. Przy pewnych założeniach dodatkowych trzy znane twierdzenia Fredholma (dla równań w stałych granicach) zachodzą tu także. W sensie teorji operacyj równania tego typu nie są prawdopodobnie pełnociągłe w odpowiednich przestrzeniach typu B.

Problemat: Znaleźć nową klasę operacyj linjowych $F(x)$ któraby zawierała w sobie równania całkowe powyższe (niewłaściwe), dla którejby więc zachodziły dalej twierdzenia Fredholma. Równania są typu

$$y = x + F(x).$$

26) Prolemat Mazur-Orlicz (nagroda: małe piwo)

S. Mazur

Niech E będzie przestrzenią typu (F_0) zaś $\{F_n(x)\}$ ciągiem funkcjonałów linjowych w E, zbieżnym do 0 jednostajnie w każdym zbiorze ograniczonym $R \subset X$; czy ciąg jest wtedy zbieżny do 0 jednostajnie w pewnem otoczeniu 0? (E jest przestrzenią typu (F_0) $\equiv$ E jest przestrzenią typu (F) spełniającą warunek: gdy $x_n \in E$, $x_n \to 0$ i szereg liczb $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ jest zbieżny. $R \subset X$ jest zbiorem ograniczonym $\equiv$ gdy $x_n \in R$ i liczby $t_n \to 0$, to $t_n x_n \to 0$)

ad 26). Odpowiedź negatywna.
M. [illegible] 4/VI 1938.

27) Problemat Mazur-Orlicz (nagroda: 5 małych piw)

S. Mazur

Niech E będzie przestrzenią zespoloną typu (B) zaś $\mathcal{F}(x)$, $\mathcal{G}(x)$ wielomianami zespolonymi określonymi w E. Przypuśćmy, że istnieją elementy $x_n \in E$ takie, że $|x_n| \leq 1$ oraz $\mathcal{F}(x_n) \to 0$, $\mathcal{G}(x_n) \to 0$; czy istnieje wtedy element $x_0 \in E$ taki, że $\mathcal{F}(x_0) = 0$, $\mathcal{G}(x_0) = 0$?

28) Problemat Mazur (nagroda: flaszka wina)

S. Mazur

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem o wyrazach rzeczywistych; oznaczmy przez R zbiór wszystkich liczb α, dla których istnieje szereg różniący się tylko porządkiem wyrazów od $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sumowalny metodą 1-ych średnich do α. Czy prawdą jest, że gdy zbiór R zawiera więcej jak jedną liczbę, lecz nie wszystkie liczby, to składa się z wszystkich liczb pewnego postępu $\alpha x + \beta$ $(x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$? To samo pytanie dla innych metod sumowalności. (Wiadomo, że: 1° istnieje szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taki, że R składa się z wszystkich wyrazów z góry danego postępu $\alpha x + \beta$ $(x = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots)$; 2° gdy ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, to R albo składa się z jednej liczby albo zawiera wszystkie – pierwszy przypadek zachodzi tylko wtedy gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny)

29) Problemat Ulam

Czy grupa H_n homeomorfizmów powierzchni kuli n-wymiarowej jest prosta? (w następującym sensie: składowa identyczności nie zawiera nietrywialnego dzielnika normalnego). Wiadomo (Ulam-Schreier) że twierdzenie zachodzi dla $n=2$ i że grupa H_n w składowej identyczności nie zawiera domkniętych dzielników normalnych.

[illegible]7) Odpowiedź twierdząca; gdy nie istnieje $x_0 \in E$ taki, że $\vartheta(x_0)=0$, $g(x_0)=0$, to istnieją wielomiany zespolone $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ w E o tej własności, że $\vartheta(x)\Phi(x)+g(x)\Psi(x)\equiv 1$.

Mazur – Orlicz, 5 kwietnia 1939.

30) Problemat Ulam

Elementy a i b grupy H są równoważne jeżeli istnieje $h \in H$ takie że zachodzi związek: $a = hbh^{-1}$. – Dwie pary elementów: a', a'' i b', b'' są jednocześnie równoważne jeżeli istnieje taki $h \in H$ że zachodzi $a' = hb'h^{-1}$ i $a'' = hb''h^{-1}$. Pytanie: Czy na równoważność jednoczesną par elementów a', a'' i b', b'' ~~potrzeba i~~ wystarcza żeby każda kombinacja elementów a' i a'' była równoważna z odpowiednią kombinacją elementów b' i b''. (Konieczność tego warunku jest oczywista.)

31) Problemat Ulam

Czy w grupie metrycznej i ciągłej zwartej zbiór elementów równoważnych danemu jest zawsze pierwszej kategorji?

Czy to zachodzi przy dodatkowych założeniach, że grupa jest spójna lub prosta? 18. VI. 36.

32) Problemat Ulam

Niechaj G będzie grupą zwartą metryczną (działanie grupowe oznaczamy: $\times$). Czy przy każdem $\varepsilon > 0$ istnieje skończona liczba elementów grupy: $a_1, a_2 \ldots a_N$ dla których można określić działanie grupowe (oznaczone symbolem $\circ$) względem którego te elementy tworzyłyby grupę przyczem: 1°: $(a_i \times a_j,\ a_i \circ a_j) < \varepsilon$ $i, j = 1, 2 \ldots N$ [(a, b) oznacza odległość elementów a, b od siebie], 2°: odwrotności elementu a_i $(i = 1 \ldots N)$ wedle obu działań odległe są od siebie mniej niż o ε.

33) Problemat Ulam

Dwa ciągi zbiorów liczb rzeczywistych A_n i B_n są równoważne jeżeli istnieje funkcja f (dowolna) odwzorowująca zbiór liczb rzeczyw. jedno-jednoznacznie na siebie i taka że:

$f(A_n) = B_n$.

Pytania: α) Czy każdy ciąg A_n zbiorów rzutowych jest równoważny z pewnym ciągiem zbiorów borelowskich.

β) Czy każdy ciąg zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a jest równoważny z ciągiem zbiorów borelowskich.
— Można udowodnić, że istnieje ciąg zbiorów nie równoważny z żadnym ciągiem zbiorów mierzalnych. (L)

34) Problemat Ulam

Dana jest klasa K zbiorów liczb rzeczywistych o następujących własnościach: 1°: Klasa K zawiera wszystkie zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a.

2°: Jeżeli $A \varepsilon K$ i $B \varepsilon K$ to $(A-B) \varepsilon K$.

3°: Jeśli $A_n \varepsilon K$ to $\sum A_n \varepsilon K$.

4°: Jeżeli cała przestrzeń rozbita jest na nieprzeliczalną ilość zbiorów A_ξ (rozłącznych) nieprzeliczalnych należących do K, to istnieje w klasie K zbiór zawierający z każdym ze zbiorów A_ξ dokładnie po jednym punkcie wspólnym.

Pytanie: Czy klasa K składa się ze wszystkich podzbiorów przestrzeni?

1.VIII.1935. ad 33). Istnieją ciągi zbiorów rzutowych i ciągi zbiorów ~~bor~~ mierzalnych (L) nierównoważne z ciągami zbiorów borelowskich. Zakomunikowane przez p. Szpilrajna, który uzyskał jeszcze inne rezultaty dotyczące pojęcia równoważności ciągów zbiorów.
S. Ulam.
(Fund. Math. 26)

35) Problemat Ulam.

Czy Rzutowa przestrzeń Hilberta (tj. zbiór wszystkich średnic kuli jednostkowej zmetryzowany po Hausdorffowsku) jest homeomorficzna z przestrzenią Hilberta samą?

36) Problemat Ulam

Czy można przekształcić pełną kulę w przestrzeni Hilberta na jej brzeg w sposób ciągły tak żeby przekształcenie było na brzegu kuli identycznością?

37) Problemat Ulam

Ciałem zbiorów nazywamy taką klasę K że jeśli $A \in K$, $B \in K$ to $(A+B)$ i $(A-B)$ $\in K$. Dwa ciała zbiorów są izomorficzne jeżeli każdemu zbiorowi ciała K można jednoznacznie przyporządkować zbiór ciała L w taki sposób żeby suma zbiorów przechodziła na sumę, różnica na różnicę (i żeby przeciwdziedzina zawierała wszystkie ~~ciała~~ zbiory ciała L.!)

Pytania: α) ile jest nieizomorficznych ciał zbiorów liczb rzeczywistych

β) nieizomorficznych ciał zbiorów liczb naturalnych.

γ) Czy ciało zbiorów rzutowych jest izomorficzne z ciałem zbiorów borelowskich?

Analogiczne pytania dla ciał w sensie przeliczalnym.

<u>Ad 36.</u> Odwzorowanie o żądanych własnościach istnieje — podał je <u>Tychonoff</u>.

38) Problemat Ulama

Niech danych będzie N elementów (osób); do każdego elementu wylosowanych jest k innych z pomiędzy danych N według praw przypadku (znajomych danej osoby). Jakie jest prawdopodobieństwo P_{kN} na to że od dowolnego elementu można dojść do dowolnego innego poprzez same elementy znajome (relacja znajomości jest tu niesymetryczna!)

Znaleźć $\lim\limits_{N=\infty} P_{kN}$ (= 0 lub 1 ?).

39) Problemat Auerbach

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej x spełnia warunki następujące:

I. $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(x) \not\equiv 0, 1$

II. $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$

III. $\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$

Jedynymi funkcjami ciągłymi spełniającymi te warunki są $\varphi(x) = |x|^{\alpha}$, gdzie α stałe i $0 < \alpha \leq 1$. Czy istnieją nieciągłe ?

Ad 30) Istnieją; wynika to z tw. Lebesgue'a (Zob. n.p. E. Kamke, Zur Definition der Affinen Abbildung, Jahresb. d. D. M. V., 36 (1927)): istnieje funkcja zespolona zm. zespolonej $w = f(z)$ nieciągła i taka, że: $f(z_1+z_2) = f(z_1)+f(z_2)$, $f(z_1 z_2) = f(z_1)\, f(z_2)$; $\varphi(x) = |f(x)|$ spełnia I, II, III i jest nieciągła. S. Mazur, 10.4.37.

~~39~~ 40) Problemat Banach Ulam 26. VII. 1935

Czy można ustawić miarę kompletnie addytywną dla zbiorów punktowych odcinka (0.1) któraby dla zbiorów mierzalnych (B) schodziła się z miarą Lebesgue'a?

W szczególności czy można ustawić taką miarę na ciele wyjętem na zbiorach PCA?

To samo z dodatkowem zastrzeżeniem że ~~dla~~ zbiory przystające mają mieć równe miary.

41) Problemat Mazur

Czy istnieje przestrzeń 3-wymiarowa typu (B) ~~zdolna~~ o tej własności, że każda przestrzeń 2-wymiarowa typu (B) jest równoważna z jej częścią? Jest to równoważne z pytaniem: Czy istnieje (w 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej) powierzchnia wypukła W posiadająca środek O o tej własności, że każda krzywa wypukła posiadająca środek jest pokrewna (affin) z pewnym przekrojem powierzchni W przez O? Ogólniej, czy przy danem naturalnem $k \geq 2$ istnieje naturalne i oraz przestrzeń i-wymiarowa typu (B) o tej własności, że każda przestrzeń k-wymiarowa typu (B) jest równoważna z jej częścią; przy danem k wyznaczyć najmniejsze i.

42) Problemat Ulam

Każdemu zbiorowi wypukłemu zamkniętemu X zawartemu w kuli K (w przestrzeni euklidesowej) przyporządkowany jest inny zbiór zamknięty wypukły $f(X)$ zawarty w K w sposób ciągły (przy metryce Hausdorffa); czy istnieje wtedy punkt stałości t.j. zbiór X_0 zamknięty wypukły w K taki, że $f(X_0) = X_0$?

Twierdzenie Mazur

Niech $\mathfrak{E}$ będzie klasą zbiorów wypukłych zamkniętych zawartych w kuli K

ad 43) Przypuszczenie Mazura jest prawdziwe. 4/VIII 35 Banach o tej własności, że: 1° gdy $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}$ to $\lambda A+(1-\lambda)B \subset \mathcal{K}$ przy $0 \leq \lambda \leq 1$ ($\lambda A+(1-\lambda)B$ oznacza zbiór punktów $\lambda x+(1-\lambda)y$ przy $x \in A$, $y \in B$); 2° gdy $A_n \in \mathcal{K}$ i ciąg $\{A_n\}$ zbiega do A, to $A \in \mathcal{K}$; przypuśćmy, że $f(X)$ jest funkcją ciągłą w $\mathcal{K}$, której wartości należą do $\mathcal{K}$. Wtedy istnieje punkt stałości t.j. taki $X_0 \in \mathcal{K}$, że $f(X_0)=X_0$. — Przykładami klasy $\mathcal{K}$ są n.p.: klasa wszystkich zbiorów, zamkniętych wypukłych zawartych w $\mathcal{K}$; klasa wszystkich zbiorów zamkniętych wypukłych zawartych w $\mathcal{K}$ o średnicy niewiększej od danej liczby $\rho>0$.

43) Definicja pewnej gry. Mazur

Dany jest zbiór E liczb rzeczywistych. Gra między graczami A i B polega na tem, że: A wybiera dowolny odcinek d_1, B następnie wybiera dowolny odcinek d_2 zawarty w d_1, A następnie wybiera dowolny odcinek d_3 zawarty w d_2 i t. d.; A wygrywa jeżeli przekrój $d_1 d_2 \dots d_n \dots$ zawiera punkt zbioru E, w przeciwnym przypadku przegrywa.

Jeżeli E jest dopełnieniem zbioru 1-ej kategorji, to istnieje metoda przy której A wygrywa; jeżeli E jest zbiorem 1-ej kategorji, to istnieje metoda przy której B wygrywa.

Problemat (Nagroda: 1 flaszka wina S. Ulam)

Czy prawdą jest, że dla A istnieje metoda wygrania tylko dla takich zbiorów E, których dopełnienie jest w jakimś odcinku 1-ej kategorji; podobnie czy metoda wygrania istnieje dla B tylko wówczas gdy E jest zbiorem 1-ej kategorji.

23. 7. 1935.

ad 44) 30.7.1935 Problemat rozwiązany pozytywnie przez Banacha, ~~bez~~ również i bez założenia ciągłości. Dowód opiera się na uwadze: każde dwie proste tej powierzchni albo się przecinają albo ich rzuty na płaszczyznę (xy) są równoległe.

Odmiany gry Mazura (~~[illegible]~~ Ulam)

1). Dany jest zbiór liczb rzeczywistych E. Gracze A i B podają wymieniając po kolei cyfrę 0 lub 1. Gracz A wygrywa jeżeli liczba utworzona z tych cyfr w podanym porządku (w systemie dwójkowym) należy do zbioru E.

Dla jakich zbiorów E istnieje metoda wygrania dla gracza A (gracza B)?

~~[illegible]~~ (Banach)

2) Dany jest zbiór liczb rzeczywistych E. Gracze A i B podają po kolei dowolne liczby rzeczywiste dodatnie z tem że następny podaje liczbę mniejszą niż ostatnio podana. Gracz A wygrywa jeżeli suma szeregu liczb podanych jest liczbą ze zbioru E. To samo pytanie co przy 1).

44) Problemat. H. Steinhaus.

Funkcja ciągła $z=f(x,y)$ przedstawia powierzchnię przez której każdy punkt przechodzą dwie proste leżące całkowicie na powierzchni. Powierzchnia ta jest parabolojdą hyperboliczną, co należy wykazać! (Bez ciągłości?).

Ad 46) Pozytywna odpowiedź na pytanie prof. Banacha wynika z następującego tw. Borsuka: W każdej przestrzeni spójnej, lokalnie spójnej, zupełnej i niejednoprzęgłej istnieje krzywa zwykła zamknięta będąca retraktem.

W ogólnych przestrzeniach liniowych w których mnożenie jest ciągłe pozytywną odpowiedź na problemat prof. Banacha wynika z moich twierdzeń Fund. Math. 26 str. 61

S. Eilenberg.

45) Problemat Banach

Niechaj G będzie grupą metryczną (nieabelową!) zupełną, zaś $U_1(x)$, $U_2(x)$, ... $U_n(x)$ operacjami multyplikatywnemi, określonemi w G i o wartościach należących do G. Wykazać, że jeżeli operacja $U(x) = U_1(x) \cdot U_2(x) \dots U_n(x)$ jest operacją Bairowską to jest również ciągłą.

Twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 2$.

46) Problemat Banach

Czy kula w przestrzeni typu B jest zbiorem jednospójnym (t.zn. że przy każdym rozkładzie na dwa continua A, B iloczyn $A \cdot B$ jest spójny)

47) Problemat Banach

Czy każdą permutację tablicy $\{a_{i,k}\}$ $i, k = 1, 2 \dots \infty$ można ~~do~~ złożyć ze skończonej liczby permutacyj o tej własności, że albo wiersze przechodzą zawsze na wiersze, albo kolumny zawsze na kolumny. (Vide problemat Ulama 20)

18) Odpowiedź twierdząca, Mazur, 15 lutego 1939. (rkps. nieopublikowany).

48) Problemat Mazur - Banach

Niechaj E będzie zbiorem przeliczalnym, zamkniętym i ograniczonym liczb rzeczywistych zaś W zbiorem wszystkich funkcyj rzeczywistych ciągłych określonych w E.
Czy przestrzeń W jest izomorficzna z przestrzenią c [tj. ciągów zbieżnych] jeśli normę funkcji $f(x) \in W$ określimy: $\|f\| = \max\limits_{x \in E} |f(x)|$

49) Problemat Mazur - Banach

Czy istnieje przestrzeń E typu B o własności (W) uniwersalna dla wszystkich przestrzeni typu (B) o własności (W)?
Pytanie powyższe zbadać dla następujących własności (W)

1) Przestrzeń jest ośrodkowa i słabo kompaktyczna (tj. z każdego ciągu ograniczonego można wybrać ciąg słabo zbieżny do elementu)
2) Przestrzeń zawiera bazę (przeliczalną)
3) Przestrzeń sprzężona jest ośrodkowa

Przestrzeń E jest uniwersalna z izometrycznie (wzgl. izomorficznie) dla przestrzeni danej klasy K, jeśli każda przestrzeń tej klasy jest izometryczna (wzgl. izomorficzna) z częścią liniową przestrzeni E.

ad 52) Rozw. prez Mazurkiewicza

50) Problemat Banach

Wykazać, że całka Denjoy nie jest funkcjonałem Bairowskim w przestrzeni S (tj. ~~fa~~ w przestrzeni funkcyj mierzalnych).

51) Problemat Mazur

a) Czy zbiór funkcyj mierzalnych w $\langle 0,1\rangle$ o tej własności, że każde dwie funkcje tego zbioru są do siebie ortogonalne, jest conajwyżej przeliczalny? (Nie zakładam, że funkcje są całkowalne z kwadratem!)

b) Analogiczne pytanie dla ciągów: Czy zbiór ciągów o tej własności, że każde dwa ciągi $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ tego zbioru są do siebie ortogonalne t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n = 0$, jest conajwyżej przeliczalny?

52) Problemat Banach

Wykazać, że zbiór funkcyj ciągłych w przedziale $(0,1)$ mających wszędzie pochodną nie jest zbiorem Borelowskim w przestrzeni (C) (wszystkich funkcyj ciągłych w $(0,1)$).

[Można wykazać, że nie jest zbiorem F_σ i że jest zbiorem CA]

(Ad 53) Istnieje płat powierzchniowy C postaci $z=f(x,y)$, $0\leq x,y\leq 1$ spełniający podane warunki lecz nie posiadający skończonego pola: Mazur, 1. VIII. 35.

Ad 55) W przypadku przestrzeni euklidesowych rozwiązanie dla układu skończonej liczby wielomianów: istnieją podstawienia liniowe o wyznaczniku $\neq 0$ przy których wszystkie wielomiany układu danego przechodzą na wielomiany takie od mniejszej liczby (tych samych) zmiennych. 3. 8. 35. [illegible]

(Studia Math. 5)

53) Problemat Banach

Płat powierzchniowy C (tj. jedno-jednoznaczny ciągły obraz także koła) ma własność następującą:
Do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać takie $\eta > 0$ że dowolne dwa punkty płata C (o odległości mniejszej niż η) dadzą się połączyć łukiem leżącym na C o długości mniejszej niż ε.
Wykazać, że płat (C) ma pole skończone i prawie wszędzie płaszczyznę styczną.

54) Problemat Schauder

a) W danym zbiorze H wypukłym, zamkniętym, kompaktycznym, położonym w przestrzeni typu F, określone jest odwzorowanie ciągłe $U(x)$ na część. Czy istnieje punkt stałości? (Fixpunkt)
b) Ten sam problem rozstrzygnąć dla przestrzeni topologicznych linjowych dowolnych, względnie takich, w których istnieją otoczenia wypukłe dowolnie małe. (Rozwiązane dla przestrzeni typu F_0 nawet twierdzenie ogólniejsze: H nie musi być kompaktyczne, tylko $U(H)$ kompaktyczne)

55) Problemat Mazur

W przestrzeni E n-wymiarowej euklidesowej wzg. ogólniej typu (B) dany jest wielomian $W(x)$ ograniczony w ε-otoczeniu pewnego zbioru nieograniczonego $R \subset E$ (ε-otoczenie zbioru R = zbiór punktów odległych od R o mniej jak ε). Czy istnieje wtedy wielomian $V(x)$ oraz wielomian stopnia 1-go $\Phi(x)$

Rosa Ortiz

taki, że: 1° $\mathcal{Y}(x) = \mathcal{V}(\Phi(x))$; 2° zbiór $\Phi(\mathcal{R})$ t.j. obraz zbioru $\mathcal{R}$ przy odwzorowaniu $\Phi(x)$, jest ograniczony?

56) Problemat Mazur-Orlicz

W przestrzeni E typu (B) dany jest funkcjonał $F(x)$ stopnia m nieciągły ($F(x)$ jest stopnia m $\equiv$ przy $x_0, h_0 \in E$ istnieją liczby $a_0, \dots a_m$ takie, że $F(x_0 + t h_0) = a_0 + t a_1 + \dots + t^m a_m$ dla t wymiernych). Czy istnieją wtedy punkty $x_n \in E$ takie, że $x_n \to 0$ oraz $|F(x_n+x)| \to +\infty$ lub choćby $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |F(x_n+x)| = +\infty$ dla wszystkich $x \in E$? Nierozstrzygnięte dla przestrzeni E euklidesowych.

57) Problemat Ruziewicz

Dane są dwie funkcje $\omega(h)$ i $\varphi(h)$, malejące wraz z $|h|$ do 0, spełniające warunki:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{|h|} = \infty, \quad \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{\varphi(h)} = \infty.$$

Czy istnieje funkcja $f(x)$, spełniająca warunki:

$$1)\ |f(x+h) - f(x)| < \omega(h), \quad 2)\ \overline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \right| = \infty \ ?$$

58) Problemat Ruziewicz.

Zbiór E_1 (liczb rzeczyw.) poprzedza zbiór E_2, co piszemy $E_1 \, p \, E_2$, jeżeli: 1°) E_1 jest mniejszej mocy niż E_2 (w znakach: $E_1 \prec E_2$),
2°) nie istnieje zbiór E_3 taki, by $E_1 \prec E_3 \prec E_2$.

a) Czy istnieją zbiory A, B, C i $\{A_n\}$, $n=1,2,\dots N$, $(N>1)$, takie, że $\quad A p B p C$

i $\quad A p A_1 p A_2 p \ldots p A_n p C$?

(Uwaga: Dla $N=2$ zbiory takie istnieją; por. Fund. Math., XV, str. 95)

b) Czy istnieją zbiory A, B, C i $\{A_n\}$, $n=1,2,\ldots$ in inf., takie, że $\quad A p B p C$

i $\quad A p A_1 p A_2 p A_3 p \ldots$ in inf.,

przyczem $\quad A_n \{ C \quad$ dla $n=1,2,3,\ldots$

59) ~~Czy~~ Problemat. Ruziewicz

Czy można rozbić kwadrat na skończoną liczbę samych różnych kwadratów?

60) Problemat. Ruziewicz

Czy przy każdem $\varepsilon > 0$ można przedstawić powierzchnię kuli jako sumę skończonej liczby obszarów domkniętych, spójnych, nie mających z sobą punktów wewnętrznych wspólnych?

O brzegach tych obszarów zakładamy że

a) są wielokątami

b) krzywemi o długości skończonej

c) zbiorami miary 0

61) Problemat. Steinhaus. (por. 44). 31. VII. 1935.

a) Wyznaczyć powierzchnie $z = f(x,y)$ w których każdym punkcie przecinają się dwie do siebie przystające krzywe płaskie

b.) Wyznaczyć powierzchnie $z = f(x,y)$ w których każdym punkcie przecinają się dwie krzywe płaskie przystające do jednej (dla wszystkich punktów tejsamej) krzywej.

62) Problemat Mazur - Ulam

W grupie G dane są podgrupy G_n $n = 1, 2, \ldots$ in inf. o własnościach następujących: $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n + \cdots$, $G_n \subset G_{n+1}$, G_n jest izomorficzna z G_1. Czy G jest izomorficzna z G_1?

63) Problemat Mazur - Ulam

Zbiór E elementów grupy G nazywamy bazą, gdy grupa rozpięta na E jest identyczna z G zaś żadna część właściwa zbioru E własności tej nie posiada. Gdy w grupie G istnieje baza, to czy w każdej podgrupie jej H istnieje również baza?

64) Problemat Mazur

W przestrzeni E typu (B) dane są dwa ciała wypukłe A i B, przyczem odległość ich jest dodatnia (ciało wypukłe $\equiv$ zbiór wypukły, zamknięty, ograniczony, mający punkty wewnętrzne). Czy istnieje wtedy płaszczyzna H, ad 61a): Własność taką mają wszystkie przestrzenie obwodowe — czy tylko one, niewiadomo. (31. VII. 1935, Rus[illegible])

[? H. St.]

Ad 62) Według uwagi R. Baera odpowiedź twierdząca: G_n grupa l. wym. o mianowniku n, $G = \Sigma G_n \equiv$ grupa liczb wymiernych.

ad 64) Twierdzenie jest prawdziwe nawet wtedy, gdy ~~nie~~ obie bryły się stykają, ale nie posiadają wspólnych punktów wewnętrznych.

11/I. 1936 Eidelheit.

która oddziela ciała A, B, t.j. ma tę własność, że jedno z ciał A, B leży po jednej, drugie zaś po drugiej jej stronie. (płaszczyzna = zbiór punktów x spełniających równanie $F(x) - c = 0$, gdzie $F(x)$ jest funkcjonałem liniowym $\neq 0$ zaś c stałą)

65) Problemat Mazur

W przestrzeni E typu (B) dany jest zbiór wypukły, nigdziegęsty W, zawierający 0. Czy najmniejszy zbiór wypukły zawierający W symetryczny względem 0 (t.j. zbiór utworzony z elementów $x-y$, gdzie $x \in W$, $y \in W$) jest zbiorem nigdziegęstym?

66) Problemat Mazur

Funkcja rzeczywista $z = f(x,y)$ zmiennych rzeczywistych x, y posiada pochodne cząstkowe 1-ego rzędu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ oraz pochodne cząstkowe 2-ego rzędu czyste $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Czy istnieją wtedy prawie wszędzie pochodne cząstkowe 2-ego rzędu mieszane $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$? Według uwagi p. Schaudera twierdzenie jest prawdziwe przy następujących założeniach dodatkowych: pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ są absolutnie ciągłe w sensie Tonelli'ego a pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ są całkowalne z kwadratem. Analogiczne pytanie dla n zmiennych.

67) Problemat Banach. Odmiana gry Mazura. 1/VIII 1935

Połową zbioru E (w znakach $\frac{1}{2}E$) nazywamy dowolny zbiór $H \subset E$ taki, że zbiory E, H, $E-H$ są równej mocy.

a) Gracze A i B podają kolejno na przemian

Ad 65) Dodatkowe. Zbiór W złożony z funkcyj niemalejących w przestrzeni (C) funkcyj ciągłych jest wypukły nigdziegęsty, zawiera 0; zbiór wypukły zawierający W symetryczny względem 0 zawiera wszystkie funkcje o wahaniu ograniczonym, więc nie jest nigdziegęsty.

Mazur.

Istnieje metoda gry pozwalająca na uzyskanie tego, że iloczyn zbiorów jest pusty. Rozwiązanie podał p. J. Schreier.

24. VII. 1935.

zbiory $\{E_i\}$ $i=1,2,\dots$ in inf. tak aby $E_i = \frac{1}{2}E_{i-1}$ $i=1,2\dots$ przyczem E_0 jest danym zbiorem abstrakcyjnym. Gracz A wygrywa jeżeli iloczyn $E_1 \cdot E_2 \dots E_i \cdot E_{i+1} \dots$ jest pusty.

b) Gra podobna jak pod a) z tem, że $E_i = \frac{1}{2}[E_0 - E_1 - \dots - E_{i-1}]$ $i=2,3,\dots$ in inf, przyczem $E_1 = \frac{1}{2}E_0$. Gracz A wygrywa, jeżeli $E_1 + E_2 + \dots = E_0$.

Czy istnieje metoda wygrania dla gracza A.

Jeżeli E_0 jest zbiorem mocy konfinalnej $\aleph_0$ wówczas gracz A posiada metodę wygrania. Czy tylko wtedy? W szczególności rozwiązać problemat gdy E_0 jest zbiorem liczb niewymiernych.

68) Problem. St. Ulam

Dana jest rozmaitość n-wymiarowa R o tej własności, że każdy przekrój (brzegu) R hyperpłaszczyzną $n-1$-wymiarową daje $n-2$-wymiarową powierzchnię zamkniętą (= zbiór homeomorficzny z kulą o tym wymiarze). Udowodnić, że R jest zbiorem wypukłym. Pytanie rozstrzygnięte dla $n=3$ przez Schreiera pozytywnie (tj. zn.: rozmaitość położona w R_3 o tej własności że każdy przekrój ~~daje~~ płaszczyzną daje krzywą pojedynczą zamkniętą jest zbiorem wypukłym).

ad 69). Odpowiedź negatywna. J. Marus 21/XII. 1936

6.9) Problemat Mazur-Ulam

Zagadnienie scharakteryzowania przestrzeni typu (B) z pośród przestrzeni metrycznych: Dana jest przestrzeń metryczna zupełna E o następujących własnościach: 1° gdy $p, q \in E$, to istnieje dokładnie jedno $x \in E$, takie, że x jest środkiem metrycznym pary (p,q); 2° gdy $p, q \in E$, to istnieje dokładnie jedno $x \in E$, takie, że q jest środkiem metrycznym pary (p,x). Czy przestrzeń E jest wtedy izometryczna z pewną przestrzenią typu (B)? – Każda przestrzeń typu (B) posiada własności 1° i 2°.

Definicja środka metrycznego pary punktów (p,q) przestrzeni metrycznej E: Bierzemy zbiór wszystkich punktów $x \in E$ takich, że $\overline{px} + \overline{xq} = \overline{pq}$; oznaczmy go przez R. Przez R_1 oznaczamy zbiór wszystkich punktów $r \in R$ o tej własności, że $\overline{rx} \leq \frac{1}{2}\delta(R)$ dla wszystkich $x \in R$, gdzie $\delta(R)$ jest średnicą zbioru R; przez R_{n+1} oznaczamy zbiór wszystkich punktów $r \in R_n$ o tej własności, że $\overline{rx} \leq \frac{1}{2}\delta(R_n)$ dla wszystkich $x \in R_n$, gdzie $\delta(R_n)$ jest średnicą zbioru R_n $(n = 1, 2, \dots)$. Można okazać, że przekrój $R_1 R_2 \cdots R_n \cdots$ zawiera conajwyżej jeden punkt; jeżeli punkt taki istnieje, to nazywamy go środkiem metrycznym pary punktów (p,q).

7.) Problemat Ulama

Udowodnić następujący lemmat: Niech $f_1(x_1, x_2 \dots x_n; t_1, t_2 \dots t_r)$ będzie wielomianem $0 \le x_i \le 1$; $0 \le t_j \le 1$, $i = 1 \dots n$; $j = 1 \dots r$ identycznie zerującym się w punkcie $X = (0,0 \dots 0; t_1 \dots t_r)$ rozpiętym o zmiennych x_i i t_j; zaś ε liczbą dodatnią.

Istnieje wielomian f_2 o tych samych zmiennych i stałe K i ρ dodatnie, niezależne od ε (= 1 ?) tak że spełnione są następujące warunki.

1° $\quad |f_1(x_1 \dots x_n; t_1 \dots t_r) - f_2(x_1 \dots x_n; t_1 \dots t_r)| < \varepsilon.$

2°. Pochodne względem zmiennych x w punkcie $x_i = 0$ $i = 1 \dots n$ oddają zachowanie się wielomianu tzn.: jeśli T' i T'' oznaczają dla krótkości takie 2 układy zmiennych $t_1' \dots t_r'$ i $t_1'' \dots t_r''$ że zachodzi $|f_2(x_1 \dots x_n; T') - f_2(x_1 \dots x_n; T'')| < \varepsilon$ to wtedy przy każdym i:

$$\left| \left. \frac{\partial f_2(x_1 \dots x_n; t_1' \dots t_r')}{\partial x_i} \right|_{x_1 = x_2 = \dots x_n = 0} - \left. \frac{\partial f_2(x_1 \dots x_n; t_1'' \dots t_r'')}{\partial x_i} \right|_{x_1 = x_2 = \dots x_n = 0} \right| < K.\varepsilon$$

3° Pochodne względem przynajmniej jednej ze zmiennych x (w punkcie $x_1 = x_2 = \dots = 0$) są istotnie różne od zera tzn. istnieją punkty T^* i T^{**} takie że

$$\left| \left. \frac{\partial f_2(x_1 \dots x_n; T^*)}{\partial x_i} \right|_{x_1 = x_2 = \dots = 0} - \left. \frac{\partial f_2(x_1 \dots x_n; T^{**})}{\partial x_i} \right|_{x_1 = x_2 = \dots 0} \right| > \rho.$$

Z pozytywnego rozstrzygnięcia tego lematu wynika pozytywna odpowiedź na zagadnienie Hilberta dotyczące analityczności grup n-parametrowych; — rozwiązane przez v. Neumanna dla grup zwartych.

7[illegible]) Problemat Ulam

Znaleźć wszystkie permutacje $f(n)$ ciągu liczb naturalnych które mają taką własność że gdy ~~{~~ $\{n_k\}$ jest dowolnym pod-ciągiem c. l. naturalnych ~~#~~ o gęstości α, to ciąg $f(n_k)$ ma też gęstość α w zbiorze wszystkich liczb naturalnych.

7[illegible]) Problemat Mazur

Niech E będzie przestrzenią typu (F) o następującej własności: gdy $Z \subset E$ jest zbiorem zwartym, to najmniejszy zbiór wypukły zawierający Z jest również zwarty. Czy E jest wtedy przestrzenią typu (F_0)? (t. zn. czy posiada własność następującą: gdy $x_n \in E$ $(n=1,2,\dots)$, $x_n \to 0$ zaś $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |t_n|$ jest szeregiem liczb zbieżnym, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ jest zbieżny)

7[illegible]) Problemat Mazur-Orlicz

Niech c_n oznacza najmniejszą liczbę o tej własności, że gdy $F(x_1, \dots x_n)$ jest dowolną operacją n-linjową symetryczną (w przestrzeni typu (B) i o wartościach z takiej przestrzeni), to $\max\limits_{|x_1| \leq 1, \dots |x_n| \leq 1} |F(x_1, \dots x_n)| \leq c_n \cdot \max\limits_{|x| \leq 1} |F(x, \dots x)|$; wiadomo (p. Banach), że c_n istnieje. Można okazać, że liczba c_n spełnia nierówności $\frac{n^n}{n!} \leq c_n \leq \frac{1}{n!} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^n$ (Mazur-Orlicz).
Czy jest $c_n = \frac{n^n}{n!}$?

[illegible]) Problemat Mazur-Orlicz

Dany jest wielomian $W(t_1, \dots t_n) = \sum\limits_{k_1 + \dots + k_n = n} a_{k_1 \dots k_n} t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n}$ zmiennych rzeczywistych $t_1, \dots t_n$ jednorodny stopnia n; przypuśćmy, że $|W(t_1, \dots t_n)| \leq 1$ dla wszystkich $t_1, \dots t_n$ takich, że $|t_1| + \dots + |t_n| \leq 1$. Czy jest wte-

Ad 75) Z rozwiązania 55) wynika, że twierdzenie jest prawdziwe w przypadku przestrzeni euklidesowej: Charuz.

czy $|a_{k_1 \ldots k_n}| \leq \dfrac{n^n}{k_1! \ldots k_n!}$?

75) <u>Problemat Mazur</u>

W przestrzeni E n-wymiarowej euklidesowej wzgl. ogólniej typu (B) dany jest wielomian $W(x)$; α oznacza liczbę $\neq 0$. Gdy wielomian $W(x)$ jest ograniczony w ε-otoczeniu pewnego zbioru $R \subset E$, to czy jest ograniczony w δ-otoczeniu zbioru αR t.j. zbioru złożonego z elementów αx przy $x \in R$?

(Zob. problemat 55)

76) <u>Problemat Mazur</u>

Niech dana będzie (w przestrzeni euklidesowej 3-wymiarowej) powierzchnia wypukła W i punkt O w jej wnętrzu. Uważajmy zbiór V wszystkich punktów P o tej własności, że długość odcinka PO równa się polu przekroju płaskiego powierzchni W przez O, prostopadłego do tego odcinka. Czy zbiór V stanowi powierzchnię wypukłą ?

77) <u>Problemat Ulam</u> Nagroda za a): flaszka wina Eilenberg

a) Niech A i B będą przestrzeniami topologicznemi o tej własności, że przestrzenie A^2 i B^2 są homeomorficzne. Czy przestrzeń A jest homeomorficzna z przestrzenią B ?

b) Niech A i B będą przestrzeniami metrycznemi o tej własności, że A^2 jest izometryczne z B^2; czy A jest izometryczne z B?

79)

Zadanie. W przestrzeni kartez. n-wymiarowej:

$$y_1 = x_1 + K$$
$$y_2 = x_2 + \varphi_2(x_1)$$
$$y_3 = x_3 + \varphi_3(x_1, x_2)$$
$$\vdots$$
$$y_n = x_n + \varphi_n(x_1 \ldots x_{n-1})$$

gdzie K stałe dowolne a $\varphi_2 \ldots \varphi_n$ są dowolnymi wielomianami swoich zmiennych. Odwracalność odwzorowania wydaje się [illegible]

10.35. [illegible]

(c.d. pr. 77). c) Niech A i B będą grupami abstrakcyjnemi takiemi że A^2 i B^2 są grupami izomorficznemi. Czy A jest izomorficzne z B?
(przez A^2 wzgl. B^2 rozumie się zbiór uporządkowanych par elementów zbioru A (wzgl. B). — Topologji, względnie (w wypadku c) działanie grupowe w takich zbiorach określa się w oczywisty sposób. — Metryka w takim zbiorze, gdy zbiór wyjściowy jest przestrzenią ~~euklidesową~~ metryczną określona jest po „euklidesowemu" przez pierwiastek z sumy kwadratów odległości rzutów)

78) Problemat. Steinhaus 2. VIII. 1935.
Znaleźć wszystkie powierzchnie o następującej własności: przez każdy punkt powierzchni przechodzą dwie krzywe, odpowiednio przystające do dwóch danych krzywych A i B. Por. problemat 61.
(Powierzchnią taką jest np. walec i krzywemi A i B są tutaj koło i prosta.)

79) Problemat Mazur-Orlicz

Wielomian $y = U(x)$ odwzorowuje jedno-jednoznacznie przestrzeń X typu (B) na przestrzeń Y typu (B); odwrócenie jego $x = U^{-1}(y)$ jest również wielomianem. Czy wtedy wielomian $y = U(x)$ jest stopnia 1-ego? Pytanie nierozstrzygnięte nawet w przypadku, gdy X oraz Y jest euklidesową płaszczyzną; w tym przypadku brzmi ono: Dane jest odwzorowanie jedno-jednoznaczne $t' = \varphi(t,s)$, $s' = \psi(t,s)$ płaszczyzny na siebie, gdzie $\varphi(t,s)$, $\psi(t,s)$ są wielomianami; od-

[illegible]

wzorowanie odwrotne do niego ma również postać $t = \Phi(t', s')$, $s = \Psi(t', s')$ gdzie $\Phi(t', s')$, $\Psi(t', s')$ są wielomianami. Czy wtedy odwzorowanie to jest odwzorowaniem pokrewnem t.j. postaci $t' = a_1 t + b_1 s + c_1$, $s' = a_2 t + b_2 s + c_2$ gdzie $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$?

80) Problemat Mazur

Niech E będzie przestrzenią metryczną zupełną; przez E^∞ oznaczmy przestrzeń metryczną zupełną jaką stanowi zbiór wszystkich ciągów $\{e_n\}$ elementów z E, gdy przez odległość dwóch takich ciągów $\{e_n'\}$, $\{e_n''\}$ rozumiemy liczbę $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{(e_n', e_n'')}{1 + (e_n', e_n'')}$ (przy $e', e'' \in E$ oznaczamy przez (e', e'') odległość elementów e', e''). Gdy dany jest zbiór $R \subset E$, to przez R_δ oznaczamy zbiór wszystkich ciągów $\{r_n\}$ elementów z R, zaś przez R_σ zbiór wszystkich takich ciągów $\{r_n\}$ elementów z R, że $r_n = r_0$ prawie stale; r_0 jest ustalonym elementem z R. Czy prawdą jest, że: gdy zbiór R jest F_σ lecz nie domknięty, to R_δ jest $F_{\sigma\delta}$ lecz nie F_σ; gdy zbiór R jest $F_{\sigma\delta}$ lecz nie F_σ, to R_σ jest $F_{\sigma\delta\sigma}$ lecz nie $F_{\sigma\delta}$; ogólniej gdy R jest $F_{2\xi+1}$ lecz nie $F_{2\xi}$, to R_δ jest $F_{2\xi+2}$ lecz nie $F_{2\xi+1}$ a gdy R jest $F_{2\xi+2}$ lecz nie $F_{2\xi+1}$, to R_σ jest $F_{2\xi+3}$ lecz nie $F_{2\xi+2}$ ($F_0 = F$, $F_1 = F_\sigma$, $F_2 = F_{\sigma\delta}$, $F_3 = F_{\sigma\delta\sigma}, \ldots$). Zbadać w szczególności przypadek, gdy przestrzeń E jest zwarta wzgl. typu (B) lub (F).

81) Problemat. Steinhaus. (por. 44 i 61). 6/8 1936.

Paraboloida hyp. (i płaszczyzna) jest na dwa sposoby złożona z krzywych przystających: z prostych i parabol (AA, BB). Czy są inne powierzchnie tego rodzaju? Czy są złożone z (AB)(CD)? Czy (exceptis excipiendis) muszą być postaci $z = f(x) + g(y)$ wszystkie powierzchnie posiadające w każdym punkcie dwie przecinające się krzywe $\cong A$, $\cong B$? (Płaszczyzna, kula, walec kołowy są uważane za trywialne).

82) Definicja. Steinhaus:
$f(t)$ jest niezależna (w sensie korrelacji) od $y_1(t), y_2(t) \ldots y_n(t)$, jeżeli $(0 \le t \le 1)$ dla każdej funkcji z n zmiennych $F(y_1, y_2 \ldots y_n)$ i dla każdej pary liczb α_1, β_1, α_2, β_2 zbiory określone j. n.

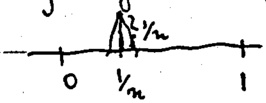
$$A = E_t(\alpha_1 \le f(t) \le \beta_1), \quad B = E_t(\alpha_2 \le F(y_1(t), y_2(t) \ldots y_n(t)) \le \beta_2)$$

mają własność $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Zagadnienia: (funkcje mierzalne, O p. w. oznacza 0). 1) Czy zbiór f. wzajemnie niezależnych (t. zn. każda niezależna od wszystkich innych z nich) musi być przeliczalny? 2) Czy zbiór taki musi być ortogonalny-zupełny, lub też tylko zupełny? [6.VIII.35.]

[Uwaga: Pojęcie niezależności tu wprowadzone jest tem, które oznaczają przyrodnicy terminem „brak korrelacji". Jej definicje są jednak niewyraźne.]

ad 83 Odpowiedź negatywna. Określamy funkcję $f(x)$ jako trójkąty w przedziałach $(1/n-\varepsilon_n, 1/n+\varepsilon_n)$ o wysokości $1/n$



Marcinkiewicz

ad 85) Twierdzenie prawdziwe: Studia Math. T IX Banach

83) Problemat Auerbach. Wiadomo o funkcji ciągłej $f(x)$ że w każdym punkcie spełnia warunek

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\alpha}} \right| < M \quad (M \text{ stała}, \ 0<\alpha<1, \ \alpha \text{ stałe})$$

Czy funkcja $f(x)$ spełnia jakiś warunek Höldera?
(Łatwo wykazać, że w każdym przedziale pewnego wszędzie gęstego zbioru przedziałów spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α. i tą samą stałą.

84) Problemat Auerbach. O powierzchni wypukłej w przestrzeni 3-wymiarowej wiadomo, że wszystkie przekroje płaskie, których płaszczyzny przechodzą przez ten sam stały punkt O_1 wewnątrz powierzchni, są [illegible] [illegible]. Czy powierzchnia musi być elipsoidą?

85) Problemat Banach

a) Czy istnieje ciąg ortogonalny, unormowany, zupełny (w L^2) $\{\varphi_n(t)\}$ funkcji mierzalnych $(0 \le t \le 1)$, taki że rozwinięcie każdego ~~wielomianu~~ wielomianu jest prawie wszędzie rozbieżne.

b) To samo pytanie, jeżeli zamiast wielomianów będziemy rozpatrywać funkcje analityczne dla $0 \le t \le 1$.

Można udowodnić, że odpowiedź na pytanie a) jest pozytywna, jeżeli dopuścimy tylko wielomiany stopnia niższego niż n (n dowolne z góry obrane).

86) Problemat Banach

Czy ciąg funkcyj $\{\varphi_n(t)\}$ ortogonalnych, unormowanych, mierzalnych i wspólnie ograniczonych $(0 \leq t \leq 1)$ da się zawsze uzupełnić funkcjami wspólnie ograniczonemi do ciągu ortog. unorm. zupełn. (Rozpatrzyć przypadek gdy do uzupełnienia potrzeba ∞ wiele funkcyj)

87) Problemat Banach

Niechaj operacja $y = U(x)$, określona w L^{β} $(\beta \geq 1)$, której przeciwdziedzina mieści się w L^{β}, będzie ciągła i spełniająca warunek Lipschitza. Załóżmy, że ~~pewni~~ dla pewnego $\alpha > \beta$ istnieje stała M_α taka, że jeżeli $x \in L^{\alpha}$ wówczas $U(x) \in L^{\alpha}$ i $\|U(x)\|_\alpha \leq M_\alpha \|x\|_\alpha$.

Wykazać, że dla każdego γ takiego, że $\beta \leq \gamma < \alpha$, istnieje M_γ o własności:

jeżeli $x \in L^{\gamma}$ wówczas $U(x) \in L^{\gamma}$ i $\|U(x)\|_\gamma \leq M_\gamma \cdot \|x\|_\gamma$

~~Orlicz wykazał, że~~ Twierdzenie jest prawdziwe przy dodatkowych założeniach: U jest operacją liniową, (wynika z twierdzenia M. Riesza.).

Banach wykazał prawdziwość twierdzenia gdy $\alpha = \infty$.

$\left[\ \|x(t)\|_\gamma = \left\{\int_0^1 |x(t)|^\gamma dt\right\}^{\frac{1}{\gamma}}\ \right]$

88) Problemat Mazur

Dany jest ciąg liczb (a_n) o tej własności, że przy każdym ciągu liczb ograniczonym (x_n) szereg $|a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n+\dots|+|a_2x_1+a_3x_2+\dots+a_{n+1}x_n+\dots|+\dots+|a_mx_1+a_{m+1}x_2+\dots+a_{m+n-1}x_n+\dots|+\dots$ jest zbieżny. Czy wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|$ jest zbieżny?

Uwaga: Gdy dane są ciągi liczb $(a_{1n}), (a_{2n}), \dots (a_{mn}), \dots$ o tej własności, że przy każdym ciągu liczb ograniczonym (x_n) szereg $|a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n+\dots|+|a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n+\dots|+\dots+|a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n+\dots|+\dots$ jest zbieżny, to według uwagi p. Banacha szereg $\sum_{m=1}^{\infty}(|a_{m1}|+|a_{m2}|+\dots+|a_{mn}|+\dots)$ może być rozbieżny.

89) Problemat Mazur

Niech H będzie ciałem wypukłem w przestrzeni (L^2), którego brzeg H_b nie zawiera odcinka; niech $x_n \in H$ $(n=1,2,\dots)$, $x_0 \in H_b$ i przytem ciąg (x_n) niech będzie słabo zbieżny do x_0. Czy wtedy ciąg (x_n) jest silnie zbieżny do x_0? Wiadomo, że twierdzenie jest prawdziwe w przypadku gdy H jest kulą. To samo zagadnienie zbadać w przypadku innych przestrzeni.

90) Problemat Ulam - Auerbach

Wiadomo że każda grupa półprosta Liego (n.p. grupa obrotów w n zmiennych) zawiera 4 elementy wytwarzające podgrupę wszędzie gęstą. Czy można tę liczbę 4 obniżyć?

Ad 92) Istnieją ciągi (λ_n'), (λ_n'') spełniające warunki $1°, 2°, 3°, 4°_s$, ~~takie że~~ przy pewnym ciągu ograniczonym (s_n) [złożonym z 0 oraz 1] granice $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_1' s_1 + \dots + \lambda_n' s_n}{\lambda_1' + \dots + \lambda_n'}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_1'' s_1 + \dots + \lambda_n'' s_n}{\lambda_1'' + \dots + \lambda_n''}$ istnieją, lecz są różne : Sharuk, 10. VIII. 35.

93) The theorem is true; we can represent R by ~~f~~ functions $x = f_1(t)$, $y = g_1(t)$, continuous and of bounded variation, in such a way that the length of the curve (by Jordan's definition) is at most twice the Carathéodory measure of R. A. J. Ward.
23. 3. 37

91) Problemat Mazur

W przestrzeni n-wymiarowej euklidesowej dane jest ciało wypukłe W mające środek o tej własności, że jest ono pokrewne z ciałem sprzężonem do niego; czy W jest elipsoidą? Odpowiedź jest negatywna w przypadku, gdy n jest liczbą parzystą; przy n nieparzystem zagadnienie nierozwiązane. Jest ono równoważne z takiem: Gdy przestrzeń n-wymiarowa typu (B) jest izometryczna z przestrzenią do niej sprzężoną, to czy jest izometryczna z przestrzenią euklidesową?

92) Problemat Mazur

Dany jest ciąg ograniczony liczb (s_n). Wtedy istnieją ciągi liczb (λ_n) o tej własności, że: 1° $\lambda_n > 0$ $(n=1,2,..)$; 2° $\lambda_1+\lambda_2+\dots = +\infty$; 3° ciąg $\left(\frac{\lambda_1 s_1+\dots+\lambda_n s_n}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}\right)$ jest zbieżny. Czy istnieją ciągi liczb (λ_n), które obok własności 1°, 2°, 3° spełniają jeszcze warunek: 4°_a ciąg (λ_n) jest pełno-monotoniczny t. j. wszystkie różnice jego $\Delta^1_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$, $\Delta^2_n = \Delta^1_n - \Delta^1_{n+1}, \dots$ są nieujemne, lub choćby tylko warunek: 4°_b ciąg (λ_n) jest nierosnący? Gdy dane są dwa ciągi (λ'_n), (λ''_n) spełniające warunki 1°, 2°, 3°, 4°_a względnie tylko 1°, 2°, 3°, 4°_b, to czy granice $\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda'_1 s_1+\dots+\lambda'_n s_n}{\lambda'_1+\dots+\lambda'_n}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda''_1 s_1+\dots+\lambda''_n s_n}{\lambda''_1+\dots+\lambda''_n}$ mogą być różne?

93) Problemat Mazur

Gdy R jest zbiorem w płaszczyźnie, to układ funkcyj $x=f(t)$, $y=g(t)$, $(0\le t\le 1)$ nazywamy opisem parametrycznym zbioru R, gdy zbiór punktów $(f(t), g(t))$ jest identyczny z R. Przypuśćmy, że dla danego zbioru R istnieje opis parametryczny $x=f_1(t)$, $y=g_1(t)$, przy którym funkcje $f_1(t)$, $g_1(t)$ są ciągłe i istnieje zarazem opis parametryczny $x=f_2(t)$, $y=g_2(t)$ przy którym funkcje $f_2(t)$, $g_2(t)$ są o wahaniu skończonem; czy istnieje wtedy opis parametryczny zbioru R $x=f(t)$, $y=g(t)$ przy którym funkcje $f(t)$, $g(t)$ są jednocześnie ciągłe i o wahaniu skończonem? Przypuśćmy, że dla danego zbioru R istnieją opisy parametryczne $x=f(t)$, $y=g(t)$ przy których funkcje $f(t)$, $g(t)$ są o wahaniu skończonem (i ciągłe); przy każdym takim opisie wyznaczamy długość $d(f(t),g(t))$ zbioru R i bierzemy kres dolny liczb $d(f(t),g(t))$ - oznaczmy go przez d; czy istnieje opis parametryczny zbioru R $x=f_0(t)$, $y=g_0(t)$ - przy którym funkcje $f_0(t)$, $g_0(t)$ są o wahaniu skończonem (i ciągłe), przyczem $d(f_0(t),g_0(t))=d$? To samo zagadnienie w przypadku przestrzeni euklidesowej wielowymiarowej.

94) Problemat Łomnicki - Ulam

Niechaj $\lim\limits_{n=\infty} \frac{k_n}{n} = f\,(<1)$, przyczem stałe $k_n<n$; udowodnić że jest

$$\lim_{n=\infty} \int_0^p \underset{\substack{\{x_1+\dots x_n=np\\ 0\le x_i\le 1,\ i=1\dots n\}}}{\iint\dots\int} x_1\dots x_{k_n}\cdot(1-x_{k_n+1})\dots(1-x_n)\,dx_1\dots dx_n\,dp = \begin{cases}0 & p<f\\ 1 & p\ge f\end{cases}$$

Por. problemat 17.

95) Problemat Schreier - Ulam

Czy grupa R liczb rzeczywistych (ze względu na dodawanie) jest zawarta izomorficznie w grupie S_∞ wszystkich permutacji ciągu liczb naturalnych?

ad 96). Nie można umotywować w sposób zwarty.
Schreier - Ulam, listopad 1935.

96) Problemat Ulam

Czy można grupę S_∞ wszystkich permutacyj ciągu liczb naturalnych tak zmetryzować, żeby działanie grupowe (składania permutacji) było funkcją ciągłą i żeby zbiór S_∞ stanowił przy tej metryce przestrzeń zwartą? (ewt. półzwartą)

97) Definicja: Kuratowski – Ulam

Zbiory (przestrzenie) A i B nazywają się quasi-homeomorficzne, jeżeli przy każdem $\varepsilon > 0$ istnieje przekształcenie ciągłe f_ε przestrzeni A na przestrzeń B takie że, warstwy są mniejsze od ε t.zn. z $|x'-x''| > \varepsilon$ wynika $f(x') \neq f(x'')$ — i naodwrót przekształcenie ciągłe g_ε o warstwach mniejszych od ε przestrzeni B na przestrzeń A.

Problemat: Czy dwie rozmaitości (tj. przestrzenie topologiczne takie, że każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z n-wymiarową kulą euklidesową) quasi-homeomorficzne muszą być już homeomorficzne?

98) Problemat Schreier – Ulam

Czy istnieje skończona ilość analitycznych przekształceń kuli n-wymiarowej w część: $f_1 \dots f_n$ o tej własności że przekształceniami otrzymanemi ze składania tych (skończoną ilość razy) można dowolnie przybliżać każde ciągłe przekształcenie kuli w część. Jak jest dla przekształceń jednoznacznych? (Analityczne znaczy tu — różniczkowalne dowolną ilość razy) w kwietniu 1936

Ad 94) Przypuszczenie to udowodnił S. Bochner; podał on nawet rząd skończoności. Praca na ten temat ukaże się w Annals of Math. S. Ulam.

Ad 95) Odpowiedź pozytywna.

Schreier. Ulam, listopad 1935.

99) Problemat Ulam

Przez zbiory produktowe w kwadracie jednostkowym rozumie się zbiory wszystkich par (x, y) gdzie x należy do z góry danego zbioru A, y do z góry danego zbioru B. Czy istnieją w kwadracie zbiory które nie dałyby się otrzymać za pomocą operacji tworzenia sum nieskończonych i różnic zbiorów ze zbiorów produktowych? – Czy istnieją zbiory nie-rzutowe ze względu na zbiory produktowe (zbiory A i B mogą być dowolne!).

100) Problemat Ulam – Banach

Niech Z będzie zbiorem zamkniętym położonym na powierzchni kuli n-wymiarowej. Czy istnieje ciąg odwzorowań homeomorficznych tej pow kuli na siebie – zbieżny do odwzorowania tej ~~kuli~~ powierzchni na zbiór Z. ?

101) Problemat Ulam

Grupa U permutacyj ciągu liczb naturalnych nazywa się nieskończenie przechodnią jeżeli ma następującą własność: gdy A i B są zbiorami liczb naturalnych nieskończonemi i takiemi że uzupełnienia ich do zbioru wszystkich liczb nat. są nieskończone, to istnieje w grupie U taki element (permutacja f), że $f(A) = B$. Czy grupa U jest grupą S_∞ wszystkich permutacyj?

102) Problemat Ulama

α) Niech ε będzie liczbą dodatnią, p i q dwoma punktami kwadratu jednostkowego. – W pierwszym wypadku niech punkt p będzie stały a q niech się porusza według praw przypadku – w drugim załóżmy że oba punkty poruszają się według praw przypadku. Czy prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na zbliżeniu się punktów p i q do siebie na odległość $\leq \varepsilon$ po n rzutach jest większe w przypadku pierwszym czy drugim?

β). Niech α, β oznaczają obroty koła o pr. 1 o kąty α, β, a ε niech będzie liczbą dodatnią. Do zbioru par $E^1_\varepsilon(\alpha,\beta)$ zaliczamy dane dwa obroty wtedy gdy $(n\alpha-\beta) \bmod 2\pi$ jest częściej (tzn. przy więcej n) mniejsze od ε niż $(n\alpha - n\beta) \bmod 2\pi$. Przez $E^2_\varepsilon(\alpha,\beta)$ oznaczamy uzupełnienie zbioru $E^1_\varepsilon(\alpha,\beta)$ do zbioru wszystkich par. Który ze zbiorów $E^1_\varepsilon(\alpha,\beta)$, $E^2_\varepsilon(\alpha,\beta)$ ma większą miarę? (Wykazać że asymptotycznie zbiory te mają równe miary.)

103) Problemat Schreier-Ulam

Czy istnieje grupa separable S uniwersalna dla wszystkich grup półzwartych? (Tzn. że każda grupa pół-zwarta byłaby jedno-jednoznacznie izomorficzna z jej częścią?)

(Autorowie wyprowadzili z przedstawienia J. v. Neumanna grup zwartych istnienie grupy zwartej uniwersalnej dla wszystkich grup zwartych)

104) Problemat Schauder

Niech $f(x,y,z,p,q)$ oznacza funkcję pięciu zmiennych posiadającą dostateczną ilość pochodnych i spełniającą nierówność

* $f > M(|p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha})$; M stałe , $\alpha > 0$

Chodzi o znalezienie minimum całki

(1) $$\iint_R f(x,y,z,p,q)\,dx\,dy$$

(Obszar R ma być dostatecznie regularny) z pomiędzy wszystkich z posiadających pierwsze - i ewentualnie drugie - pochodne ciągłe, a przyjmujących na brzegu tę samą wartość brzegowe. Można założyć że zadana wartość brzegowe ma dużą ilość pochodnych względem łuku krzywej brzegowej. Problem (1) ma być ze założenia regularnym. Podobny warunek dla warunków brzegowych wolnych. Udowodnić istnienie funkcji minimizującej w danej klasie.

Problem regul: $f_{pp} \cdot f_{qq} - 4f_{pq} > 0$

105) Problemat Schauder

Chodzi o znalezienie minimizującego układu funkcyj $x(u,v)$ $y(u,v)$, $z(u,v)$ dla zagadnienia wariacyjnego parametrycznego

(1) $$\int_K\!\!\cdots\!\int f(x,y,z,X,Y,Z)\,du\,dv \; ; \; X = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \text{ i t.d.}$$

odpowiadającego problematowi 104). Pozwala się zmienić klasę funkcyj dopuszczonych do konkurencji, mogą więc być np. funkcje absolutnie ciągłe w sensie Tonelli'ego. Nawet i wówczas problem nie jest rozwiązany. Mazur i Schauder rozwiązali (1) w wypadku gdy f nie zawiera x, y, z explicite, (nawet gdy nie ma żadnych warunków analogicznych

A'-100) Dla $n=2$ odpowiedź pozytywna Borsuka.

do" z problemu 104) ale tylko w klasie funkcyj absolutnie ciągłych w sensie Tonelli'ego. Nawet i ten wypadek (x, y, z nie wyjątkowe) nie został rozstrzygnięty dla funkcyj $x(u,v)$ $z(u,v)$ dostatecznie regularnych.

106) Problemat. Banach. (Nagroda 1 flaszka wina)

Niechaj $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ będzie szeregiem (x_i są elementami pewnego zbioru typu B) o tej własności, że przy pewnym uporządkowaniu suma jego wyrazów y_0, zaś przy innem y_1. Wykazać, że do każdej liczby rzeczywistej h istnieje takie uporządkowanie danego szeregu, że suma jego wyrazów: $hy_0 + (1-h)y_1$.

W szczególności wypadzie przypadek w którym x_i są funkcjami ciągłemi w przedziale $(0,1)$, zbieżność zaś wedle normy równania jest jednostajnej zbieżności.

107) Problemat Sternbach. Czy przy każdem odwzorowaniu ciągłem płaskiego, ograniczonego i nie rozcinającego płaszczyzny kontinuum E na swoją część istnieje punkt stały?

To samo w wypadku homeomorfji E z sobą (idem).

108) Problemat. Banach - Mazur - Ulam.

Niechaj E będzie przestrzenią typu (B) posiadającą bazę, zaś H zbiorem wszędzie gęstym w E.

1) Czy istnieje baza, której wyrazy należą do H

Ad 109) Na pierwsze pytanie [illegible] odpowiedź, [illegible]

[illegible]

Marzec 1935 r. [illegible]

Ad 110). Odpowiedź pozytywna w wypadku gdy X jest lok. ściągalnym kontinuum 2-wymiarowym. — [illegible] 1936.

J. v. Neumann zauważył, że z twierdzenia n-wymiarowego wynikałaby pozytywna odpowiedź na pytanie Hilberta dotyczące wprowadzenia analitycznych parametrów w grupach n-parametrowych. (Marzec 1936).

2) To samo pytanie, przy dodatkowem założeniu, że zbiór H jest linjowy.

109) Problemat Mazur - Ulam 16. X. 1935.

Niech danych będzie n funkcyj zmiennej rzeczywistej: $f_1 \dots f_n$. Oznaczmy przez $R(f_1 \dots f_n)$ zbiór funkcyj otrzymanych z danych funkcyj przez operacje wymierne (wyrażenia kształtu: $\dfrac{\sum a_{k_1,\dots k_n} f_1^{k_1} \dots f_n^{k_n}}{\sum b_{k_1,\dots k_n} f_1^{k_1} \dots f_n^{k_n}}$)

Czy istnieje w zbiorze R funkcja f taka, że jej całka nieokreślona nie należy do zbioru R.

Analogiczne pytanie w wypadku gdy do zbioru R zalicza się wszystkie funkcje otrzymane ze złożenia funkcyj należących do R.

110) Problemat Ulam. 1. X. 1935. (Nagroda: 1 flaszka wina S. Ulam)

Niech dana będzie rozmaitość M. Czy istnieje stała liczbowa K taka że każde przekształcenie ciągłe f rozmaitości M w część spełniające warunek: $|f^n(x) - x| < K$ dla $n = 1, 2, \dots$ (gdzie f^n oznacza n-tą iterację obrazu $f(x)$) posiada fixpunkt: $f(x_0) = x_0$.

To samo przy ogólniejszych założeniach o M (ogólne kontinuum?)

- Przez rozmaitość rozumiemy zbiór taki; że otoczenie każdego punktu jest homeomorficzne z n-wymiarową kulą euklidesową.

~~do *) z problemu 104)~~ ale

ad 106 W przestrzeni L^2 nie zachodzi, a tem samem i w C.

Określamy dla każdego n $2\cdot 2^n$ funkcyj $\varphi_{n,i}(x)$ jak następuje

$$\varphi_{n,i}(x) = \begin{cases} 1 & \frac{i-1}{2^n} \le x < \frac{i}{2^n} \text{ gdy } i \le 2^n \\ -1 & \text{'' \quad '' \quad '' } i > 2^n \\ 0 & \text{poza tem} \end{cases}$$

I uporządkowanie

$$0 \equiv \varphi_{1,1} + \varphi_{1,3} + \varphi_{1,2} + \varphi_{1,4} + \varphi_{2,1} + \varphi_{2,2^2+1} + \varphi_{2,2} + \varphi_{2,2^2+2} + \varphi_{2,3} + \varphi_{2,2^2+3} + \varphi_{2,4} + \varphi_{2,2^2+4} + \cdots$$

II upor.

$$1 \equiv \varphi_{1,1} + \varphi_{1,2} + \varphi_{1,3} + \varphi_{2,2^2+1} + \varphi_{2,2^2+2} + \varphi_{1,4} + \varphi_{2,2^2+3} + \varphi_{2,2^2+4} + \cdots -$$

Ponieważ φ_{ik} przyjmują wartości całkowite to nie można uporządkować tak, żeby φ_i zbieżny w L^2 do $0 < \lambda < 1$.

Marcinkiewicz ?

ad 108) Odpowiedź pozytywna (Krein).

111) Problemat. Schreier.

Czy istnieje grupa nieprzeliczalna o tej własności, że każdy ciąg przeliczalny elementów tej grupy zawarty jest w podgrupie o skończonej ilości tworzących?

W szczególności, czy własność tę posiada grupa S_∞, albo grupa homeomorfizmów odcinka.

112) Problemat. Schreier.

Czy automorfizm grupy G, który każdy element przeprowadza na równoważny z nim, jest już koniecznie automorfizmem wewnętrznym?

113) Problemat. Schreier. Niech C oznacza przestrzeń funkcyj ciągłych zmiennej rzeczywistej (przy zbieżności jednostajnej w każdym skończonym przedziale), $F(f)$ niech oznacza operację ciągłą, odwracalną, odwzorującą C na siebie, która złożeniu dwóch funkcyj f i g, przyporządkowuje złożenie obrazów $F(f)$ i $F(g)$.

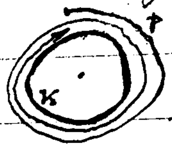
Czy $F(f)$ jest postaci

$$F(f(t)) = hfh^{-1}(t)$$

gdzie h jest funkcją ciągłą ściśle ~~[illegible]~~ monotoniczną w $(-\infty, +\infty)$ i $\lim_{t\to-\infty} h(t) = -\infty$, $\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$.

114) Problemat Auerbach – Ulam

Obwód koła K daje się aproksymować przez jedno-jednoznaczny ciągły obraz półprostej p w sposób istotny tj. „Abbildungsgrad" przekształcenia otrzymanego przez centralne rzutowanie prostej na koło jest + ∞ – obraz aproksymowanego koła jest zbiorem wszystkich punktów skupienia:



Czy możliwe jest analogiczne aproksymowanie powierzchni kuli w R_3 przez jedno-jednoznaczny ciągły obraz płaszczyzny?

115) Problemat Ulam

Czy istnieje homeomorfizm h przestrzeni euklidesowej R_n o następującej własności: istnieją punkty p dla których ciąg punktów $h^n(p)$ jest wszędzie gęsty w całej przestrzeni? Czy można jeszcze nawet żądać, żeby powyższą własność miały wszystkie punkty prócz jednego?
– Dla płaszczyzny znalazł taki homeomorfizm (~~ale~~ z żądaną własnością tylko dla pewnych punktów!) Besicovitch.

116) Problemat. Schreier-Ulam.

Niech G będzie grupą zwartą. Wiadomo wtedy, że prawie każda (w sensie miary Haara) para elementów $\varphi, \psi \in G$ wytwarza w G podgrupę wszędziegęstą.

Niech będzie danym ciąg $\{c_n\}$ zer i jedynek. Połóżmy $f_n = \varphi$ jeśli $c_n = 0$, $f_n = \psi$ jeśli $c_n = 1$. Dowieść, że dla prawie każdej pary φ, ψ i prawie każdego ciągu $\{c_n\}$ ciąg $f_1, f_1 f_2, f_1 f_2 f_3, \dots$ jest w G wszędziegęsty.

Zbadać, czy ten ciąg jest równogęsty t.zn. czy dla każdego obszaru $U \subset G$ zachodzi $\lim \frac{q_n}{n} =$ miara U, jeśli q_n oznacza ilość tych ~~elementów~~ z pośród elementów $f_1, f_1 f_2, \dots f_1 f_2 \dots f_n$, które wpadają do U.

Zbadać, czy zachodzi analogiczne twierdzenie dla podobnych ciągów obrazów jednego punktu p otrzymanych przy pomocy dwóch transformacyj $\Phi(p)$ i $\Psi(p)$, strongly transitive i zachowujących miarę, przestrzeni ~~[illegible]~~ G na siebie.

Ad 117. In general, no; but we can represent the curve by functions of a parameter t in such a way that dx/dt, dy/dt, dz/dt, exist (and are not all zero), except for a set N of values of t, such that $m(N) = 0$ and also the set of points of the curve, corresponding to N, has Carathéodory measure zero.

a. J. Ward. Fund. Math. 28. 23.3.37.

117) Problèmes (Fréchet)

On considère une courbe de Jordan ayant en chaque point une tangente (orientée). Existe-t-il au moins une représentation paramétrique de cette courbe où les coordonnées sont des fonctions dérivables du paramètre (et où les dérivées des trois coordonnées ne s'annulent pas simultanément).

118) Problème (Fréchet)

Soit $\Delta(n)$ la plus grande des valeurs absolues des déterminants d'ordre n dont les termes sont égaux à ± 1. Existe-t-il une expression analytique simple de $\Delta(n)$ en fonction de n ? Ou plus simplement, déterminer une expression analytique asymptotique simple de $\Delta(n)$?

119) Problemat Orlicz

Czy istnieje układ ortogonalny, złożony z funkcji wspólnie ograniczonych o własności układu Haara tzn. taki, że rozwinięcie dowolnej funkcji ciągłej według tego układu, jest jednostajnie zbieżne?

120) Problemat: Orlicz

Niechaj x^{n_i} będzie ciągiem potęg o wykładnikach całkowitych, o przedziale (a, b), przyczem $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} = +\infty$. Podać rząd aproksymacji funkcji, spełniającej warunek Höldera, przy pomocy wielomianów $\sum_{i=1}^{k} a_i x^{n_i}$.

121) Problemat Orlicz

Podać przykład szeregu trygonometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ wszędzie rozbieżnego takiego, że $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{2+\varepsilon} + b_n^{2+\varepsilon}) < +\infty$ przy dowolnem $\varepsilon > 0$.

122) Problemat Mazur-Orlicz

Czy w każdej przestrzeni typu (B) o nieskończenie wielu wymiarach istnieje szereg zbieżny bezwarunkowo lecz nie bezwzględnie? Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazywa się bezwarunkowo zbieżny, gdy jest zbieżny przy każdem uporządkowaniu wyrazów, bezwzględnie zbieżny, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ jest zbieżny.

123) Problemat Steinhausa

Dane są w przestrzeni 3-wymiarowej zbiory A_1, A_2, A_3 o skończonej mierze Lebesgue'a. Czy istnieje płaszczyzna, dzieląca każdy ze zbiorów A_1, A_2, A_3 na części o równej mierze? To samo dla n zbiorów w przestrzeni n-wymiarowej.

Problemat Marcinkiewicza

124) Co można powiedzieć o jednoznaczności równania całkowego

$$(*) \qquad \int_0^x y(t) f(x-t)\,dt = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$

Wiem, że jeśli ciąg całek $f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(x)\,dx$ $f_0 = f$, $k = 1, 2, \dots$ jest zupełny w L^2 to jedynym rozwiązaniem (*) jest $y \equiv 0$. To zachodzi również jeśli f jest o wahaniu ograniczonem i $f(0) \neq 0$. Wreszcie jeśli (*) posiada choć jedno rozwiązanie mierzalne y, to każda całka (iterowana) y spełnia również to równanie.

Przypominam, że jeśli $f(0) \neq 0$ i f ciągłe to (*) ma jedyne rozwiązanie $y \equiv 0$.

125) Problemat Infelda (wyniki z fizyki)

Powiemy, że przyzwoita funkcja dwuch zmiennych $f(x,y)$ spełnia warunek A, jeżeli istnieje funkcja $y = \varphi(x)$ taka, że:

$$\left.\begin{aligned} x f_x + y f_y &= 0 && (1) \\ 4 f_x f_y &= 1 && (2) \end{aligned}\right\} (A)$$

dla $y = \varphi(x)$

(Widzimy, że $\varphi(x)$ istnieje dla $f(\frac{x}{y})$, oraz dla $f = \alpha x + \beta y$, gdy $\alpha\beta = \frac{1}{4}$)

Czy spełnione jest kryterjum: Dla każdej $f(x,y)$, spełniającej A, istnieje $F(\frac{x}{y})$ takie, że $F(\frac{x}{\varphi(x)}) = f(x, \varphi(x))$ (z wyjątkiem wyp. $f = \alpha x + \beta y$)

Ad 123) Rozwiązanie p.t. „Z topologji“; Mathesis Polska, 1936.

126) Problemat. M. Kac

Jeżeli: 1°. $\int_0^1 \varphi(x)dx = 0$ 2°. $\int_0^1 \varphi^2(x)dx = \infty$; wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 e^{i\frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}}}dx\right]^n = 0$$

(Wiadomo, że jeśli $\int_0^1 \varphi^2(x)dx = A$, to powyższa granica $= e^{-\frac{A}{2}}$)

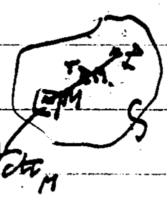
Problemat Kuratowskiego

127) Czy w przestrzeni 0-wymiarowej (w sensie Mengera-Urysohna) metrycznej każdy zbiór domknięty jest iloczynem ciągu zbiorów równocześnie domkniętych i otwartych?

(Odpowiedź jest twierdząca w przestrzeniach metrycznych ośrodkowych).

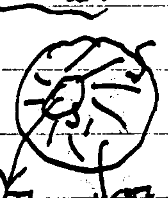
128) Problemat Nikliborca.

Dana jest w przestrzeni trójwymiarowej bryła jednospójna i jednorodna T. Niech $V(P) = \int_T \frac{d\tau_M}{r_{PM}}$



Załóżmy, że $V(P)$ jest dla P w $T+S$ wielomianem. Wykazać, że ~~V(P)~~ jest elipsoidą. Wiadomo, że jeśli ten wielomian jest stopnia drugiego, wówczas twierdzenie zachodzi.

129.) Problemat Nikliborca. Dane są dwie powierzchnie zamknięte S i S_1 typu kuli



, stanowiące ograniczenie bryły T. Załóżmy, że $V(P) = \int_T \frac{d\tau_M}{r_{PM}}$ jest constans w T_1 (bryła ograniczona przez S_1). Wykazać, że ~~V(P)~~ S i S_1 są elipsoidami homotetycznemi.

Wiadomo, że jeśli S i S_1 są homotetyczne, to są elipsoidami.

130) Problemat Kaczmarza

Niech $\{\varphi_n(t)\}$ będzie układem ortogonalnym, wspólnie ograniczonym, lakunarnym. Czy istnieje stała $\gamma>0$, taka że dla każdego układu skończonego liczb $c_1, c_2, \dots c_n$ zachodzi

$$\max\text{ ist}\, |c_1\varphi_1(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)| \geq \gamma \sum_{k=1}^{n}|c_k|.$$

Uwaga. Układ jest lakunarny, gdy dla każdego $p>2$ istnieje stała M_p, że

$$\sqrt[p]{\int_0^1 |c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n|^p dt} \leq M_p\left(\sum_1^n c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

181. (A. Zygmund). Dana jest funkcja $f(x)$ ciągła (dla prostoty) i taka że

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\int_h^1 \frac{f(x+t)-f(x)}{t}dt\right|<\infty. \quad \cancel{(0\leq x\leq 1)}$$

dla $x\in E$, $|E|>0$. Czy całka

$$\int_0^1 \frac{f(x+t)-f(x)}{t}dt$$

musi istnieć prawie wszędzie w E? Podobnie dla innych całek Diniego.

132. Probl. W. Sierpińskiego 25/II 36. Czy istnieje funkcja Baire'owska $F(x,y)$ (dwóch zm. rzecz.), taka iż dla każdej f-ji $f(x,y)$ (dwóch zm. rzecz.) istnieje funkcja $\varphi(x)$ jednej zmiennej rzecz. (zależna od funkcji f), przy której $f(x,y)=F(\varphi(x),\varphi(y))$ dla wszelkich rzeczywistych x i y.

Ad 126. Rozwiązane pozytywnie przez A. Chinczyna ukaże się w IV komunikacie o funkcjach niezależnych w Studia Math. VI albo VII.

133. Problemat Eilenberga.

Dana jest w przestrzeni metrycznej E rodzina zbiorów otwarto-domkniętych pokrywająca przestrzeń E. Znaleźć rodzinę zbiorów otwartych-domkniętych i rozłącznych pokrywającą przestrzeń E i drobniejszą od poprzedniej.

Uwagi 1°) Rodzina zbiorów K jest drobniejsza od rodziny K_1 jeżeli każdy zbiór rodziny K zawarty w jakimś zbiorze rodziny K_1.

2°) zagadnienie obejmuje zagadnienie 127) prof. Kuratowskiego.

3°) dla przestrzeni ośrodkowych rozwiązanie jest trywialne.

134. Problemat Eilenberg.

Czy produkt kartezjański $K_1 \times K_2$ dwuch kontinuów nierozkładalnych K_1 i K_2 musi być kontinuum nierozkładalnem?

135. Problemat Eilenberg.

Czy niejednospójność kontinuum lokalnie spójnego jest niezmiennikiem odwzorowań lokalnie homeomorficznych?

136. Problemat Eilenberg.

Czy odwzorowanie wewnętrzne (t.zn. takie przy którem zbiory otwarte przechodzą na otwarte) może podwyższyć wymiar?

137. ~~Dane jest~~ Problemat Eilenberg.

Dane jest odwzorowanie ciągłe f przestrzeni zwartej X, takie że $\dim X > \dim f(X) > 0$. Czy istnieje zbiór domknięty $Y \subset X$ taki że $\dim Y < \dim f(Y)$. W szczególności, czy przy każdem odwzorowaniu

ciągłem kwadratu na odcinek, istnieje w kwadracie zbiór domknięty 0-wymiarowy którego obrazem jest pewien odcinek.
O zbiorze X zakłada się że ma w każdym swoim punkcie ten sam wymiar.

138) Twierdzenia Eilenberg 17/V 1936 r.

a) Zbior zwarty i wypukły w przestrzeni liniowej typu B_0 jest retraktem absolutnym.

b) Zbior zwarty i wypukły w sensie Wilsona jest retraktem absolutnym.

Zbior $Y \subset X$ jest retraktem dla X jeżeli istnieje funkcja ciągła $f \in Y^X$ taka że $f(y)=y$ dla $y \in Y$.
Przestrzeń zwartą nazywa się retraktem absolutnym jeżeli jest ona retraktem każdej swojej nadprzestrzeni ośrodkowej i metrycznej. Retrakty abs. mają fix-punkt. (vide K. Borsuk Fund. Math. 17)

Zbiór X jest wypukły w sensie Wilsona jeżeli dla każdych $x, y \in X$ i $0 \leq t \leq 1$ istnieje jeden i tylko jeden punkt $z \in X$ taki że $\varrho(x,z) = t\,\varrho(x,y)$; $\varrho(z,y) = (1-t)\,\varrho(x,y)$.

Uwaga do 136. Pytaniem tym zajmował się R. Baer i uzyskał pewne wyniki częściowe

Ad 136. A. Kolmogoroff, Annals of Math. 38 (1937), str. 34-38 podał odwzorowanie wewnętrzne ciągłe, podwyższające wymiar z 1 na 2. B. Knaster.

139) Problemat Ulam

Czy każde jednojednoznaczne przekształcenie przestrzeni euklidesowej w siebie jest równoważne z przekształceniem przeprowadzającym zbiory miary 0 w zbiory miary 0?

Twierdzenie v. Neumann.

α) Cała grupa przekształceń przestrzeni euklidesowej jest równoważna z grupą przekształceń przeprowadzających zbiory miary 0 i zbiory miary 0.

β) Niech f. będzie ciągłym (1-1) przekszt. przestrzeni euklidesowej. Istnieje homeomorfizm h taki, że przekształcenie hfh^{-1} przeprowadza zbiory miary 0 w zbiory miary 0.

140) Problemat Ulam

2 przekształcenia (niekoniecznie jedno-jednoznaczne) f i g zbioru E w część są równoważne jeśli istnieje przekształcenie jedno-jednoznaczne h E w siebie takie że $f = hgh^{-1}$. Jakie są warunki kon. i dost. na to?

141) Twierdzenie Ulam

W grupie M jedno-jedn. mierzalnych przekształceń obwodu koła na siebie przekształcenia które są obrotami o różne kąty niewymierne są nierównoważne pomiędzy sobą. Analogiczne tw. zachodzi w grupie przekształceń powierzchni kuli n-wym. na siebie.

142) Problemat Ulam, Wiedeńczyk Garrett Birkhoff.

Do każdej grupy abstrakcyjnej G istnieje taki zbiór Z i taki podzbiór X zawarty w kwadracie zbioru Z: $X \subset Z^2$, że grupa G jest izomorficzna z grupą wszystkich przekształceń jedno-jednoznacznych f Z na siebie przy których przekształcenie $(x, y) \to (f(x), f(y))$ przeprowadza zbiór X w siebie.

143) Problemat. Mazur.

Niech $\mathcal{K}$ oznacza ~~najmniejszą~~ klasę funkcyj dwóch zmiennych naturalnych x, y taką, że: 1° funkcje x, y, 0, $x+1$, $x+y$, xy należą do $\mathcal{K}$; 2° jeżeli funkcje $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, $\gamma(x,y)$ należą do $\mathcal{K}$, to funkcja $\varphi(x,y) = \gamma(\alpha(x,y), \beta(x,y))$ należy do $\mathcal{K}$; 2° jeżeli funkcja $\alpha(x,y)$ należy do $\mathcal{K}$, to funkcja $\varphi(x,y)$ dla której $\varphi(0,y) = 1$; $\varphi(x+1,y) = \alpha(x, \varphi(x,y))$ należy do $\mathcal{K}$. Czy klasa $\mathcal{K}$ zawiera funkcję $\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \neq y \\ 0 & \text{dla } x = y \end{cases}$?

144) Problemat Mazur - Ulam

Niech K oznacza kulę w przestrzeni typu (B) sep. Czy istnieje odwzorowanie jedno-jednoznaczne K na odcinek $0 \leq x \leq 1$ przy którym obrazem każdego zbioru otwartego w K byłby ~~zw~~ zbiór o mierze dodatniej?

(145) Problemat. Ulam

Niech dana będzie przeliczalna ilość zbiorów A_n. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, żeby określić można miarę przeliczalnie addytywną $m(A_n)$, taką że $m(\Sigma A_n) = 1$, $m(p) = 0$; (p) oznacza zbiór złożony z jednego punktu. (Ew. warunek silniejszy: $m(A_{n_k}) = 0$ (dla pewnego podciągu ciągu n_k). Od miary żądamy żeby była określona dla każdego ze zbiorów ciała borelowskiego, rozpiętego na ciągu A_n)!

146. Problemat Ulam

Wiadomo, że w zbiorach o mierze dodatniej istnieją punkty gęstości 1 (tzn. punkty o tej własności, że stosunek długości przedziału do miary części zbioru zawartej w przedziale dąży do 1, gdy długość przedziału dąży do 0.
Czy można określić rząd zbiegania tego stosunku dla prawie wszystkich punktów zbioru?

147 Twierdzenie Auerbach – Mazur 4. IX. 36.

(Problemat Mazur)

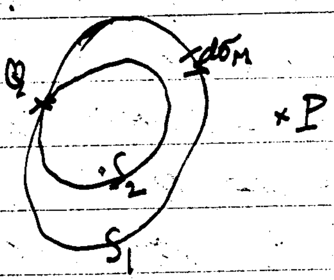
Jeżeli z rogu bilardu o współmiernych bokach wychodzi kula pod kątem 45°, to po skończonej liczbie odbić dojdzie do jednego z trzech pozostałych rogów.

148. Twierdzenie Auerbach 1936

Niech $P(x_1 \dots x_n)$ oznacza wielomian o współczynnikach rzeczywistych. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by zbiór punktów określony równaniem $P(x_1 \dots x_n) = 0$ nie rozcinał przestrzeni (rzeczywistej) jest, by wszystkie czynniki nieprzywiedlne w zakresie rzeczywistym wielomianu P były ~~#~~ stale nieujemne lub niedodatnie.

149. Twierdzenie Nikliborca.

Niech S i S_1 oznaczają dwie powierzchnie zamknięte i wypukłe, mające wspólny punkt styczności Q. Niech dalej S_2 leży w dziedzinie, której ograniczeniem jest S_1:



Połóżmy

$$V_k(P) = \int_{S_k} \frac{d\sigma_M}{r_{PM}} \qquad (k = 1, 2)$$

Twierdzenie: $V_1(Q) > V_2(Q)$.

150. Zagadnienie (Nikliborc). Niech S oznacza powierzchnię zamkniętą, zaś $f(M)$ funkcję ciągłą określoną na S. Połóżmy

$$V(P) = \int_S f(M) \frac{1}{r_{PM}} \, d\sigma_M$$

Przypuśćmy teraz, że płaszczyzna (Π) ma własność następującą: Jeśli P_1 i P_2 oznaczają dwa dowolne punkty przestrzeni, położone z zewnątrz dostatecznie wielkiej kuli, ale symetrycznie względem płaszczyzny (Π), wówczas

$$V(P_1) = V(P_2).$$

Dowieść, że wówczas 1° płaszczyzna (Π) jest płaszczyzną symetrii dla ~~[illegible]~~ powierzchni (S), 2° w punktach symetrycznych M_1 i M_2 leżących na S zachodzi

$$f(M_1) = f(M_2)$$

151 Problème Wavre 6 novembre 1936. (Une fondue à Genève).

Existe-t-il une fonction harmonique dans un domaine qui contient un cube à son intérieur et qui soit nulle sur les arêtes du cube? La fonction $f \equiv 0$ n'est pas prise en considération.

152ª Existe-t-il une fonction algébrique $f(z)$ holomorphe en chaque point d'une ligne l tracée sur la surface de Riemann telle que l'on ait

$$(1) \qquad \int_l \frac{f(z)}{z-x}\,dz = 0 \qquad\qquad f(z) \not\equiv 0.$$

le point x étant dans un certain domaine? La ligne l sera ouverte. On demande donc de trouver $f(z)$ et l.

(Une "Fendant" à Lwów)

152. Problemat. Steinhaus. 6. XI. 1936.

Koło (tarcza) o promieniu 1 pokrywa conajmniej dwa punkty kraty całkowitych (x, y), conajwyżej 5. Gdy przesuwamy koło o wektory $n\omega$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, gdzie ω ma obie składowe niewymierne i stosunek ich niewymierny, to liczby 2, 3, 4 powtarzają się nieskończenie wiele razy. Jaka jest frekwencja tych zdarzeń dla $n \to \infty$? Czy jest?

[Za obliczenie frekwencji: 10 dkg. kawioru świeżego.
Za dowód istnienia " małe piwo
Za przykład przeciwny " mała czarna] mar.

153. Problemat Mazur 6. XI. 936

Dana funkcja ciągła $f(x,y)$ w przedziale $0 \leq x,y \leq 1$ oraz liczba $\varepsilon > 0$; czy istnieją liczby $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots b_n$, $c_1, \dots c_n$ o tej własności, że $\left| f(x,y) - \sum_{k=1}^{n} c_k f(a_k, y) f(x, b_k) \right| \leq \varepsilon$ w przedziale $0 \leq x,y \leq 1$?

Nagroda: ~~[illegible]~~ żywa gęś Mazur

(Uwaga: Twierdzenie jest prawdziwe przy założeniu dodatkowem, że funkcja $f(x,y)$ posiada pierwszą ciągłą pochodną względem x lub y)

154. Problemat Mazur 15. XI. 936

Niech $(\varphi_n(t))$ będzie układem ortogonalnym złożonym z funkcyj ciągłych zamkniętym w (C). a) Jeżeli $f(t) \sim \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \cdots$ jest rozwinięciem danej funkcji $f(t)$ ciągłej i $n_1, n_2, \dots$ oznaczają kolejne wskaźniki dla których $\alpha_{n_1} \neq 0$, $\alpha_{n_2} \neq 0, \dots$ to czy $f(t)$ można przybliżyć jednostajnie zapomocą kombinacji linjowych funkcyj $\varphi_{n_1}(t), \varphi_{n_2}(t), \dots$? b) Czy istnieje linjowa metoda sumowalności $\mathfrak{A}$ taka, że rozwinięcie każdej funkcji ciągłej $f(t)$ według układu $(\varphi_n(t))$ jest jednostajnie sumowalne metodą $\mathfrak{A}$ do $f(t)$?

155. Problemat Mazur - Sternbach. 18. XI. 1936.

Niech będą dane dwie przestrzenie X, Y, typu (B). $y = U(x)$ stanowi jednojednoznaczne odwzorowanie przestrzeni X na całą przestrzeń Y o następującej własności: Do każdego $x_0 \in X$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że odwzorowanie $y = U(x)$ rozpatrywane dla x należących do kuli o środku x_0 i promieniu ε stanowi odwzorowanie izometryczne. Czy odwzorowanie $y = U(x)$ jest odwzorowaniem izometrycznem?

Twierdzenie jest prawdziwe, gdy U^{-1} jest ciągłe. Zachodzi to w szczególności, gdy Y posiada skończoną liczbę wymiarów lub własność następującą: jeśli $\|y_1+y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|$, $y_1 \neq 0$, to $y_2 = \lambda y_1$, $\lambda \geq 0$.

156. Problem of Ward. 23. III. 37.

A surface $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = h(u,v)$, f, g, h being continuous functions, has at each point a tangent plane in the geometrical sense; also, to each point of the surface corresponds only one pair of values of u, v. Does there exist a representation of the surface by functions $x = f_1(u,v)$, $y = g_1(u,v)$, $z = h_1(u,v)$, in such a manner that the partial derivatives exist and the Jacobians $\frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(f_3, f_1)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u,v)}$ are not all zero, excepting a set N of values of u, v such that the corresponding set of points of the surface has surface measure (in Carathéodory's sense) zero?

[Let (x,y,z) be a point of a surface S, and P a plane through (x,y,z). Then if, for every $\epsilon > 0$, there exists a sphere $K(\epsilon)$ of centre (x,y,z), such that the line joining (x,y,z) to any other point of $S \times K(\epsilon)$ always makes an angle of less than ϵ with P, we say that P is the tangent plane to S at (x,y,z).]

157. Problem of Ward. 23. III. 37.

$f(x)$ is a real function of a real variable, which is approximately continuous. At each point x, the upper right-hand approximate derivate of $f(x)$ (that is, $\overline{\lim_{h \to +0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, neglecting any set of values of h which has zero density at $h = 0$) is positive. Is $f(x)$ monotone increasing?

(Lunch at the 'Dorothy', Cambridge.)

158. Problème de Stoïlow (1 mai 1937)

Construire une fonction analytique $f(z)$ continue dans un domaine D et y admettant un ensemble parfait discontinu P de ses singularités telle que $f(P)$ soit un ensemble discontinu. Une telle fonction permettrait de former une fonction „quasi linéaire" c'est-à-dire possédant les propriétés suivantes : 1° Elle est continue et univalente dans tout le plan z 2° Elle tend vers ∞ pour $|z| \to \infty$ 3° Elle admet un ensemble parfait de singularités. — (Voir : Stoïlow : Remarques sur les fonctions analytiques admettant un ens. parfait disc. de singularités Bulletin de la Société roumaine de mathém. 1936 (t. 38).

159) Zagadnienie (Ruziewicz). (22.V.1937).

Niech Φ oznacza zbiór wszystkich funkcyj ciągłych w $(0,1)$, $f(0)=0$, $0\leq f(x)\leq 1$ dla $0\leq x\leq 1$. – Dla szeregu potęgowego $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ niech $P_k(x)$ oznacza $k^{\text{tą}}$ sumę częściową.

Czy istnieje szereg potęgowy $P(x)$ o następującej własności: „Do każdego $\varepsilon>0$ istnieje takie $N(\varepsilon)$, że dla każdej funkcji $f\in\Phi$ istnieje takie $n\leq N$, iż $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$." ?

160. Problem. Mazur. 10 czerwca 1937

Niech G oznacza grupę metryczną. (1) Jeżeli grupa G jest zupełna i ma tę własność, że przy każdym $\varepsilon>0$ każdy element $a\in G$ daje przedstawienie $a=a_1a_2\cdots a_n$, gdzie $(a_k,e)<\varepsilon$, to czy grupa G jest spójna w sensie Hausdorffa (t.zn. nie jest sumą dwóch zbiorów zamkniętych rozłącznych $\neq 0$)? (2) Jeżeli grupa G jest spójna w sensie Hausdorffa, to czy jest łukowo spójna?

161. Twierdzenie. M. Kac 10 czerwca 1937

Jeżeli r_n jest ciągiem liczb naturalnych takich, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(r_n-\sum_{k=1}^{n-1} r_k\right)=+\infty, \text{ to}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\underset{(0\leq x\leq 1)}{\underset{x}{E}}\left(\alpha<\frac{\sin 2\pi r_1x+\cdots+\sin 2\pi r_nx}{\sqrt{n}}<\beta\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-y^2}\,dy$$

(można położyć np. $r_n=2^{n^2}$)

<u>Problemat</u>: Czy twierdzenie jest słuszne dla $r_n=2^n$?

ad 162) I.

Zachodzi twierdzenie ogólniejsze sformułowane przez p. Prof. Banacha: jeśli $f(x)$ jest dowolną funkcją mierzalną i periodyczną o okresie 1, to prawie wszędzie zachodzą relacje:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(nx) = \text{istotny górny kres}\ \underset{0\leq x\leq 1}{} f(x)$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f(nx) = \text{istotny dolny kres}\ \underset{0\leq x\leq 1}{} f(x)$$

M. Eidelheit (16/X. 1937)

162 Problemat (H. Steinhaus) (3. 7. 1937):

$f(x)$ jest mierzalne (L), perjodyczne: $f(x+1) \equiv f(x)$ i $f(x) = +1$ lub -1. Czy można przeczyć wszędzie

$$\limsup_{n\to\infty} f(nx) = +1, \quad \liminf_{n\to\infty} f(nx) = -1. \ ?$$

Ogólniej:

Gdy $f_n(x)$ są mierzalne[*] i $f_n(x+\frac{1}{n}) \equiv f_n(x)$ czy

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \text{const. p. w.} \quad ?$$

$$\liminf f_n(x) = \text{constans p. w.} \quad ?$$

*) ewt. wsp. ograniczone. Obiad ~~u~~ George'a.

163 Problem (J. v. Neumann) (4. 7. 1937):

Gegeben eine unbeschränkt additive und multiplikative Boolesche Algebra B. D.h.:

1) B ist eine teilweise geordnete Menge, die Ordnungsrelation: $a \subset b$.

2) jede Menge $S \subset B$ hat ein ~~grösste~~ kleinste obere (kleinste untere) Schranke $\Sigma(S)$ ($\Pi(S)$). (Man schreibe: $\Sigma(a,b) = a+b$, $\Pi(a,b) = ab$, $\Sigma(B) = 1$, $\Pi(B) = 0$.)

3) ~~jedes a~~ es gilt allgemein das "Distributivgesetz" $(a+b)c = ac+bc$.

4) jedes Element $a \varepsilon B$ hat eine (nach 3) einzige) "Inverse" $-a$: $a+(-a) = 1$, $a(-a) = 0$.

Ein "Maass" in B ist eine numerische Funktion $\mu(a)$, definiert für alle $a \varepsilon B$, mit diesen Eigenschaften:

1°) $\mu(a) \begin{cases} = 0 & \text{für } a = 0 \\ > 0 & \text{für } a \neq 0 \end{cases}$

2°) $a_i \varepsilon B$ $(i = 1, 2, \dots)$, $a_i a_j = 0$ für $i \neq j$ haben zur Folge

$$\mu\left(\sum_i (a_i)\right) = \sum_i \mu(a_i).$$

Ad 159) 10.6.1937. W tem sformułowaniu odpowiedź jest negatywna. Ponieważ $\max_{0 \le x \le 1} |\sin^2 2^n \pi x - \sin^2 2^m \pi x| = 1$ $(m \neq n)$, więc nie istnieje funkcja, któraby aproksymowała zarówno $\sin^2 2^m \pi x$ jak i $\sin^2 2^n \pi x$ z dokładnością $\le \frac{1}{3}$ w przedziale $\langle 0,1 \rangle$. Gdyby żądane uniwersalne $N(\frac{1}{3})$ istniało, wówczas biorąc $\sin^2 2\pi x, \sin^2 2^2 \pi x, \dots \sin^2 2^{N(\frac{1}{3})+1} \pi x, \sin^2 2^{N(\frac{1}{3})+2} \pi x$, stwierdzilibyśmy na podstawie 159), że przy pewnem $K \le N(\frac{1}{3})$, wielomian $P_K(X)$ aproksymowałby jednocześnie $\sin^2 2^n \pi x$ i $\sin^2 2^m \pi x$ przy $n \neq m$ z dokładnością $\le \frac{1}{3}$. Herzberg.

Niech Φ oznacza ~~dowolny~~ zbiór funkcji ciągłych w $\langle 0,1 \rangle$, $f(0)=0$, $|f(x)| \le M$; na to by zbiór Φ miał własność o którą chodzi potrzeba i wystarcza by funkcje zbioru Φ były jednakowo ciągłe. Mazur

F Natürlich muss man verlangen:
5) Falls $S \subset B$, $(a, b \in S,\ a \neq b) \to ab = 0$, dann ist S höchstens abzählbar.

<u>Frage:</u> Wann gibt es ein "Maass" in B?

<u>Bemerkung:</u> F Wie man unschwer verificiert, ist auch das folgende "verallgemeinerte* Distributivgesetz" notwendig:

6) sei $a^i_1 \leq a^i_2 \leq \dots$ für $i = 1, 2, \dots$, dann ist

$$\prod_i \Big(\sum_j (a^i_j) \Big) = \sum_{j(i)} \Big(\prod_i (a^i_{j(i)}) \Big).$$

(6) ohne die Bedingung $a^i_1 \leq a^i_2 \leq \dots$ charakterisiert nach Tarski die "atomistischen" Booleschen Algebren.)

1)–5) haben 6) <u>nicht</u> zur Folge. (Gegenbeispiel: die Boolesche Algebra der Borelschen Mengen modulo Mengen erster Kategorie — Beispiel für 1)–6): Die messbaren [oder auch die Borelschen] Mengen modulo Mengen vom Maasse 0, falls man das Lebesguesche Maass benützt.) <u>1)–5), 6) hinreichend?</u>

<u>Preis:</u> Eine Flasche Whisky vom Maasse > 0.

<u>164. Problemat. Ulam.</u>

Niech dany będzie na odcinku (0-1) skończona ilość punktów, liczba $\varepsilon > 0$, i przekształcenie tego skończonego zbioru w siebie: T o takiej własności: dla każdego punktu p: $|p, T(p)| > \varepsilon$. Nazwijmy „dozwolonym krokiem" przejście od punktu p do $T(p)$ <u>lub</u> do jednego z dwóch sąsiadów (punktów najbliższych z lewej bądź z prawej strony) punktu $T(p)$. Pytanie: Czy istnieje taka stała uniwersalna k, że istnieje punkt p_0 z którego po liczbie kroków dozwolonych $E\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$ można dojść do punktu q odległego od p_0 conajmniej o $\frac{1}{3}$.

165. Problemat Ulam

Niech p_n będzie ciągiem punktów wymiernych w r-wymiarowej kuli jednostkowej. Pierwszych $\underline{N}$ punktów $p_1 \ldots p_N$ jest przekształconych na N punktów (też w tej samej kuli) $q_1 \ldots q_N$, (różnych!).

Dla punktów p_n, $n > N$ określamy przekształcenie przez indukcję w ten sposób: przypuśćmy, że przekształcenie jest określone dla wszystkich punktów p_ν, $\nu < n$ przyczem obrazy ich są różne. Przekształcenie to posiada pewną stałą Lipschitza L_{n-1}, stałą Lipschitza przekształcenia odwrotnego nazwijmy L'_{n-1}. Definiujemy przekształcenie w punkcie p_n tak by suma stałych: $L_n + L'_n$ była minimum. (W razie gdy punktów spełniających ten postulat jest więcej; wybieramy dowolnie któryś z nich).

Pytanie: czy ciąg $\{L_n + L'_n\}$ jest ograniczony?

(Nagroda: 2 flaszki wina).

166. Problemat Ulam

Niech M będzie rozmaitością topologiczną, f funkcją ciągłą rzeczywistą, określoną na M. Przez G_f^M oznaczamy grupę wszystkich takich przekształceń homeomorficznych T, M w siebie, że $f(T(p)) = f(p)$ dla każdego $p \in M$.

Pytanie: Niech N będzie rozmaitością niehomeomorficzną z M. Czy istnieje taka f_0, że $G_{f_0}^M$ nie jest izomorficzne z żadnem G_f^N?

167. Problemat Ulam

Niech S oznacza powierzchnię kuli jednostkowej w przestrzeni Hilberta. Niech $f_1 \ldots f_n$ będzie (skończonym) systemem ciągłych, rzeczywistych funkcyj określonych na S. Niech T będzie ciągłem przekształceniem S w część.

Czy istnieje taki punkt p_0, że

$$f_\nu(T(p_0)) = f_\nu(p_0) \qquad \nu = 1, \ldots n.$$

168. Problemat Ulam.

Czy istnieje ciąg zbiorów A_n takich, żeby najmniejsze ciało zawierające je i zamknięte ze względu na operacje sumy przeliczalnej i uzupełniania zawierało wszystkie zbiory analityczne (na odcinku).

Nagroda: 2 flaszki piwa.

Odp. pozytywna
Wynika z nieopublikowanego rezultatu von Neumanna

169. Problemat E. Szpilrajna.

Czy istnieje funkcja addytywna $\mu(E)$, równa na zbiorach przystających, określona dla wszystkich zbiorów płaskich i będąca rozszerzeniem miary liniowej Carathéodory'ego? $(0 \leq \mu(E) \leq +\infty)$

170. Problemat E. Szpilrajna

Czy każdy zbiór płaski, którego wszystkie obrazy homeomorficzne płaskie są mierzalne (L), jest bezwzględnie mierzalny (t.j. mierzalny względem każdej funkcji Carathéodory'ego [„Massfunktion"])?
[Dla zbiorów liniowych jest to prawda. Dla zbiorów płaskich jest słuszne twierdzenie analogiczne, jeśli zastąpić homeomorfizmy przez homeomorfizmy uogólnione w sensie p. Kuratowskiego].

171. Problemat. J. Schreier. S. Ulam.

Niech $J(A)$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań w część zbioru A. Dla par elementów zbioru J określona jest operacja $U(f,g) = h$ $(h \in J(A))$. $(U(f,g) \not\equiv 1)$

Założenia: 1) $U(f,g)$ jest asocjatywna. t. zn.

$$U(f, U(g,h)) = U(U(f,g), h)$$

2) $U(f,g)$ jest niezmiennicze ze względu na permutacje podłoża. t. zn. jeśli p jest permutacją zbioru A: to

$$U(p^{-1}fp, p^{-1}gp) = p^{-1}U(f,g)p.$$

Tw.: $U(f,g) = fg$ (złożenie).

172. Problem. M. Eidelheit (4/VI 1938).

Przestrzeń E typu (B) ma własność α, jeśli słabe domknięcie dowolnego zbioru liniowego funkcjonałów liniowych jest słabo domknięte. (Ciąg funkcjonałów liniowych $f_n(x)$ zbiega słabo do $f(x)$ jeśli $f_n(x) \to f(x)$ dla każdego x.)

Przestrzeń E typu (B) ma własność β) jeśli każdy ciąg funkcjonałów liniowych zbieżny słabo jest zbieżny słabo jako ciąg elementów w przestrzeni sprzężonej $\bar{E}$.

Pytanie, czy każda przestrzeń środkowa typu (B) posiadająca własność α) posiada też własność β)?

173. Problem. M. Eidelheit (23/VII 1938).

Niech A oznacza zbiór operacyj liniowych odwzorowujących daną przestrzeń typu (B) na swoją część. Czy zbiór operacyj z A posiadających odwrotność ciągłą jest w A gęsty (przy zwykłej normie)?

174. Problem. M. Eidelheit (23/VII 1938).

Niech $U(x)$ będzie operacją liniową określoną w przestrzeni typu (B_0), odwzorowującą tę przestrzeń na swoją część i taką, że operacja $x - \lambda U(x)$ posiada dla dostatecznie małych λ odwrotność by zachodzi wtedy rozwinięcie $(X-\lambda\mathcal{U})^{-1} = X + \lambda\mathcal{U}(x) + \lambda^2\mathcal{U}[\mathcal{U}(x)] + \cdots$

175. Problem. Borsuk. 10. VIII 1938.

a) Czy produkt (iloczyn kartezjański) kostki Hilbert'a Q_ω przez krzywą o postaci litery T jest homeomorficzny z Q_ω?

b) Czy produkt ciągu nieskończonego krzywych T jest homeomorficzny z Q_ω?

176. W pierścieniu typu (B) (pierścień liniowy unormowany, zupełny z normą spełniającą warunek $|xy| \leq |x||y|$) zawierającym element jednostkowy dany jest element a posiadający odwrotny a^{-1}. Pytanie: czy istnieje ciąg wielomianów $c_0^{(n)} I + c_1^{(n)} a + \dots + c_{m_n}^{(n)} a^{m_n}$ zbieżny do a^{-1}? (I = element jednostkowy, c liczby).

M. Eidelheit, 12/IX 1938.

177

Problem M. Kac

Jakie warunki musi spełniać funkcja $\Phi(x,y)$, aby dla dowolnych tablic $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ hermitowskich i „positive definite" tablica $\Phi(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ była „positive definite"

11. 9. 1938

178 Problem M. Kac.

Niech $\Phi(x,y) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1}$ udowodnić, że

Ad 176. Odpowiedź negatywna. Przykład: Pierścień operacyj liniowych $U(x)$ przestrzeni (C) na siebie. $U(x) = x(t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

M. Eidelheit

11/XI. 1938.

jeśli:
$$\Phi\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\sigma_1(x), \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\sigma_2(x)\right) = \frac{1}{1+\xi^2}, \text{ to}$$

$$\sigma_1(x) = \alpha_1 e^{-\beta_1 |x|}$$
i
$$\sigma_2(x) = \alpha_2 e^{-\beta_2 |x|}$$

(Jest to analogon twierdzenia Cramera, że
jeśli
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\sigma_1(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\sigma_2(x) = e^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

to $\sigma_1(x)$ i $\sigma_2(x)$ są postaci $e^{-\beta_1 \xi^2}$ $e^{-\beta_2 \xi^2}$)

11. 9. 1938

179 Problem of Offord.

If $a_0, a_1, \ldots a_n$ are any real or complex numbers and if $\varepsilon_\nu = \pm 1$ $\nu = 1, 2 \ldots n$; then the following theorem is true.
$$|a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n| \geqslant \min_{0 \le \nu \le n} |a_\nu|$$

except for a proportion at most $\frac{A}{n^{\frac{1}{4}}}$ of the 2^n sums.
Problem (i) to find a short proof of this result (ii) when the a's are all equal to 1 the size of the exception set is $\frac{A}{\sqrt{n}} 2^n$. Is this the right upper bound whatever the numbers a_ν.

10. I. 39.

180. Problème de Kampé de Fériet.

Soit $U(t, E)$ une fonction aléatoire stationnaire (au sens de E. Slutsky, A. Khintchine) : (E événement aléatoire)

$$\begin{cases} \overline{U(t,E)} = 0 \qquad \overline{U(t,E)^2} = C^{te} \\ \overline{U(t,E) \cdot U(t+h,E)} = \text{fonction de } h \text{ seul.} \\ \quad \text{pour tout } t \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

Existe-t-il une variable aléatoire A prenant avec une probabilité uniforme toute valeur α entre 0 et 1,

$$\text{Prob}\,[A < \alpha] = \alpha \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

telle que :

$\underline{1^\circ}$ $\quad E = \varphi(\alpha)$

$\underline{2^\circ}$ $\quad U[t_1, \varphi(\alpha)]$ et $U[t_2, \varphi(\alpha)]$ sont deux fonctions indépendantes de α (au sens de H. Steinhaus) pour tout couple t_1, t_2 $(t_1 \neq t_2)$. ?

16 mai 1939.

181. Problemat. H. Steinhaus. 1 grudnia 1939.

Znaleść funkcję ciągłą (ewt. analityczną) $f(x)$ i dodatnią, taką, żeby było

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) \equiv 1$$ (identycznie w x w przedziale $-\infty < x < \infty$);

zbadać, czy $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ jest taką funkcją; ewt. wykazać niemożliwość zagadnienia; ewt. wykazać jednoznaczność.

Nr 181. ~~Funkcja $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ [illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Funkcja $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ nie ma tej własności, co wynika ze znaku drugiej pochodnej dla $x=0$ wyrażenia $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+n)^2}$

H. Steinhaus

Bierzemy funkcję $g(x)$ ciągłą, dodatnią i taką, że $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(x+n) = h(x) < +\infty$ w przedziale $(-\infty,+\infty)$ n.p. $g(x)=e^{-x^2}$; funkcja $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ spełnia warunki.

Szarski

182. Problemat. B. Knaster. 31 grudnia 1939 r.

Koła nie można rozłożyć na cięciwy rozłączne (niejednopunktowe), a kulę można (nieefektywnie). Podać efektywnie taki rozkład kuli. To samo ogólnie dla kuli n-wymiarowej na cięciwy o wymiarze $k \leq n-2$.

(małe piwo).

183. Problemat Bogolubowa 8 lutego 1940 r.

Étant donné un groupe compact, connexe et localement connexe des transformations ~~[illegible]~~ de l'espace euclidien n-dimensionnel.

Démontrer (ou donner un Gegenbeispiel) qu'on peut introduire dans cet espace des tels coordonnées que les transformations du groupe seront linéaires.

(flaszka koniaku)

184. Problemat. S. Saks. 8. II. 1940 r.

Funkcja podharmoniczna φ ma wszędzie pochodne cząstkowe $\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial y^2$. Czy wszędzie $\Delta\varphi \geq 0$.

(Uwaga: widoczne natychmiast, że $\Delta\varphi \geq 0$ we wszystkich punktach ciągłości $\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial y^2$, a więc w zbiorze wszędzie gęstym).

(1 kilo słoniny).

185. Problemat. S. Saks. 8. II. 1840.

Czy dla każdej powierzchni ciągłej $z = f(x,y)$ $(0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1)$ pole równe jest $\lim_{h\to 0} \int_0^1\int_0^1 \sqrt{\left[\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right]^2 + \left[\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\right]^2}\,dx\,dy$.

[Uwaga: twierdzenie prawdziwe jest dla krzywych. Dla powierzchni zostało podane przez L. C. Younga, ale dowód (p. S. Saks, Theory of the Integral, 1937) zawiera istotny błąd].

185 Problem S. Banach 21. III 1940

Czy istnieje ciąg $\{\varphi_i(t)\}$ ortogonalny unormowany i zupełny w przedziale $(0 \leq t \leq 1)$ o tej własności, że dla każdej funkcji ciągłej $f(t)$, $0 \leq t \leq 1$ (nie identycznej zeru) rozwinięcie $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) \int_0^1 f(t)\varphi_i(t)\,dt$ jest prawie w każdym punkcie nieograniczone.

186. Проблема П. Александров 19. IV. 1940

1) Пусть P — „искривленный" полиэдр (т.е. полиэдр, из симплициального разбиения которого удалены некоторые симплексы произвольных размерностей), лежащий в R^n. Тогда $R^n - P$ есть также искривленный полиэдр. Под группами Бетти ~~полиэдра~~ искривленного полиэдра P понимаем обыкновенную группу Бетти в смысле Vietoris'a. Тогда для искривленных полиэдров справедлив закон двойственности Alexander'a.

Доказать: если $P \subset R^n$ топологический искривленный полиэдр (т.е. топологический образ искривленного полиэдра), то для P справедлив закон двойственности Alexander'a.

2) Доказать или опровергнуть, что для любого бикомпактного Hausdorff'ова пространства индуктивное определение размерности совпадает с определением размерности при помощи покрытий.

3) Доказать (или опровергнуть) невозможность открытого непрерывного отображения p-мерного куба на q-мерный куб при $q > p$.

П. Александров

186. Problème de P. Alexandroff. 19. IV. 1940.

1° Soit P un polyèdre „mutilé" (c. à d. dans la décomposition simpliciale duquel on a supprimé un certain nombre de simplexes de dimensions arbitraires), situé dans R^n. Alors $R^n - P$ est aussi un polyèdre mutilé. Nous entendons par groupe de Betti d'un polyèdre mutilé le groupe de Betti habituel au sens de Vietoris. Alors la loi de dualité d'Alexander est vraie pour les polyèdres mutilés. Démontrer que, $P \subset R^n$ étant un polyèdre mutilé <u>topologique</u> (c. à d. une image topologique d'un polyèdre mutilé), la loi de dualité d'Alexander subsiste encore.

réfuter

2° Démontrer (ou abolir) le théorème: quel que soit un espace de Hausdorff bicompact, la définition inductive de la dimension équivaut à celle donnée à l'aide des couvertures (Überdeckungen).

3° Démontrer (ou abolir) l'impossibilité d'une transformation continue intérieure du cube à p dimensions en cube à q dimensions pour $p < q$.

(P. Alexandroff)

187 Задача С Соболева

Для квазилинейного уравнения в частных произ-
-водных вида:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F$$

гиперболического типа. (A_{ij}, F зависят от $x_1, x_2, \dots x_n$, u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, … $\frac{\partial u}{\partial x_n}$) доказано что существует решение задачи Коши:

$$u\Big|_{x_n=0} = \varphi_0(x_1, \dots x_{n-1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = \varphi_1(x_1, \dots x_{n-1})$$

если функция φ_0 допускает производные до порядка $[\frac{n}{2}]+3$ интегрируемые с квадратом, а φ_1 производные до порядка $[\frac{n}{2}]+2$ интегрируемые с квадра-
-том. При этом предполагается что производные от A_{ij} и F по $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ и по u непрерывные функции.

Для общего вида нелинейного уравнения

$$\Phi\left(x_1, \dots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0$$

легко установить существование решения если только φ_0 имеет производные до порядка $[\frac{n}{2}]+4$, а φ_1 произ-
-водные до порядка $[\frac{n}{2}]+3$ интегрируемые с квадратом.

Нужно или построить пример такого уравнения и таких начальных условий имеющих производные порядка на единицу меньше интегрируемые с квадратом, чтобы реше-
-ния не существовало или понизить число производ-

187. Zadanie S. Sobolewa.

Dla równania quasi-linearnego o pochodnych cząstkowych postaci

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F$$

typu hiperbolicznego (gdzie A_{ij} i F zależą od $x_1,\dots,x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}$) udowodnione jest istnienie rozwiązania zadania Cauchy'ego

$$u\Big|_{x_n=0} = \varphi_0(x_1,\dots,x_{n-1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = \varphi_1(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

jeśli funkcja φ_0 ma pochodne do rzędu $\left[\frac{n}{2}\right]+3$ całkowalne wraz z kwadratem, zaś funkcja φ_1 pochodne do rzędu $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ całkow. wraz z kw. Przytem zakładamy, że pochodne funkcyj A_{ij} i F po $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ i po u są ciągłe.

Dla równania nieliniowego postaci ogólnej:

$$\Phi\left(x_1,\dots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\dots,\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0$$

Także otrzymać istnienie rozwiązania, jeśli funkcja φ_0 ma pochodne do rzędu $\left[\frac{n}{2}\right]+4$, a φ_1 do rzędu $\left[\frac{n}{2}\right]+3$, całkowalne wraz z kw.

Należy: albo zbudować przykład takiego równania i takich warunków początkowych mających pochodne rzędu

-ных нужных для возможности решения до того которое требуется в случае уравнений квази-линейных. Это последнее число уже не может быть уменьшено как показывают известные примеры.

Решившему проблему бутылку вина

20/IV 40 г. С. Соболев

188. Problem. Niech $z(x,y)$ będzie funkcją absolutnie ciągłą na każdej prostej równoległej do osi układu współrzędnych w kwadracie $0 \leq x, y \leq 1$; a $f(t)$ i $g(t)$ niech będą dwiema funkcjami abs. ciągłemi w $0 \leq t \leq 1$ o wartościach z $(0,1)$.

Czy wtedy funkcja $\varphi(t) = z(f(t), g(t))$ jest też absolutnie ciągła? Jeśli nie, to czy przy dodatkowem założeniu że $\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| dx\,dy < \infty$, $\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|^p dx\,dy < \infty$, gdzie $p > 1$.

27/XI 1940

M. Eidelheit

o 1 mniejszego, całkowalne wraz z kw., żeby rozwiązanie nie istniało, albo obniżyć ilość pochodnych, koniecznych dla ~~[illegible]~~ istnienia rozwiązania, do ilości niezbędnej w przypadku równań quasi-liniowych (ta ostatnia ilość nie może już być obniżona, jak wskazują znane przykłady).

Za rozwiązanie zagadnienia — butelka wina

20/IV 40 r. (S. Sobolew)

Проблема А. Ф. Бермана.

Пусть $w = f(z)$ — функция регулярная в круге $|z| < 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Назовем „главной звездой" этой функции следующую однолистную звездообразную часть: на месте римановой поверхности, изображающей функцию $w = f(z)$, которой принадлежит точка $w = f(0) = 0$, берется наибольшая однолистная часть, принадлежащая поверхности.

Доказать теорему:

„Главная звезда" функции $w = f(z)$ содержит круг, радиуса не меньшего абсолютной константы B^* (обобщение теоремы A. Bloch'a)

Львов, 31. I. 1941. [illegible]

190. Задача Л. Люстерника. Пусть в гильбертовом пространстве L_2 задан аддитивный функционал $f(x)$[1] и самосопряженный оператор A. Если f линеен, то он есть элемент L_2 и притом $Af = f(Ax)$. Распространим операцию A и на все аддитивные функционалы f по формуле: $Af = f(Ax)$. Если λ есть точка непрерывного спектра для A, то можно найти бесконечное множество аддитивных функционалов f, не тождественно

[1] $f(x)$ определен на части L_2

равных нулю, для которых $(A-\lambda E)f\equiv 0$, т.е. $f(Ax-\lambda x)\equiv 0$. Эти $f(x)$ можно рассматривать как своего рода „идеальные" собственные элементы для точки λ непрерывного спектра.

Как отражается кратность непрерывного спектра на структуре множеств идеальных собственных элементов.

Рекомендую думника сталинского.

Львов, 4 января 1941 г. Л. Люстерник

|191| Zagadnienie E. Szpilrajna.

Definicje pomocnicze. *Miarą* nazywam każdą funkcję nieujemną, przeliczalnie addytywną zbioru, określoną na pewnym ciele K przeliczalnie addytywnym podzbiorów ustalonego zbioru X i przytem taką, że $\mu(X)=1$. Miara μ jest *wypukła* (według M. Frécheta: „sans singularités"), gdy dla każdego zbioru A, takiego że $\mu(A)>0$ istnieje zbiór $B\subset A$, taki że $\mu(A)>\mu(B)>0$. Miara μ jest *ośrodkowa*, gdy istnieje klasa przeliczalna $D\subset K$, taka że dla każdego $\eta>0$ i każdego $M\in K$ istnieje $L\in D$, że $\mu[(M-L)+(L-M)]<\eta$. Klasa $R\subset K$ jest klasą zbiorów *stochastycznie niezależnych* wzgl. μ, gdy $\mu(A_1\cdot A_2\ldots A_n)=\mu(A_1)\cdot\mu(A_2)\cdot\ldots\mu(A_n)$ dla każdego ciągu $\{A_k\}$ zbiorów należących do R.

Definicja bazy. Klasę $B\subset K$ nazywam *bazą* miary μ, gdy 1° B jest klasą zbiorów stochastycznie niezależnych wzgl. μ i 2° wszystkie zbiory klasy K dadzą się aproksymować z dokładnością do zbiorów miary μ zero przez zbiory najmniejszego ciała przeliczalnie addytywnego zawierającego B.

Uwagi. Niech B_n oznacza zbiór liczb odcinka $\langle 0,1\rangle$, których n-ta cyfra rozwinięcia dwójkowego $=1$. Ciąg $\{B_n\}$ jest bazą dla miary Lebesgue'a w odcinku $\langle 0,1\rangle$. – Wynika stąd łatwo, że każda miara wypukła ośrodkowa ma bazę. W znanych przykładach miar nieośrodkowych również istnieje baza.

Zagadnienie. Czy każda miara wypukła ma bazę?

Lwów, kwiecień 1941.

192. <u>Definicje</u>. 1. Przestrzeń topologiczna T ma <u>własność (S)</u> (Suslina), gdy każda rodzina zbiorów rozłącznych, otwartych w T, jest najwyżej przeliczalna. 2. Przestrzeń T ma <u>własność (K)</u> (Knastera), gdy każda rodzina nieprzeliczalna zbiorów otwartych w T zawiera podrodzinę nieprzeliczalną zbiorów mających punkty wspólne każdy z każdym.

<u>Uwagi</u>. 1. Widać odrazu, że warunek (K) pociąga za sobą (S) i, że, w zakresie przestrzeni metrycznych, każdy z nich jest równoważny ośrodkowości. 2. B. Knaster udowodnił w kwietniu 1941, że, w zakresie zbiorów uporządkowanych ciągłych, własność (K) jest równoważna ośrodkowości. Zagadnienie Suslina jest więc równoważne pytaniu, czy dla zbiorów uporządkowanych ciągłych własność (S) pociąga za sobą własność (K).

<u>Zagadnienie B. Knastera i E. Szpilrajna</u>. Czy istnieje przestrzeń topologiczna (w sensie Hausdorffa, ew. choćby w sensie słabszym, np. przestrzeń Kołmogorowa) o własności (S), a nie mająca własności (K)?

<u>Uwaga</u>. 3. W myśl uwagi 2 odpowiedź negatywna dałaby rozwiązanie zagadnienia Suslina.

<u>Zagadnienie E. Szpilrajna</u>. Czy własność (S) jest niezmiennikiem mnożenia kartezjańskiego dwóch czynników?

<u>Uwagi</u> 4. Można wykazać, że jeżeli tak, to jest ona również niezmiennikiem mnożenia kartezjańskiego ilukolwiek (nawet nieprzeliczalnie wielu) czynników. 5. E. Szpilrajn udowodnił w maju 1941, że własność (K) jest niezmiennikiem mnoże-

nia kartezjańskiego ilukolwiek czynników, a B. Lance i M. Wiszik stwierdzili, że jeśli jedna przestrzeń ma własność (S), a druga – własność (K), to ich iloczyn kartezjański ma własność (S).

Lwów, maj 1941.

"Oczekiwana" l. zapałek: 7

75 "Średnia" l. zapałek: 9

"Prawdop., że $x \leq 9 \to 0{\cdot}68$

Prawdop., że $x \leq 18 \to 0{\cdot}95$

Prawdop., że $x \leq 27 \to 0{\cdot}997$

"Prawdopodobna" l. zapałek 6

"Prawdopodobieństwo, że $x \leq 6$ jest 0·5

(2 pudełka po 50 zapałek).

[Ścisłe rozwiązanie zadania wymaga dłuższych rachunków].

[signature]

31/5/41.