II. Układy wektorów

§ 12. Moment ogólny układu wektorów. Niech dany będzie układ wektorów:

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n.$$

Oznaczmy przez $\bar{s}$ *sumę układu* (t. j. sumę wektorów układu). A więc

$$\bar{s} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n.$$

Obierzmy dowolny punkt O.

Momentem ogólnym lub krótko *momentem układu względem O* nazywamy sumę momentów poszczególnych wektorów względem O. Oznaczamy go przez

$$\bar{M}_O.$$

Mamy więc

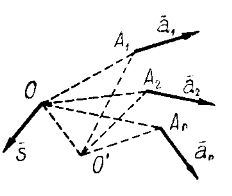
$$\bar{M}_O = \mathrm{Mom}_O\, \bar{a}_1 + \mathrm{Mom}_O\, \bar{a}_2 + \dots + \mathrm{Mom}_O\, \bar{a}_n.$$

Moment ogólny czasem oznaczamy też przez

$$\mathrm{Mom}_O(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_n).$$

Obierzmy inny punkt O'. Mamy

$$\bar{M}_{O'} = \mathrm{Mom}_{O'}\, \bar{a}_1 + \mathrm{Mom}_{O'}\, \bar{a}_2 + \dots \mathrm{Mom}_{O'}\, \bar{a}_n.$$



Ponieważ $\mathrm{Mom}_O \bar{a}_1 = \bar{a}_1 \times \overline{O'A_1}$, gdzie A_1 jest początkiem wektora $\bar{a}_1$ i t. d., więc

$$\bar{M}_{O'} = \bar{a}_1 \times \overline{O'A_1} + \bar{a}_2 \times \overline{O'A_2} + \dots$$

Lecz $\overline{O'A_1} = \overline{O'O} + \overline{OA_1}$ i t. d., zatem

$$\bar{M}_{O'} = \bar{a}_1 \times (\overline{O'O} + \overline{OA_1}) + \bar{a}_2 \times (\overline{O'O} + \overline{OA_2}) + \dots$$

Po wymnożeniu otrzymujemy:

$$\text{(1)} \qquad \bar{M}_{O'} = (\bar{a}_1 \times \overline{O'O} + \bar{a}_2 \times \overline{O'O} + \dots) + (\bar{a}_1 \times \overline{OA_1} + \bar{a}_2 \times \overline{OA_2} + \dots).$$

Lecz $\bar{a}_1 \times \overline{O'O} + \bar{a}_2 \times \overline{O'O} + \dots = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots) \times \overline{O'O} = \bar{s} \times \overline{O'O}$. Suma zawarta w drugim nawiasie równości (1) przedstawia moment układu względem O. Zatem

$$\text{(I)} \qquad \bar{M}_{O'} = \bar{s} \times \overline{O'O} + \bar{M}_O.$$

Iloczyn $\bar{s} \times \overline{O'O}$ jest momentem względem O' sumy układu wektorów o początku O.

A więc: *jeżeli zmieniamy punkt, względem którego wyznaczamy ogólny moment układu, wówczas moment ten zmienia się o moment sumy układu zaczepionej w dawnym punkcie, wziętej względem nowego punktu.*

Z twierdzenia powyższego wynikają następujące wnioski:

1. *Jeżeli suma układu jest zerem, to moment ogólny jest stały* (t. j. nie zależy od punktu, względem którego się go wyznacza).

Jeżeli bowiem $\bar{s}=0$, wówczas $\bar{s}\times\overline{O'O}=0$, więc $\bar{M}_{O'}=\bar{M}_O$.

2. *Jeżeli momenty ogólne względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej są równe, to suma układu jest zerem.*

Załóżmy bowiem, że momenty ogólne względem punktów O, O', O'' nie leżących na jednej prostej są równe. Zatem

$$\bar{M}_O=\bar{M}_{O'}=\bar{M}_{O''}, \quad \text{skąd} \quad \bar{s}\times\overline{O'O}=0 \quad \text{i} \quad \bar{s}\times\overline{O''O}=0.$$

Jeżeli więc $\bar{s}\neq 0$, to $\bar{s}\parallel\overline{OO'}$ i $\bar{s}\parallel\overline{O''O}$, co niemożliwe, gdy O, O', O'' nie leżą na jednej prostej.

3. *Jeśli punkt, względem którego wyznaczamy moment ogólny, przesuwa się wzdłuż prostej równoległej do sumy układu, wówczas moment nie ulega zmianie.*

Jeśli bowiem $\bar{s}\parallel\overline{O'O}$, to $\bar{s}\times\overline{O'O}=0$, więc $\bar{M}_{O'}=\bar{M}_O$.

4. *Iloczyn skalarowy momentu ogólnego przez sumę układu jest wielkością stałą* (t. j. nie zależy od punktu, względem którego moment jest wyznaczony).

Pomnóżmy bowiem obustronnie równość (I) skalarowo przez $\bar{s}$. Otrzymamy $\bar{s}\bar{M}_{O'}=\bar{s}(\bar{s}\times\overline{O'O})+\bar{s}\bar{M}_O$, lecz $\bar{s}\times\overline{O'O}\perp\bar{s}$,[1] zatem $\bar{s}(\bar{s}\times\overline{O'O})=0$, skąd

$$\bar{s}\bar{M}_{O'}=\bar{s}\bar{M}_O.$$

Iloczyn skalarowy momentu ogólnego przez sumę nazywa się *parametrem* układu.

5. *Rzut momentu na kierunek sumy jest wielkością stałą* (przyczem zakłada się, że suma jest różna od zera).

Mamy bowiem na mocy wniosku 4 i określenia iloczynu skalarowego $|\bar{s}|\,\mathrm{Rzut}_s\bar{M}_{O'}=|\bar{s}|\,\mathrm{Rzut}_s\bar{M}_O$, skąd

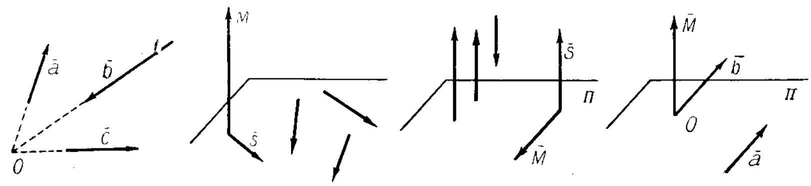
$$\mathrm{Rzut}_s\bar{M}_{O'}=\mathrm{Rzut}_s\bar{M}_O.$$

§ 13. Parametr. Wyznaczymy obecnie parametr (t. j. iloczyn skalarowy momentu ogólnego przez sumę) dla pewnych układów występujących często w mechanice.

Układem *środkowym* lub *centralnym* nazywamy układ, w którym przedłużenia poszczególnych wektorów przechodzą przez pewien stały punkt O, zwany *środkiem* (rys. 1).

Moment układu względem środka jest zerem, gdyż moment każdego wektora jest zerem. Zatem i parametr jest zerem.

A więc: *parametr układu środkowego jest zerem.*



1. 2. 3. 4.

Układem *płaskim* nazywamy układ, w którym wszystkie wektory leżą w jednej płaszczyźnie Π (rys. 2).

Moment ogólny układu względem dowolnego punktu O płaszczyzny Π jest prostopadły do Π, gdyż momenty poszczególnych wektorów względem O są prostopadłe do Π. Ponieważ suma leży w płaszczyźnie Π, więc suma jest prostopadła do momentu ogólnego. Wynika stąd, że parametr jest zerem.

A więc: *parametr układu płaskiego jest zerem.*

Układem *równoległym* nazywamy układ, w którym wszystkie wektory są równoległe (rys. 3).

Jeżeli suma $\bar{s}$ jest żerem, to parametr jest oczywiście równy zeru. Załóżmy więc, że $\bar{s} \neq 0$. Obierzmy dowolny punkt O. Momenty poszczególnych wektorów względem O leżą w płaszczyźnie Π prostopadłej do wektorów układu i przechodzącej przez O. Zatem moment ogólny leży również w płaszczyźnie Π. Ponieważ $\bar{s} \perp \Pi$, więc $\bar{s}$ jest prostopadłe do momentu ogólnego, wobec czego parametr jest zerem.

A więc: *parametr układu równoległego jest zerem.*

Załóżmy teraz, że wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są *skośne* (t. j. nie leżące w jednej płaszczyźnie). Niechaj O będzie początkiem wektora b (rys. 4).

Moment $\bar{M}$ układu $(\bar{a}, \bar{b})$ względem O równy jest oczywiście $\text{Mom}_O \bar{a}$. Parametr K wynosi $K = \bar{M}\bar{s} = \bar{M}(\bar{a}+\bar{b}) = \bar{M}\bar{a} + \bar{M}\bar{b}$. Lecz $\bar{M} = \text{Mom}_O \bar{a}$ jest prostopadły do płaszczyzny Π przechodzącej przez O i wektor $\bar{a}$. Ponieważ w płaszczyźnie Π leży wektor $\bar{a}$, zaś nie leży wektor $\bar{b}$, więc moment $\bar{M}$ jest prostopadły do $\bar{a}$, nie jest natomiast prostopadły do $\bar{b}$, skąd na mocy ostatniej równości $K = \bar{M}\bar{b} \neq 0$.

A więc: *parametr układu złożonego z dwóch wektorów skośnych jest różny od zera.*

§ 14. Układy równoważne. Dwa układy wektorów $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots)$ i $(\bar{a}'_1, \bar{a}'_2 \ldots)$ nazywamy *równoważnymi*, jeżeli mają równe sumy i równe momenty ogólne względem każdego punktu.

Jeżeli mamy układ $(\bar{a})$ złożony z jednego tylko wektora $\bar{a}$ i układ $(\bar{a}')$ złożony z jednego tylko wektora $\bar{a}'$, to — jak wynika z twierdzenia 2, str. 17 — warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układy $(\bar{a})$ i $(\bar{a}')$ były równoważne, jest $\bar{a} \equiv \bar{a}'$. A więc w tym przypadku pojęcie równoważności układów pokrywa się z pojęciem równoważności wektorów.

W przypadku ogólnym mamy następujące twierdzenia:

1. *Jeżeli dwa układy mają równe sumy i równe momenty ogólne względem pewnego punktu, to układy te są równoważne.*

Wynika to ze wzoru (I), str. 19. Jeżeli bowiem momenty względem punktu O są równe i sumy są równe, to momenty względem każdego punktu O' będą równe, gdyż przy zastąpieniu punktu O przez O' ulegną one równym zmianom w obu układach.

2. *Jeżeli dwa układy mają względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej równe momenty, to układy te są równoważne.*

Jeżeli bowiem oznaczymy przez O_1, O_2, O_3 punkty, względem których momenty ogólne obu układów są równe, zaś przez $\bar{s}$ i $\bar{s}'$ sumy tych układów, to otrzymamy ze wzoru (I), str. 19, $\bar{s} \times \overline{O_1O_2} = \bar{s}' \times \overline{O_1O_2}$ i $\bar{s} \times \overline{O_1O_3} = \bar{s}' \times \overline{O_1O_3}$, skąd

$$(\bar{s} - \bar{s}') \times \overline{O_1O_2} = 0 \qquad \text{i} \qquad (\bar{s} - \bar{s}') \times \overline{O_1O_3} = 0.$$

Gdyby było $\bar{s} - \bar{s}' \neq 0$, to mielibyśmy $\bar{s} - \bar{s}' \parallel \overline{O_1O_2}$ i $\bar{s} - \bar{s}' \parallel \overline{O_1O_3}$, co niemożliwe, bo O_1, O_2, O_3 nie leżą na jednej prostej. Jest zatem $\bar{s} - \bar{s}' = 0$, czyli $\bar{s} = \bar{s}'$, skąd na mocy poprzedniego twierdzenia wynika równoważność układów.

Z określenia parametru wnosimy natychmiast, że *układy równoważne mają równe parametry.*

Twierdzenie odwrotne jest oczywiście fałszywe.

Układy równoważne zeru. Jeżeli suma układu jest zerem, to — jak wiemy — moment ogólny jest stały. Otóż jeżeli suma układu jest zerem i moment ogólny jest zerem, układ nazywamy *układem równoważnym zeru.*

Układ równoważny zeru jest równoważny wektorowi zerowemu.

Aby przekonać się, czy układ jest równoważny zeru, wystarczy zbadać, czy jego suma i moment względem jakiegoś dowolnego punktu są równe zeru.

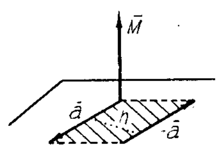
Z twierdzenia 2, str. 20 wynika łatwo, że *układ jest równoważny zeru, jeżeli moment ogólny układu względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej jest równy zeru.*

Układ trzech wektorów równoważnych zeru. Jeżeli *układ złożony z trzech wektorów, jest równoważny zeru, to przedłużenia tych wektorów przechodzą przez jeden punkt (lub wektory są równoległe).*

Przyjmijmy, że układ wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ jest równoważny zeru. Moment ogólny względem A (początku wektora $\bar{a}$) jest więc zerem, skąd $\mathrm{Mom}_A \bar{b} + \mathrm{Mom}_A \bar{c} = 0$, a więc $\mathrm{Mom}_A \bar{b} = -\mathrm{Mom}_A \bar{c}$. Wynika stąd, że wektory $\bar{b}$ i $\bar{c}$ leżą w płaszczyźnie Π przechodzącej przez A. Ponieważ $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$, więc $\bar{a}=-\bar{b}-\bar{c}$, zatem $\bar{a}$ także leży w płaszczyźnie Π. Oznaczmy przez O punkt, w którym przecinają się wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$. Ponieważ moment ogólny układu względem O redukuje się do momentu wektora $\bar{c}$ względem O, więc $\mathrm{Mom}_O \bar{c} = 0$, zatem $\bar{c}$ przechodzi również przez O. Wreszcie, jeżeli $\bar{a} \| \bar{b}$, to również $\bar{a} \| \bar{c}$, bo $\bar{c} = -\bar{a} - \bar{b}$ (p. str. 21, rys. 1).

§ 15. Para wektorów. *Parą wektorów* nazywamy układ złożony z dwu wektorów $\bar{a}$ i $-\bar{a}$ równoległych, lecz przeciwnie skierowanych i równych co do długości.

Ponieważ suma pary wektorów jest równa zeru, więc moment pary jest stały. Obliczając go względem początku wektora $\bar{a}$, widzimy, że moment wektora $\bar{a}$ jest zerem, moment zaś wektora $-\bar{a}$, jest prostopadły do płaszczyzny pary i równy polu równoległoboku zbudowanego na wektorach wchodzących w skład pary.



A więc: *moment pary wektorów jest równy polu równoległoboku zbudowanego na wektorach pary i jest prostopadły do płaszczyzny pary.*

Jeżeli wektory pary leżą na tej samej prostej, to oczywiście moment jest zerem.

Jeśli h oznacza odległość wektorów $\bar{a}$ i $-\bar{a}$ zaś $\bar{M}$ moment pary, to

$$(1) \qquad |\bar{M}| = |\bar{a}| \cdot h.$$

Do danego wektora $\bar{M}$ można zawsze znaleźć parę o momencie równym $\bar{M}$. Wystarczy na płaszczyźnie prostopadłej do $\bar{M}$ obrać dowolny równoległobok o polu równym $|\bar{M}|$. Przeciwległe boki, odpowiednio skierowane, utworzą szukaną parę wektorów. Oczywiście, zadanie to możemy rozwiązać na nieskończenie wiele sposobów.

Dwie pary o równych momentach tworzą układy równoważne. Jeżeli więc parę wektorów dowolnie przesuniemy lub skręcimy w płaszczyźnie pary, to otrzymamy parę równoważną.

§ 16. Redukcja układu wektorów. Niech dany będzie układ S złożony z wektorów $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$. Zajmiemy się wyznaczeniem najprostszego układu równoważnego układowi S.

Obierzmy dowolny punkt O. Oznaczmy przez $\bar{s}$ sumę układu S, przez $\bar{M}$ moment ogólny względem O. Weźmy pod uwagę układ R złożony z pary $(\bar{a}, -\bar{a})$ o momencie równym $\bar{M}$ i z wektora $\bar{s}$ o początku O. Układy R i S są oczywiście równoważne, bo mają sumy równe $\bar{s}$ i momenty względem O równe $\bar{M}$.

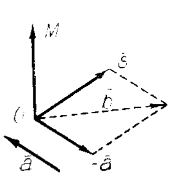
A więc: *każdy układ wektorów równoważny jest układowi złożonemu ze sumy o początku w dowolnym punkcie O i pary o momencie równym momentowi układu względem O.*

Jest to t. zw. *twierdzenie o redukcji*. Punkt O nazywamy *środkiem redukcji*.

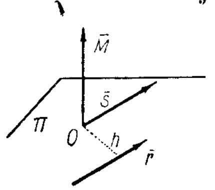
Parę $(\bar{a}, -\bar{a})$ możemy tak dobrać, by punkt O był początkiem wektora $-\bar{a}$. Zastąpmy wektory $\bar{s}$ i $-\bar{a}$ ich sumą $\bar{b}$ o początku O (rys. 1). Układ złożony z wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ jest oczywiście równoważny układowi S.

Zatem: *każdy układ wektorów równoważny jest układowi dwu wektorów, z których jeden ma początek w punkcie dowolnie obranym.*

Wszelki układ wektorów jest więc równoważny pewnemu układowi złożonemu z wektora i pary, lub z dwóch wektorów. Zajmiemy się teraz wyznaczeniem warunków, przy których dany układ jest równoważny jednemu tylko wektorowi lub jednej parze.



1.



2.

Rozpatrzmy kolejno przypadki, w których parametr układu jest różny od zera i równy zeru.

1^0 Parametr różny od zera. Układ złożony z jednego wektora lub jednej pary jest układem płaskim, ma zatem parametr $K=0$. Jeżeli więc parametr układu S jest różny od zera, to układ S nie może być równoważny jednemu wektorowi ani parze wektorów, ponieważ układy równoważne mają równe parametry.

Załóżmy teraz, że układ S o parametrze $K \neq 0$ równoważny jest układowi R złożonemu z dwu wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$. Parametr układu R jest zatem także różny od zera. Wynika stąd, że wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ nie mogą leżeć w jednej płaszczyźnie, są więc skośne (p. § 13, str. 21 i 22).

Zatem: *jeżeli parametr układu jest różny od zera, to układ jest równoważny układowi dwu wektorów skośnych.*

2^0 Parametr równy zeru, suma różna od zera. Przypuśćmy, że parametr K układu S jest zerem, zaś suma $\bar{s} \neq 0$. Obierzmy dowolny punkt O i oznaczmy przez $\bar{M}$ moment układu S względem O. Ponieważ $K=\bar{M}\bar{s}=0$, więc $\bar{M} \perp \bar{s}$. Przeprowadźmy przez O płaszczyznę Π prostopadłą do $\bar{M}$ (str. 24, rys. 2). Na Π możemy obrać wektor $\bar{r}$ równy wektorowi $\bar{s}$, tak, by $\mathrm{Mom}_O \bar{r}=\bar{M}$. Odległość h wektora $\bar{r}$ od O dostaniemy z równości $|\bar{M}|=h|\bar{r}|$. Łatwo zauważyć, że układ S równoważny jest wektorowi $\bar{r}$.

A więc: *jeżeli parametr układu jest równy zeru, zaś suma różna od zera, to układ równoważny jest jednemu wektorowi.*

Wektor $\bar{r}$, któremu równoważny jest cały układ S, nazywa się *wektorem wypadkowym* lub krótko *wypadkową* układu S.

Nie należy mieszać sumy z wypadkową. Suma ma tylko określoną długość, kierunek i zwrot; wypadkowa ma ponadto określone położenie, t. j. prostą, na której leży.

3^0 Parametr i suma równe zeru. Załóżmy wreszcie, że zarówno parametr jak suma układu są równe zeru. Na mocy twierdzenia o redukcji wynika stąd, że układ jest równoważny parze wektorów. Ponieważ suma jest zerem, więc moment ogólny $\bar{M}$ jest stały.

Jeżeli $\bar{M} \neq 0$, wówczas para wektorów jest najprostszym układem równoważnym danemu. Jeżeli zaś $\bar{M}=0$, to ponieważ z założenia suma równa się zeru, więc układ jest równoważny zeru, czyli wektorowi zerowemu.

A więc: *układ o parametrze i sumie równych zeru jest równoważny parze wektorów lub wektorowi zerowemu, zależnie od tego czy moment ogólny jest różny od zera czy równy zeru.*

Powyższe wyniki zebrane są w następującej tabelce:

Parametr	Suma	Moment	Najprostszy układ równoważny
$K \neq 0$	—	—	wektor i para lub dwa wektory skośne
	$\bar{s} \neq 0$	—	wektor wypadkowy
$K=0$	$\bar{s}=0$	$\bar{M} \neq 0$	para wektorów
	$\bar{s}=0$	$\bar{M}=0$	wektor zerowy

Wynikają z nich łatwo twierdzenia następujące:

1. *Jeżeli moment układu jest zerem względem pewnego punktu O, to układ ma wypadkową o początku w O.*

2. *Układ środkowy ma wypadkową zaczepioną w środku.*

Twierdzenia te wynikają z twierdzenia o redukcji (str. 24), jeżeli za środek redukcji wziąć punkt O (wzgl. środek układu).

3. *Układ płaski ma wypadkową albo jest równoważny parze.*

4. *Układ równoległy ma wypadkową albo jest równoważny parze.*

Twierdzenia 3 i 4 otrzymujemy od razu z tabelki, gdyż w obu przypadkach parametr K jest zerem.

§ 17. Oś środkowa. Skrętnik. Niech dany będzie układ S o sumie różnej od zera. Wyznaczmy miejsce geometryczne punktów, względem których moment ogólny jest równoległy do $\bar{s}$ (lub $=0$).

Obierzmy w tym celu dowolny punkt O. Niechaj $\bar{M}_O = \overline{OA}$ będzie momentem ogólnym układu względem punktu O, zaś $\overline{OB}$ rzutem $\bar{M}_O$ na $\bar{s}$.

Wyznaczmy teraz punkt O', względem którego moment sumy $\bar{s}$ o początku w O, równa się $\overline{AB}$. Punkt taki znajdziemy w odległości d od O na prostej prostopadłej w punkcie O do $\overline{AB}$ i $\bar{s}$, gdzie d spełnia warunek:

$$d \cdot |\bar{s}| = |\overline{AB}|.$$

Mamy zatem $\mathrm{Mom}_{O'}\bar{s} = \overline{AB}$ czyli

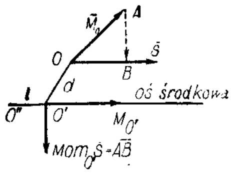
$$\bar{s} \times \overline{O'O} = \overline{AB},$$

więc na mocy (I), str. 19

$$\bar{M}_{O'} = \bar{s} \times \overline{O'O} + \bar{M}_O,$$

skąd

$$\bar{M}_{O'} = \overline{AB} + \overline{OA} = \overline{OB}.$$



A więc $\bar{M}_{O'}$ jest równoległy do $\bar{s}$ (lub $=0$, gdy $\bar{M}_O \perp \bar{s}$).

Przeprowadźmy przez O' prostą l równoległą do sumy $\bar{s}$. Dla dowolnego punktu O'' prostej l zachodzi związek $\bar{s} \| \overline{O'O''}$, więc $\bar{s} \times \overline{O'O''} = 0$, skąd $\bar{M}_{O'} = \bar{M}_{O''}$ (p. str. 20, wniosek 3).

A więc: moment ogólny względem dowolnego punktu prostej l jest równoległy do $\bar{s}$ (lub $=0$).

Punkty poza prostą l nie posiadają powyższej własności. Jeżeli bowiem dla jakiegoś punktu O_1 moment $\bar{M}_{O_1}$ jest równoległy do $\bar{s}$ lub równy zeru, to na mocy twierdzenia 5, str. 20, mamy $\mathrm{Rzut}_{\bar{s}} \bar{M}_{O_1} = \mathrm{Rzut}_{\bar{s}} \bar{M}_{O'}$. Zatem $\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_{O'}$. Wynika stąd na mocy wzoru (I), str. 19, że $\bar{s} \times \overline{O'O_1} = 0$, czyli że $\bar{s} \| \overline{O'O_1}$. Punkt O_1 leży więc na prostej l.

Udowodniliśmy zatem, że szukanym miejscem geometrycznym jest prosta równoległa do $\bar{s}$. Prostą tę nazywamy *osią środkową* układu.

Oś środkowa układu jest to więc prosta o tej własności, że moment ogólny względem dowolnego jej punktu jest równoległy do sumy lub równy zeru.

A więc: *układ, którego suma jest różna od zera, posiada jedną (i tylko jedną) oś środkową.*

Układ złożony z wektora i pary o momencie równoległym do wektora nazywamy *skrętnikiem.*

W szczególności skrętnikiem nazywamy jeden wektor lub parę.

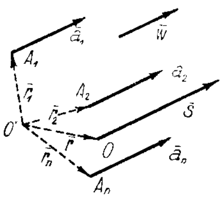
Obierając punkt na osi środkowej, widzimy, że na mocy tw. o redukcji, str. 24, układ redukuje się do skrętnika. Jeśli suma układu jest zerem, to układ redukuje się do pary wektorów, a więc również do skrętnika.

Zatem: *wszelki układ jest równoważny pewnemu skrętnikowi.*

§ 18. Środek wektorów równoległych. Niech dany będzie układ wektorów równoległych $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ o sumie różnej od zera. Oznaczmy przez $\bar{w}$ wektor o długości 1, równoległy do wektorów układu. Wektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ możemy przedstawić w postaci

$$\bar{a}_1 = a_1\bar{w}, \qquad \bar{a}_2 = a_2\bar{w}, \qquad \dots, \qquad \bar{a}_n = a_n\bar{w}$$

gdzie liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są co do wartości bezwzględnej równe długościom wektorów $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots, \bar{a}_n$. Zatem $\bar{s} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)\bar{w}$. Ponieważ $\bar{s} \neq 0$, więc $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$.



Obierzmy dowolny punkt O' i oznaczmy przez $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ wektory $\overline{O'A_1}, \overline{O'A_2}, \dots, \overline{O'A_n}$, gdzie $A_1, A_2, \dots, A_n$ są początkami wektorów $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$. A więc

$$\bar{M}_{O'} = a_1\bar{w} \times \bar{r}_1 + a_2\bar{w} \times \bar{r}_2 + \dots + a_n\bar{w} \times \bar{r}_n$$

czyli

$$\bar{M}_{O'} = \bar{w} \times \sum a_i \bar{r}_i. \tag{1}$$

Obierzmy punkt O tak, by

$$\bar{r} = \overline{O'O} = \frac{\sum a_i \bar{r}_i}{\sum a_i}. \tag{2}$$

Na mocy wzoru (I), str. 19, jest

$$\bar{M}_O = \bar{s} \times \overline{OO'} + \bar{M}_{O'}. \tag{3}$$

Ponieważ

$$\bar{s} \times \overline{OO'} = (\sum a_i \bar{w}) \times (-\bar{r}) = -\bar{w} \times \bar{r} \sum a_i,$$

więc według (2) jest $\bar{s} \times \overline{OO'} = -\bar{w} \times \sum a_i \bar{r}_i$. Stąd na mocy (1) i (3) wynika, że $\bar{M}_O = 0$.

Zatem wypadkowa układu przechodzi przez O (str. 26, tw. 1).

Zauważmy, że wedle (2) położenie punktu O nie zależy od kierunku $\bar{w}$ wektorów $\bar{a}_i$. Jeżeli więc skręcimy wektory $\bar{a}_i$ około ich punktów zaczepienia, to wypadkowa znowu przejdzie przez O.

Punkt O nazywa się *środkiem układu wektorów* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$.

Jeżeli współrzędne początków A_i oznaczymy przez x_i, y_i, z_i, współrzędne zaś środka przez x_0, y_0, z_0, to obierając punkt O' w początku układu, otrzymamy na mocy (2)

$$x_0 = \frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}, \quad y_0 = \frac{\sum a_i y_i}{\sum a_i}, \quad z_0 = \frac{\sum a_i z_i}{\sum a_i}. \tag{4}$$

§ 19. Przekształcenia elementarne układu. Następujące przekształcenia układu wektorów nazywamy *elementarnymi:*

a) dodanie do układu (lub usunięcie z niego) dwóch wektorów leżących na jednej prostej, równych co do długości, lecz przeciwnie skierowanych,

b) dodanie do układu (lub usunięcie z niego) kilku wektorów o wspólnym początku i o sumie równej zeru.

Przekształcenia elementarne nie zmieniają oczywiście sumy ani momentu układu. Stosując zatem do układu przekształcenia elementarne, otrzymamy zawsze układy z nim równoważne. Przekształcenia elementarne grają ważną rolę w teorii ciała sztywnego.

Łatwo wykazać, że przy pomocy przekształceń elementarnych możemy:

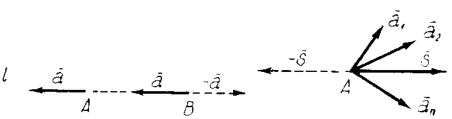
1) *punkt zaczepienia wektora przesunąć do dowolnie obranego punktu na prostej, na której wektor leży,*

2) *kilka wektorów o wspólnym początku zastąpić ich sumą o tym samym początku,*

3) *jeden wektor zastąpić kilkoma wektorami o tym samym początku co wektor dany i o sumie równej wektorowi danemu.*

Dowód: 1) Przypuśćmy, że wśród wektorów danego układu występuje wektor $\bar{a}$ o początku A.

Obierzmy na prostej l, na której $\bar{a}$ leży, dowolny punkt B. Dodajmy do układu dwa wektory $\bar{a}$ i $-\bar{a}$ o początku B. Wykonaliśmy więc przekształcenie elementarne (a). Usuńmy teraz z układu wektory: $\bar{a}$ (o początku A) i $-\bar{a}$. Będzie to przekształcenie elementarne (b). Operacje, jakie wykonaliśmy na układzie, sprowadzają się do przesunięcia punktu zaczepienia wektora $\bar{a}$ z A do B (p. rys. 1).



1. 2.

2) Przypuśćmy, że punkt A jest początkiem wektorów $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$. Dodajmy do układu dwa wektory o początku A: wektor $\bar{s} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n$ i wektor $-\bar{s}$ (przekształcenie elementarne (a)). Usuńmy teraz wektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, -\bar{s}$ (przekształcenie elementarne (b)). Operacje, jakie wykonaliśmy, sprowadzają się do zastąpienia wektorów $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ ich sumą $\bar{s}$ (p. rys. 2).

3) dowodzi się podobnie.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenia:

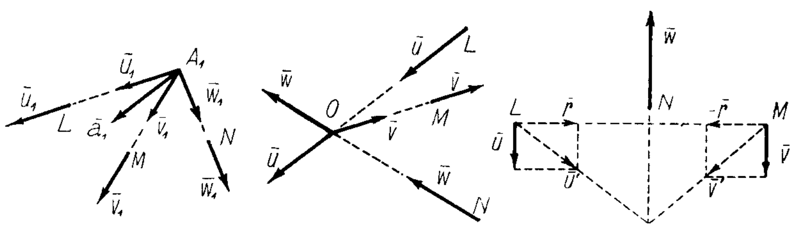
Twierdzenie 1. Wszelki układ wektorów można sprowadzić przy pomocy przekształceń elementarnych do układu z nim równoważnego, złożonego z trzech wektorów.

Dowód. Przypuśćmy, że mamy układ wektorów $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ zaczepionych odpowiednio w punktach $A_1, A_2, \dots, A_n$. Obierzemy trzy dowolne punkty L, M, N nie leżące na jednej prostej i takie, by w płaszczyźnie przechodzącej przez L, M, N nie leżał żaden z punktów $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Ponieważ proste A_1L, A_1M i A_1N nie leżą w jednej płaszczyźnie, więc wektor $\bar{a}_1$ możemy zastąpić trzema wektorami $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$, $\bar{w}_1$ o początku A_1, leżącymi na prostych A_1L, A_1M, A_1N, przyczem oczywiście $\bar{a}_1 = \bar{u}_1 + \bar{v}_1 + \bar{w}_1$ (rys. 1). Wektory $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1$ możemy przesunąć wzdłuż prostych, na których leżą, odpowiednio do punktów L, M, N. W ten sposób zastąpiliśmy wektor $\bar{a}_1$ wektorami $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1$ zaczepionymi w punktach L, M, N. Podobnie zastąpimy każdy z wektorów $\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ trzema wektorami zaczepionymi w L, M, N.

Wektory o początku L zastąpmy teraz ich sumą $\bar{u}$, zaczepioną również w L. Podobnie wektory o początkach M i N zastąpmy sumami $\bar{v}$ i $\bar{w}$ zaczepionymi odpowiednio w M i N.

W ten sposób przy pomocy przekształceń elementarnych sprowadziliśmy dany układ do układu złożonego z trzech wektorów, c. b. d. o.



1. 2. 3.

Twierdzenie 2. Układ równoważny zeru można przy pomocy przekształceń elementarnych sprowadzić do wektora zerowego.

Dowód. Załóżmy, że układ $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ jest równoważny zeru. Na mocy tw. 1 możemy go zastąpić przy pomocy przekształceń elementarnych układem złożonym z trzech wektorów $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, zaczepionych odpowiednio w punktach L, M, N. Układ $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ jest równoważny zeru, bo jest równoważny układowi danemu (przekształcenia elementarne nie zmieniają bowiem sumy ani momentu).

Na mocy twierdzenia ze str. 23, wektory $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ są albo równoległe albo ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie O (str. 30, rys. 2). W drugim przypadku możemy punkty zaczepienia wektorów $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ przenieść do O, a następnie wektory te usunąć, gdyż suma ich jest zerem.

Załóżmy więc, że wektory $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ są równoległe (str. 30, rys. 3). Gdyby $\bar{u}+\bar{v}=0$, byłoby oczywiście $\bar{w}=0$. Układ sprowadzałby się zatem do pary $\bar{u}$, $\bar{v}$. Ponieważ moment jest zerem, więc wektory $\bar{u}$ i $\bar{v}$ leżałyby na tej samej prostej; ponieważ nadto $\bar{u}+\bar{v}=0$, więc moglibyśmy wektory $\bar{u}$ i $\bar{v}$ usunąć. Niech więc $\bar{u}+\bar{v}\neq 0$. Dodajmy dwa wektory $\bar{r}$ i $-\bar{r}$ leżące na prostej LM i zaczepione odpowiednio w L i M. Wektory $\bar{u}$ i $\bar{r}$ o początku L możemy zastąpić ich sumą $\bar{u}'$ zaczepioną również w L. Podobnie wektory $\bar{v}$ i $-\bar{r}$ możemy zastąpić ich sumą $\bar{v}'$ zaczepioną w M. Wektory $\bar{u}'$ i $\bar{v}'$ nie są równoległe, zatem wektory $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}$ możemy jak poprzednio usunąć. A więc układ równoważny zeru sprowadziliśmy przy pomocy przekształceń elementarnych do wektora zerowego, c. b. d. o.

Twierdzenie 3. *Jeżeli dwa układy wektorów są równoważne, to przy pomocy przekształceń elementarnych można jeden układ przeprowadzić w drugi.*

Dowód. Załóżmy, że układ wektorów $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ zaczepionych w punktach $A_1, A_2, \dots, A_n$ jest równoważny układowi wektorów $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_r)$ zaczepionych w punktach $B_1, B_2, \dots, B_r$.

Dodajmy do pierwszego układu wektory $\bar{b}_1, -\bar{b}_1$ o początku B_1, wektory $\bar{b}_2, -\bar{b}_2$ o początku B_2 itd. Ponieważ wektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, $-\bar{b}_1, -\bar{b}_2, \dots, -\bar{b}_r$ tworzą układ równoważny zeru, więc na mocy tw. 2 możemy układ ten przy pomocy przekształceń elementarnych usunąć, t. j. zastąpić wektorem zerowym. Po usunięciu zostanie układ $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_r)$.