ROZDZIAŁ II

KINEMATYKA PUNKTU

I. Ruch względem układu odniesienia

§ 1. Czas. W kinematyce oprócz pojęć znanych z geometrii występuje pojęcie *czasu*. W rozważaniach kinematyki teoretycznej wystarczy przyjąć, że każdej chwili przypisana jest pewna liczba t, przyczem chwili wcześniejszej przypisana jest mniejsza liczba niż późniejszej; ponadto przy tym przyporządkowaniu każdej liczbie t odpowiadać ma, na odwrót, pewna chwila: liczbie większej chwila późniejsza.

Dla kinematyki teoretycznej jest zupełnie obojętne, w jaki sposób powyższe przyporządkowanie zostało określone. W zagadnieniach konkretnych postępujemy w sposób następujący. Obieramy dowolną *jednostkę czasu*, np. sekundę, i dowolną chwilę, którą nazywamy *chwilą początkową*. Chwili początkowej przypisujemy liczbę 0. Każdej innej chwili przyporządkowujemy liczbę t, której bezwzględna wartość równa się liczbie sekund, jakie upłynęły między chwilą początkową a daną; liczba t jest dodatnią dla chwil późniejszych od początkowej, ujemną zaś dla chwil wcześniejszych.

§ 2. Układ odniesienia. W kinematyce przyjmujemy, że dany jest pewien układ współrzędnych zwany *układem odniesienia*.

Ciało porusza się względem układu odniesienia, jeżeli zmieniają się współrzędne punktów ciała. Zadaniem kinematyki jest opis ruchu ciała względem układu odniesienia, polegający na podaniu współrzędnych punktów tego ciała dla każdej chwili czasu.

Dla kinematyki jest rzeczą obojętną, jak został obrany układ odniesienia. W zagadnieniach konkretnych obieramy układ odniesienia związany z pewnymi ciałami jak np. z ziemią, słońcem, gwiazdami stałymi i t. p.

Ruch ciała zależy od układu odniesienia. Względem jednego układu odniesienia ciało może być w spoczynku, względem innego zaś w ruchu. Podróżny siedzący w wagonie kolejowym jest względem wagonu (tj. układu odniesienia związanego z wagonem) w spoczynku, a względem ziemi jest w ruchu.

Wyłania się pytanie czy w zadaniach konkretnych nie można badać ruchu ciała niezależnie od innych ciał. Ruch taki byłby t. zw. ruchem bezwzględnym (absolutnym). Okazuje się jednak (z uwagi na to, że punkty przestrzeni są nierozróżnialne), że przy pomocy pomiarów odległości i twierdzeń geometrycznych niepodobna stwierdzić w żaden sposób, czy ciało badane w dwu chwilach zmieniło swoje położenie czy nie. Pojęcie ruchu absolutnego jest więc bezużyteczne. Musimy się zatem ograniczyć do badania ruchu względnego, t. j. ruchu ciała względem innych ciał.

§ 3. Ruch punktu. Zajmiemy się na początku ruchem jednego punktu. Opis ruchu ciała sprowadza się bowiem do opisu ruchu jego punktów. Nadto w wielu przypadkach opis ruchu ciała sprowadza się praktycznie do podania ruchu jednego jego punktu, np. gdy wymiary ciała są drobne w stosunku do przebywanej drogi (ruch ziemi wkoło słońca, ruch kuli karabinowej) lub jeżeli ruch jednego punktu wyznacza ruch całego ciała (np. ruch wagonu).

Oznaczmy współrzędne poruszającego się punktu M względem pewnego układu odniesienia przez x, y, z. Współrzędne x, y, z zależą od czasu, są więc funkcjami zmiennej t:

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Funkcje te dają nam opis ruchu punktu M względem przyjętego układu odniesienia. Znając je, możemy podać współrzędne x, y, z punktu M w każdej chwili t.

O funkcjach f, φ i ψ zakładamy, że są ciągłe wraz z pierwszą i drugą pochodną w pewnym przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$, w którym ruch badamy.

Ruch punktu można określić przy pomocy jednej funkcji wektorowej. Połóżmy $\bar{r} = \overline{OM}$ (O początek układu). Zatem

$$\bar{r} = \bar{F}(t).$$

Powyższa funkcja wektorowa opisuje ruch w zupełności, podając dla każdej chwili czasu wektor $\bar{r}$, a więc położenie punktu M.

Zauważmy, że funkcje f, φ i ψ podają składowe wektora $\bar{r}$.

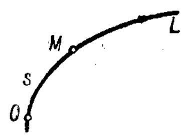
Linię, jaką zakreśla punkt podczas ruchu nazywamy *torem* lub *trajektorią*.

Przypuśćmy, że torem punktu jest łuk L. Nadajmy łukowi temu pewien zwrot i obierzmy na nim dowolny punkt O, który nazwiemy *początkiem* (rys. 1). Położenie punktu M na łuku L będzie wyznaczone przez podanie liczby s, której bezwzględna wartość równa się długości łuku OM, przy czym liczba s jest dodatnia lub ujemna zależnie od tego, czy zwrot łuku OM jest zgodny ze zwrotem obranym na L czy nie. Liczbę s nazywamy *współrzędną łukową* punktu M na łuku L.

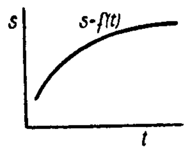
Ruch punktu M po łuku L będzie wyznaczony również funkcją

$$s=f(t),$$

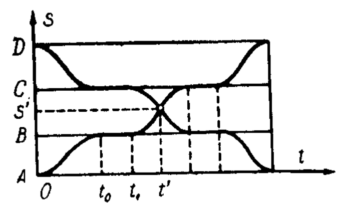
podającą w każdej chwili t współrzędną łukową s punktu M.



1.



2.



3.

§ 4. Wykres ruchu. Niechaj ruch punktu po krzywej L określony będzie funkcją $s=f(t)$. Obierzmy dwie osie prostopadłe s i t.

Wykres funkcji $s=f(t)$ nazywamy *wykresem* lub *diagramem* ruchu (rys. 2).

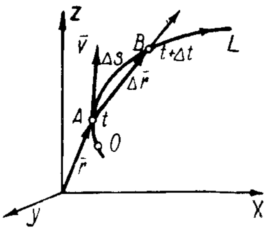
Na rys. 3 mamy wykres ruchu dwóch pociągów, z których jeden biegnie od stacji A do stacji D (przez stacje B, C), drugi zaś od stacji D do A. Z wykresu odczytujemy np., że w chwili 0 pociąg wyjechał ze stacji A i przybył do B w chwili t_0. Stację B opuścił w chwili t_1 i t. d. Współrzędne (t', s') punktu przecięcia obu wykresów przedstawiają chwilę i miejsce spotkania obu pociągów.

§ 5. Prędkość. Załóżmy, że punkt poruszający się po krzywej L znajdował się w chwili t w punkcie A, a w chwili $t+\Delta t$ w punkcie B.

Wektor $\overline{AB}$ nazywamy *przesunięciem* poruszającego się punktu w czasie Δt. Iloraz

$$\overline{AB}/\Delta t=\overline{AC} \tag{1}$$

przedstawia przesunięcie przypadające na jednostkę czasu. Iloraz powyższy nazywamy także *wektorem prędkości średniej* lub krótko *prędkością średnią* w czasie Δt.



Załóżmy, że istnieje granica ilorazu (1) gdy przyrost czasu Δt dąży do 0. Oznaczmy tę granicę przez $\bar{v}$. Zatem

(I) $$\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{AB}{\Delta t}.$$

Wektor $\bar{v}$ nazywamy *wektorem prędkości* lub krótko *prędkością* w chwili t.

Jeżeli $\Delta t\to 0$, sieczna AB dąży do stycznej. A więc: *wektor prędkości jest styczny do toru.*

Niechaj ruch określony będzie funkcjami $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$. Oznaczmy współrzędne punktu A przez x, y, z, a punktu B przez $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$. Wektor $\overline{AB}$ ma zatem rzuty $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Rzutami ilorazu $\frac{\overline{AB}}{\Delta t}$ będą więc ilorazy $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$.

Wynika stąd, że rzuty prędkości $\bar{v}$ wyrażają się wzorami:

$$v_x=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t),\qquad v_y=\frac{dy}{dt}=\varphi'(t),\qquad v_z=\frac{dx}{dt}=\psi'(t).$$

W mechanice pochodną względem czasu przyjęte jest oznaczać kropką u góry. Zatem

(II) $$v_x=\dot{x},\qquad v_y=\dot{y},\qquad v_z=\dot{z}.$$

A więc: *rzuty wektora prędkości na osie układu równają się pochodnym (względem czasu) współrzędnych poruszającego się punktu.*

Niech teraz ruch określony będzie funkcją wektorową $\bar{r}=\bar{F}(t)$. Przyjmując $\overline{AB}=\Delta\bar{r}$, otrzymamy

$$\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{AB}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\dot{\bar{r}}.$$

A więc

(III) $$\bar{v}=\dot{\bar{r}}.$$

Prędkość jako pochodna drogi. Niech wreszcie ruch punktu po torze L określony będzie funkcją $s=f(t)$, gdzie s oznacza współrzędną łukową. Ponieważ prędkość jest styczna do toru, więc dla wyznaczenia prędkości w punkcie A wystarczy podać wielkość i zwrot prędkości. Z określenia prędkości wynika, że

$$|\bar{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\overline{AB}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\overline{AB}}{\Delta s}\right| \cdot \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|,$$

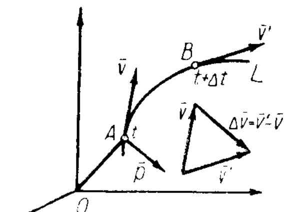
gdzie $|\Delta s|$ oznacza długość łuku AB. Ponieważ $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\overline{AB}}{\Delta s}\right| = 1$, więc

$$|\bar{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = |\dot{s}|.$$

Wykreślmy w punkcie A styczną i nadajmy jej zwrot zgodny ze zwrotem obranym na krzywej L. Jeżeli $\dot{s} > 0$, wówczas dla małych $\Delta t > 0$ jest $\Delta s > 0$; zatem punkt porusza się po torze w kierunku dodatnim, więc $\bar{v}$ ma zwrot zgodny ze zwrotem stycznej. Podobnie, jeżeli $\dot{s} < 0$, to $\bar{v}$ ma zwrot przeciwny do zwrotu stycznej. Jeżeli więc przez v oznaczymy współrzędną wektora prędkości względem stycznej, której nadaliśmy zwrot zgodny ze zwrotem toru, to

(IV)
$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

§ 6. Przyśpieszenie. Załóżmy, że w chwili t punkt był w A i miał prędkość $\bar{v}$, zaś w chwili $t+\Delta t$ był w B i miał prędkość $\bar{v}'$. Połóżmy $\Delta \bar{v} = \bar{v}' - \bar{v}$.



Granicę $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{p}$ nazywamy *wektorem przyśpieszenia* lub krótko *przyśpieszeniem* w chwili t.

Niech ruch określony będzie funkcjami $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$. Mamy $p_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$. Ponieważ $v_x = f'(t)$ i $v'_x = f'(t+\Delta t)$, więc $\Delta v_x = v'_x - v_x = f'(t+\Delta t) - f'(t)$. Zatem $p_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{f'(t+\Delta t) - f'(t)}{\Delta t} = f''(t)$; podobnie $p_y = \varphi''(t)$ i $p_z = \psi''(t)$.

Pochodne $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ oznaczamy przez $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$. Stąd:

(I)
$$p_x = \ddot{x}, \qquad p_y = \ddot{y}, \qquad p_z = \ddot{z}.$$

Zatem: *rzuty przyśpieszenia na osie układu równają się drugim pochodnym współrzędnych poruszającego się punktu.*

Jeżeli ruch określony jest funkcją wektorową

$$\bar{r}=\bar{F}(t),$$

to — jak wynika z definicji drugiej pochodnej — mamy:

(II) $$\bar{p}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\ddot{\bar{r}}.$$

Przykład 1. Punkt porusza się w płaszczyźnie w ten sposób, że jego współrzędne w chwili t wyrażają się wzorami:

(1) $$x=a\cos kt, \qquad y=b\sin kt \qquad (a>0,\ b>0,\ k>0).$$

Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie, oraz tor.

Mamy tutaj

$$\dot{x}=-ak\sin kt, \qquad \dot{y}=bk\cos kt,$$
$$\ddot{x}=-ak^2\cos kt, \qquad \ddot{y}=-bk^2\sin kt,$$

a więc wartość bezwzględna prędkości będzie $|\bar{v}|=k\sqrt{a^2\sin^2 kt+b^2\cos^2 kt}$, zaś wartość bezwzględna przyśpieszenia $|\bar{p}|=k^2\sqrt{a^2\cos^2 kt+b^2\sin^2 kt}$.

Aby otrzymać tor punktu, należy znaleźć związek między współrzędnymi x, y, t. zn. wyrugować czas t. Dzieląc równania (1) odpowiednio przez a i b, podnosząc do kwadratu i dodając, otrzymujemy

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1.$$

A więc tor jest elipsą o osiach $2a, 2b$. Wektor prędkości jest oczywiście styczny do elipsy. Współrzędne wektora przyśpieszenia można, z uwagi na równania (1), napisać w postaci:

$$\ddot{x}=-k^2x, \qquad \ddot{y}=-k^2y, \qquad \text{skąd} \qquad |\bar{p}|=k^2\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \ddot{y}/\ddot{x}=y/x.$$

Wektor przyśpieszenia jest zatem proporcjonalny do odległości od początku układu i zawsze skierowany ku początkowi układu.

Przykład 2. Wyznaczyć prędkość, przyśpieszenie i tor punktu, którego ruch określony jest równaniami

(2) $$x=\frac{a}{2}(1+\cos t), \qquad y=\frac{a}{2}\sin t, \qquad z=a\sin\frac{t}{2} \qquad (a>0).$$

Różniczkując, otrzymujemy

$$\dot{x}=-\frac{a}{2}\sin t, \qquad \dot{y}=\frac{a}{2}\cos t, \qquad \dot{z}=\frac{a}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$\ddot{x}=-\frac{a}{2}\cos t, \qquad \ddot{y}=-\frac{a}{2}\sin t, \qquad \ddot{z}=-\frac{a}{4}\sin\frac{t}{2},$$

skąd $|\bar{v}|=\frac{a}{2}\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}$ i $|\bar{p}|=\frac{a}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{t}{2}}$.

Aby wyznaczyć tor punktu, należy z równań (2) wyrugować czas, co da nam dwa związki między x, y, z określające krzywą przestrzenną, po której się punkt porusza. Rugowanie to w ogólności przedstawia duże trudności rachunkowe, w tym przykładzie jednak łatwo daje się przeprowadzić. Podnosząc równania (2) do kwadratu i dodając, otrzymujemy

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Podobnie, z pierwszych dwu równań (2) wynika, że

$$(x-a/2)^2+y^2=(a/2)^2.$$

Z równań otrzymanych widzimy, że tor punktu jest krzywą przekroju kuli i walca kołowego.

Przykład 3. Ruch jednostajny prostolinijny. Punkt porusza się w ten sposób, że przyśpieszenie jest stale zerem. Zakładamy więc, że $\bar{p}=0$. Zatem

$$\ddot{x}=0, \qquad \ddot{y}=0, \qquad \ddot{z}=0.$$

Wynika stąd po scałkowaniu, że

$$\dot{x}=c_1, \qquad \dot{y}=c_2, \qquad \dot{z}=c_3, \tag{3}$$

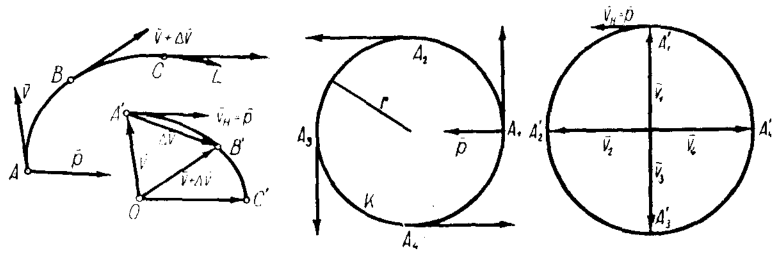
gdzie c_1, c_2, c_3 oznaczają pewne stałe. Całkując jeszcze raz, otrzymamy

$$x=c_1t+d_1, \qquad y=c_2t+d_2, \qquad z=c_3t+d_3. \tag{4}$$

Tutaj d_1, d_2, d_3 oznaczają również pewne stałe. Równania (4) przedstawiają parametrycznie równanie linii prostej. Z równań (3) wynika, że wektor prędkości jest stały. Ruch więc odbywa się po linii prostej z prędkością stałą. Ruch taki nazywamy ruchem *jednostajnym prostolinijnym.*

Zauważmy, że założenie $\bar{p}=0$ równoważne jest z założeniem, że wektor prędkości jest stały. Mamy bowiem $\bar{p}=\dot{\bar{v}}$. Jeżeli więc $\bar{v}=\text{const.}$, to $\bar{p}=0$ i na odwrót, jeżeli $\bar{p}=0$, to $\dot{\bar{v}}=0$, zatem $\bar{v}=\text{const.}$

Hodograf. Niechaj punkt porusza się po krzywej L (rys. 1). Obierzmy dowolny punkt O. Dla każdej chwili t wykreślmy z punktu O wektor prędkości, jaką punkt ruchomy ma w danej chwili (rys. 2). Końce tych prędkości utworzą krzywą H zwaną *hodografem*.



1. 2. 3. 4.

Na hodografie oznaczyliśmy przez A', B', C' końce prędkości, jakie punkt poruszający się po krzywej L ma w A, B, C. Jeżeli więc punkt porusza się po torze L, to koniec odpowiedniej prędkości porusza się po hodografie.

Oznaczmy przez $\bar{v}_H$ prędkość punktu na hodografie w A'. Z określenia prędkości mamy $\bar{v}_H = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{A'B'}}{\Delta t}$. Lecz $\overline{A'B'} = \Delta \bar{v}$, więc

$$\bar{v}_H = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{p}.$$

Zatem: *przyśpieszenie poruszającego się punktu równa się prędkości odpowiedniego punktu na hodografie.*

Przykład 4. Jeżeli punkt porusza się po linii prostej, to kierunek prędkości jest stały. Zatem hodograf jest też linią prostą.

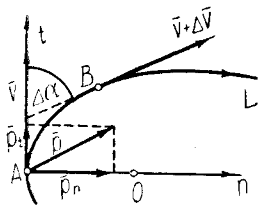
Przykład 5. Załóżmy, że punkt porusza się po kole K z prędkością stałą co do wartości bezwzględnej (rys. 3).

Hodograf będzie kołem (rys. 4). Punkt po hodografie będzie poruszał się również z prędkością stałą co do wartości bezwzględnej.

Ponieważ prędkość punktu A'_1, na hodografie jest styczna do hodografu, zatem jest prostopadła do $\bar{v}_1$. Wynika stąd, że przyśpieszenie punktu poruszającego się po kole K jest skierowane ku środkowi koła i jest stałe co do wartości bezwzględnej.

§ 7. Rozkład przyśpieszenia na styczne i normalne.

Ruch po torze płaskim. Niech ruch punktu A po torze L określony będzie funkcją $s=f(t)$, gdzie s oznacza współrzędną łukową. Wykreślmy w punkcie A styczną t i normalną n. Nadajmy stycznej zwrot zgodny ze zwrotem krzywej L, zaś normalnej zwrot ku środkowi krzywizny.



Rzut przyśpieszenia $\overline{p}$ na styczną nazywamy *przyśpieszeniem stycznym* $\overline{p}_t$. Rzut przyśpieszenia na normalną nazywamy *przyśpieszeniem normalnym* $\overline{p}_n$. Jest oczywiście

$$\overline{p}=\overline{p}_t+\overline{p}_n. \tag{I}$$

Mając więc dane przyśpieszenie styczne i normalne, możemy wyznaczyć przyśpieszenie $\overline{p}$. Przyśpieszenie styczne będzie określone przez podanie współrzędnej p_t względem stycznej. Podobnie, współrzędna p_n względem normalnej określa przyśpieszenie normalne.

Oznaczmy przez $\Delta\alpha$ kąt ostry zawarty między stycznymi w punkcie A o współrzędnej łukowej s w bliskim od A punkcie B o współrzędnej łukowej $s+\Delta s$. Załóżmy, że $\Delta s>0$. Mamy wówczas

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{1}{\varrho},$$

gdzie ϱ oznacza promień krzywizny. Jak wiemy, $\overline{p}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}$; zatem

$$p_t=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{Rzut}_t\,\Delta\overline{v}}{\Delta t},$$

gdzie $\mathrm{Rzut}_t\,\Delta\overline{v}$ oznacza współrzędną $\Delta\overline{v}$ względem stycznej t. Lecz $\mathrm{Rzut}_t\,\Delta\overline{v}=\mathrm{Rzut}_t(\overline{v}+\Delta\overline{v})-\mathrm{Rzut}_t\,\overline{v}$. A więc $\mathrm{Rzut}_t\,\Delta\overline{v}=(v+\Delta v)\cos\Delta\alpha-v$. Stąd

$$p_t=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(v+\Delta v)\cos\Delta\alpha-v}{\Delta t}=v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\cos\Delta\alpha. \tag{1}$$

Lecz

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Ze znanej reguły na obliczanie symbolów nieoznaczonych otrzymujemy

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{-\sin\Delta\alpha}{1}=0.$$

Zatem na mocy (2) $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta t}=0\cdot\frac{1}{\varrho}v=0$, skąd na mocy (1):

$$p_t=dv/dt=\ddot{s}.$$

Przejdźmy teraz do obliczenia p_n. Mamy

$$p_n=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\text{Rzut}_n\,\Delta\bar{v}}{\Delta t}.$$

Lecz $\text{Rzut}_n\,\Delta\bar{v}=\text{Rzut}_n(\bar{v}+\Delta\bar{v})-\text{Rzut}_n\,\bar{v}=(v+\Delta v)\sin\Delta\alpha$. Więc $p_n=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(v+\Delta v)\frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta t}$. Ponieważ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}=1\cdot\frac{1}{\varrho}\cdot v$, więc

$$p_n=v^2/\varrho.$$

Zatem przyśpieszenia: styczne p_t i normalne p_n wyrażają się wzorami

$$\text{(II)}\qquad p_t=dv/dt=\ddot{s},\qquad p_n=v^2/\varrho,$$

gdzie ϱ jest promieniem krzywizny.

Ponieważ przyśpieszenie styczne jest prostopadłe do przyśpieszenia normalnego, więc

$$\text{(III)}\qquad |\bar{p}|=\sqrt{p_t^2+p_n^2}.$$

Ze wzoru (1) wynika, że $p_n\geqslant 0$. Zatem przyśpieszenie normalne ma zawsze zwrot ku środkowi krzywizny.

Zauważmy, że przyśpieszenie styczne zależy tylko od zmiany wartości bezwzględnej prędkości, a nie zależy od zmiany jej kierunku. Przyśpieszenie styczne jest wtedy i tylko wtedy stale zerem, gdy $v=\text{const}$.

Przyśpieszenie normalne zależy od promienia krzywizny ϱ, zatem od zmiany kierunku prędkości. Przyśpieszenie normalne jest stale zerem, jeżeli stale $v=0$ lub $1/\varrho=0$. W pierwszym przypadku punkt jest w spoczynku, w drugim ruch odbywa się po linii prostej.

Przykład. Punkt porusza się po kole o promieniu r z prędkością $\bar{v}$ stałą co do wartości bezwzględnej. Zatem na mocy (I)

$$p_t=dv/dt=0,\qquad p_n=v^2/r=\text{const}.$$

A więc przyśpieszenie jest wówczas stale skierowane ku środkowi i stałe co do wartości bezwzględnej (por. str. 39, przykład 5).

Ruch po torze przestrzennym. Niech punkt porusza się po torze przestrzennym L. Oznaczmy przez $\bar{v}$ prędkość punktu w A, przez $\bar{v}+\Delta\bar{v}$ prędkość jego w B.

Przeprowadźmy przez styczną w punkcie A płaszczyznę Π równoległą do stycznej w punkcie B. Na tej płaszczyźnie leżą wektory $\bar{v}$ i $\bar{v}+\Delta\bar{v}$ wykreślone z punktu A. Zatem w płaszczyźnie Π leży wektor $\Delta\bar{v}/\Delta t$. Gdy punkt B dąży do punktu A, płaszczyzna Π zmierza do t. zw. *płaszczyzny ściśle stycznej* w punkcie A. Wynika stąd, że przyśpieszenie $\bar{p}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ leży w płaszczyźnie ściśle stycznej.

A więc: *wektor przyśpieszenia leży w płaszczyźnie ściśle stycznej.*

Na płaszczyźnie ściśle stycznej leży styczna. Prostą prostopadłą do stycznej i leżącą w płaszczyźnie ściśle stycznej nazywamy *normalną główną*. Na normalnej głównej leży środek krzywizny. Tworząc rzuty przyśpieszenia na styczną i normalną, otrzymamy analogicznie do wzoru (I), otrzymanego przy ruchu płaskim:

$$\bar{p}=\bar{p}_t+\bar{p}_n.$$

Nadając stycznej zwrot zgodny ze zwrotem krzywej, zaś normalnej zwrot ku środkowi krzywizny, otrzymamy postępując jak poprzednio

$$p_t=dv/dt=\ddot{s} \qquad \text{i} \qquad p_n=v^2/\varrho,$$

gdzie ϱ oznacza promień krzywizny.

Wzory powyższe są identyczne ze wzorami (II) w przypadku toru płaskiego.

Przykład 1. Ruch jednostajny. Niech punkt A porusza się po krzywej L, na której obrany jest zwrot i początek O. Załóżmy że prędkość punktu A jest stała co do wielkości (t. j. co do wartości bezwzględnej). Ruch taki nazywamy *ruchem jednostajnym* po krzywej L.

Zakładamy tedy, że $v=\dot{s}=\text{const}$. Całkując, otrzymamy

$$s=vt+s_0. \tag{3}$$

Podstawiając $t=0$, dostajemy $s=s_0$. A więc stała s_0 oznacza współrzędną łukową punktu A w chwili $t=0$.

Ruch jednostajny jest określony funkcją pierwszego stopnia względem t. Na odwrót, dowolna funkcja pierwszego stopnia $s = at + b$ określa ruch jednostajny z prędkością $v = \dot{s} = a$. Ponadto $s_0 = b$.

Na mocy (3) mamy

$$p_t = \dot{v} = \ddot{s} = 0, \qquad p_n = v^2/\varrho.$$

Ponieważ przyśpieszenie styczne jest zerem, więc przyśpieszenie ma stale kierunek ku środkowi krzywizny. Wielkość przyśpieszenia wynosi p_n. Zatem przyśpieszenie jest co do wielkości odwrotnie proporcjonalne do promienia krzywizny ϱ (czyli wprost proporcjonalne do krzywizny $K = 1/\varrho$).

Jeżeli w szczególności punkt porusza się ruchem jednostajnym po kole o promieniu r, wówczas $\varrho = r$, a więc

$$p_n = v^2/r.$$

Zatem: *jeżeli punkt porusza się po kole ruchem jednostajnym, to przyśpieszenie jest stałe co do wielkości i skierowane ku środkowi koła.*

Przykład 2. Ruch jednostajnie przyśpieszony. Punkt poruszający się po krzywej L ma stałe przyśpieszenie styczne. Ruch taki nazywamy *ruchem jednostajnie przyśpieszonym* po krzywej L.

Zakładając, że $p_t = p = \text{const.}$, dostajemy $\ddot{s} = p_t = p$, więc

$$\dot{s} = v = pt + c_1, \qquad s = \tfrac{1}{2}pt^2 + c_1 t + c_2. \tag{4}$$

Ruch jednostajnie przyśpieszony jest określony funkcją $s = f(t)$ drugiego stopnia względem t. Na odwrót, dowolna funkcja drugiego stopnia $s = at^2 + bt + c$ określa ruch jednostajnie przyśpieszony. Mamy bowiem, różniczkując:

$$p_t = \ddot{s} = 2a = \text{const.}$$

Przyjmijmy, że w ruchu jednostajnie przyśpieszonym określonym funkcją (4) punkt w chwili $t = 0$ miał prędkość $v = v_0$ i współrzędną łukową $s = s_0$.

Kładąc $t = 0$, otrzymujemy z (4) $v_0 = c_1$, $s_0 = c_2$. Wstawiając w równania (4), otrzymamy

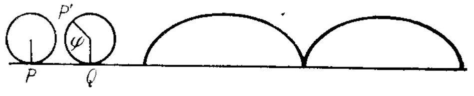
$$v = pt + v_0, \qquad s = \tfrac{1}{2}pt^2 + v_0 t + s_0.$$

W szczególności, jeżeli $v_0 = 0$ i $s_0 = 0$, dostaniemy

$$v = pt \quad \text{i} \quad s = \tfrac{1}{2}pt^2.$$

Przykład 3. Ruch po cykloidzie. Niech koło o promieniu r toczy się po prostej. Zbadać ruch dowolnego punktu na obwodzie koła.

Załóżmy, że dany punkt P obwodu koła jest początkowo punktem styczności koła i prostej. Obierzmy ten punkt za początek układu, zaś prostą za oś x-ów. Jeżeli koło obróci się o kąt φ, punkt zajmie nowe położenie $P'(x,y)$. Aby wyrazić współrzędne x, y jako funkcje kąta φ, zauważmy, że nowe położenie punktu



możemy otrzymać, najpierw obracając koło dokoła środka o kąt φ w kierunku wskazówki zegara, a następnie przesuwając je wzdłuż osi x-ów o odcinek PQ równy łukowi $P'Q$ należącemu do kąta φ, którego długość wynosi $r\varphi$. Zatem $x = -r\sin\varphi + r\varphi$, $y = r - r\cos\varphi$, czyli:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi).$$

Po wykonaniu przez koło pełnego obrotu, t.j. dla $\varphi = 2\pi$, punkt P znowu jest punktem styczności, poczem ruch powtarza się. Wykonując wykres, otrzymujemy krzywą złożoną z przystających łuków, zwaną *cykloidą*.

Załóżmy, że koło obraca się jednostajnie, t. j. że kąt φ jest proporcjonalny do czasu: $\varphi = \omega t$ (gdzie ω stałe). Równania ruchu punktu P są wówczas

$$x = r(\omega t - \sin\omega t), \qquad y = r(1 - \cos\omega t).$$

Różniczkując je dwukrotnie względem czasu, otrzymujemy składowe prędkości i przyśpieszenia

$$\dot{x} = r\omega(1 - \cos\omega t), \qquad \dot{y} = r\omega\sin\omega t$$
$$\ddot{x} = r\omega^2\sin\omega t, \qquad \ddot{y} = r\omega^2\cos\omega t.$$

Stąd

$$|\bar{v}| = \sqrt{r^2\omega^2(2 - 2\cos\omega t)} = 2r\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|, \qquad |\bar{p}| = r\omega^2. \tag{5}$$

Ze względu na to, że po wykonaniu pełnego obrotu ruch powtarza się, możemy się ograniczyć do przedziału czasu $0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\omega$. Ze wzorów powyższych widzimy, że wielkość przyspieszenia punktu P jest stała, natomiast wielkość prędkości zmienia się. Mianowicie w chwili $t = 0$ oraz $t = 2\pi/\omega$, t. j. gdy punkt znajduje się na prostej, prędkość równa się zeru, zaś w chwili $t = \pi/\omega$ t. j. gdy punkt osiąga położenie najwyższe, prędkość jest największa i wynosi $2r\omega$.

Nadajmy cykloidzie zwrot zgodny z ruchem punktu. W czasie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\omega$ mamy $v = |\bar{v}|$, zatem na mocy (5)

$$v = 2r\omega \sin\frac{\omega t}{2}.$$

Przyśpieszenie styczne będzie więc

$$p_t = \dot{v} = r\omega^2 \cos\frac{\omega t}{2}.$$

Aby wyznaczyć przyśpieszenie normalne, obliczamy krzywiznę według znanego wzoru

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{r^2\omega^3(1-\cos\omega t)}{8r^3\omega^3\sin^3\omega t/2} = \frac{1}{4r\sin\omega t/2}.$$

Zatem

$$p_n = v^2/\varrho = r\omega^2 \sin\frac{\omega t}{2}.$$

Droga przebyta przez punkt do chwili t równa się, z uwagi na to, że $ds = v\,dt$,

$$s = \int_0^t ds = \int_0^t v\,dt = \int_0^t 2r\omega \sin\frac{\omega t}{2}\,dt = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega t}{2}\right).$$

W szczególności dla $t = 2\pi/\omega$ otrzymujemy długość toru cykloidy przy pełnym obrocie koła. Długość ta wynosi $8r$.

§ 8. Prędkość i przyśpieszenie kątowe. Niech punkt A porusza się po kole o promieniu r i środku M. Obierzmy zwrot na kole i punkt początkowy O (rys. 1). Oznaczmy przez φ kąt między promieniami MA i MO liczony zgodnie z obranym zwrotem. Mamy $s = r\varphi$, zatem

(1) $$\dot{s} = r\dot{\varphi} \quad \text{i} \quad \ddot{s} = r\ddot{\varphi}.$$

Pochodną $\dot{\varphi}$ nazywamy *prędkością kątową* i oznaczamy zazwyczaj przez ω.

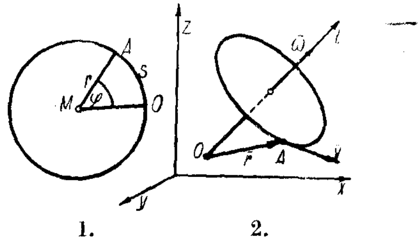
Pochodną $\ddot{\varphi}$ nazywamy *przyśpieszeniem kątowym* i oznaczamy przez ε.

Mamy oczywiście $\dot{\varphi} = \omega$ i $\dot{\omega} = \varepsilon$. Na mocy (1) jest więc

(I) $$v = r\omega \quad \text{i} \quad p_t = r\varepsilon,$$

a ponieważ $p_n = v^2/r$, więc

(II) $$p_n = r\omega^2.$$



1. 2.

Wektor prędkości kątowej. Niech punkt obraca się około pewnej osi l, t. zn. porusza się po kole leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do l, którego środkiem jest punkt przebicia tej płaszczyzny osią l (str. 45, rys. 2).

Niechaj punkt w pewnej chwili t ma prędkość kątową ω. Oznaczmy przez $\bar{\omega}$ wektor położony na osi l o długości $|\omega|$. Zwrot wektora $\bar{\omega}$ obierzmy tak, aby człowiek, mający głowę w końcu, a stopy w początku wektora, widział ruch od ręki prawej ku lewej.

Wektor $\bar{\omega}$ nazywamy *wektorem prędkości kątowej.*

Łatwo sprawdzić, że prędkość $\bar{v}$ punktu A równa się momentowi $\bar{\omega}$ względem A:

(2) $$\bar{v} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}.$$

Jeżeli przez $\bar{r}$ oznaczymy wektor $\overline{OA}$, gdzie O jest dowolnym punktem na prostej l, to $\bar{v} = \bar{\omega} \times \overline{AO}$, więc

(III) $$\bar{v} = \bar{r} \times \bar{\omega}.$$

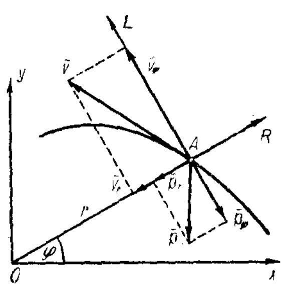
Oznaczając przez $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ rzuty wektora $\bar{\omega}$ na osie układu, przez x, y, z współrzędne punktu A i przez x_0, y_0, z_0 współrzędne punktu O, otrzymujemy

(IV) $$v_x = \omega_z(y - y_0) - \omega_y(z - z_0), \qquad v_y = \omega_x(z - z_0) - \omega_z(x - x_0),$$
$$v_z = \omega_y(x - x_0) - \omega_x(y - y_0).$$

Jeżeli w szczególności l przechodzi przez początek układu, to przyjmując $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, otrzymamy

(V) $$v_x = \omega_z y - \omega_y z, \qquad v_y = \omega_x z - \omega_z x, \qquad v_z = \omega_y x - \omega_x y.$$

§ 9. Ruch płaski w układzie biegunowym. Jeżeli punkt porusza się w płaszczyźnie xy, to położenie punktu wyznaczone jest w zupełności przez długość odcinka $OA = r$, zwanego *promieniem wodzącym*, oraz kąt φ, jaki odcinek OA tworzy z osią x-ów. Ruch punktu określony więc będzie dwiema funkcjami



$$r = F(t), \qquad \varphi = f(t).$$

Ponieważ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, więc tworząc pochodne względem czasu t, dostaniemy:

(1) $\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi,$

(2) $$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi,\\ \ddot{y} &= \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi.\end{aligned}$$

Z równań (1) i (2) możemy wyznaczyć $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$, znając $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ i na odwrót. Z równania (1) otrzymamy

(3) $$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2,$$

(4) $$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2+y^2},$$

Często wygodnem jest rozkładać prędkość i przyśpieszenie nie w kierunkach osi współrzędnych, lecz w kierunku promienia wodzącego i kierunku do niego prostopadłym, przyczem zwrot dodatni w tych kierunkach obieramy jak na rysunku. Składowe te nazywamy odpowiednio składową *radialną* i *transwersalną*.

Jeżeli a_x, a_y są współrzędnymi dowolnego wektora $\bar{a}$ wychodzącego z punktu $A(r, \varphi)$, to rzutując ten wektor na oś AR oraz AL, otrzymujemy jako składową radialną a_r i transwersalną a_φ:

$$a_r = a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi, \qquad a_\varphi = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi.$$

Stosując te wzory do wektorów prędkości i przyśpieszenia, otrzymujemy na mocy równań (1) i (2):

(I) $$v_r = \dot{r}, \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi},$$

(II) $$p_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \qquad p_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}).$$

Przykład. Punkt porusza się po linii spiralnej $r = a + b\varphi$ w ten sposób, że kąt φ jest proporcjonalny do czasu t. Jest więc $\varphi = \omega t$, gdzie ω jest współczynnikiem proporcjonalności. Wówczas $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{r} = b\dot{\varphi} = b\omega$ i $\ddot{r} = 0$, skąd

$$v_r = b\omega, \qquad p_r = -(a + b\omega t)\omega^2, \qquad v_\varphi = (a + b\omega t)\omega, \qquad p_\varphi = 2b\omega^2.$$

§ 10. Prędkość polowa. Niechaj ruch odbywa się w płaszczyźnie xy. Oznaczmy przez ΔS pole zakreślone przez promień wodzący r w czasie od t do $t + \Delta t$. Ze wzoru na obliczenie pola w układzie biegunowym współrzędnych otrzymamy

$$\Delta S = \frac{1}{2}\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi} r^2\,d\varphi,$$

skąd, na podstawie twierdzenia o wartości średniej,

(1) $$\Delta S = \tfrac{1}{2} r_s^2 \Delta\varphi,$$

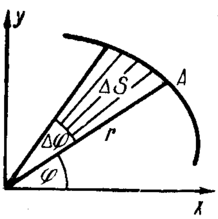
gdzie r_s oznacza wartość pośrednią między maximum a minimum promienia r w czasie od t do $t+\Delta t$.

Granicę $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$ nazywamy *prędkością polową* i oznaczamy ją przez A. Zatem na mocy (1) jest

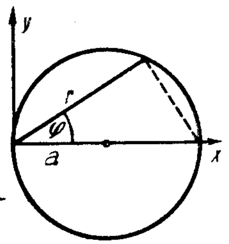
$$A=\tfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}. \tag{I}$$

Ze wzorów (4) str. 47 otrzymujemy $\dot{\varphi}=\frac{1}{r^2}(x\dot{y}-y\dot{x})$. Zatem na mocy (I)

$$A=\tfrac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x}). \tag{II}$$



1.



2.

Przykład. Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie punktu poruszającego się po kole $x^2-2ax+y^2=0$ ze stałą prędkością polową h.

Równanie danego koła we współrzędnych biegunowych jest $r=2a\cos\varphi$. Warunek stałości prędkości polowej wyraża się równaniem

$$\tfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}=h, \quad \text{czyli} \quad \dot{\varphi}=2h/r^2. \tag{2}$$

Różniczkując równanie koła, otrzymujemy

$$\dot{r}=-2a\dot{\varphi}\sin\varphi=-\frac{4ah}{r^2}\sin\varphi.$$

Zatem

$$v_r=-\frac{4ah}{r^2}\sin\varphi, \qquad v_\varphi=\frac{2h}{r}.$$

Z uwagi na to, że prędkość polowa jest stała, wzór (II), str. 47, $p_\varphi=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$, pociąga $p_\varphi=0$. Zatem przyśpieszenie ma zawsze kierunek promienia wodzącego.

Różniczkując pierwsze z równań (2), otrzymujemy $2r\dot{r}\dot{\varphi}+r^2\ddot{\varphi}=0$, więc $\ddot{\varphi}=-\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r}=\frac{16ah^2}{r^5}\sin\varphi$; różniczkując zaś $\dot{r}$, dostajemy

$$\ddot{r}=-2a\ddot{\varphi}\sin\varphi-2a\dot{\varphi}^2\cos\varphi=-2a\sin\varphi\,\frac{16ah^2}{r^5}\sin\varphi-2a\cos\varphi\,\frac{4h^2}{r^4}=$$

$$=-\frac{32a^2h^2}{r^5}\sin^2\varphi-4a^2\cos^2\varphi\,\frac{4h^2}{r^5}=-\frac{16a^2h^2}{r^5}(1+\sin^2\varphi).$$

Ponieważ $r\dot{\varphi}^2 = r\frac{4h^2}{r^4} = r^2\frac{4h^2}{r^5} = 4a^2\cos^2\varphi\frac{4h^2}{r^5} = \frac{16a^2h^2}{r^5}\cos^2\varphi$, więc ze wzoru $p_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ otrzymujemy

$$p_r = -32a^2h^2/r^5.$$

§ 11. Wymiary wielkości kinematycznych. Miara prędkości, przyśpieszenia i t. p. zależy od jednostek długości i czasu. Zajmiemy się pytaniem, jak zmieniają się te miary, gdy jednostki długości i czasu będą ulegały zmianom.

Obierzmy dowolnie jednostkę długości L i jednostkę czasu T. Przypuśćmy, że punkt w ruchu jednostajnym przebył drogę długości sL w czasie tT (jeżeli np. L oznacza cm, zaś T sek, to $sL = s$ cm, $tT = t$ sek). Miara prędkości v przy jednostkach L i T wynosi

$$v = s/t.$$

Obierzmy teraz nowe jednostki długości i czasu L', T'. Załóżmy, że między nowymi jednostkami a poprzednimi zachodzą związki

(1) $$L = \lambda L', \qquad T = \tau T',$$

gdzie λ i τ wskazują, ile jednostek nowych mieszczą jednostki stare. Oznaczając przez s', t', v' miary długości, czasu i prędkości w nowych jednostkach, otrzymamy

$$v' = s'/t'.$$

Ponieważ $sL = s\lambda L'$, zaś $tT = t\tau T'$, więc $s' = s\lambda$, $t' = t\tau$, skąd $v' = \frac{s\lambda}{t\tau} = \frac{s}{t}\cdot\frac{\lambda}{\tau}$, a więc

$$v' = v\frac{\lambda}{\tau} \qquad (\text{lub} \quad v' = v\lambda\tau^{-1}).$$

Jednostkę prędkości (t. j. prędkość, której miara wynosi 1) przy jednostkach L i T oznaczamy przez

$$\frac{L}{T} \qquad \text{lub} \qquad LT^{-1}.$$

Prędkość, której miara wynosi v, oznaczamy przez

$$v\frac{L}{T} \qquad \text{lub} \qquad vLT^{-1}.$$

Np. $5\,\text{cm}\cdot\text{sek}^{-1}$ oznacza prędkość, której miara wynosi 5, jeżeli za jednostkę długości przyjmiemy cm a za jednostkę czasu sek.

Załóżmy teraz, że obraliśmy nowe jednostki długości i czasu, L' i T', związane z dawnymi przez równania (1). Podstawmy w wyrażeniu vLT^{-1} zamiast L i T odpowiednio $\lambda L'$ i $\tau T'$, a następnie przekształćmy otrzymane wyrażenie tak, jak gdyby litery L' i T' oznaczały liczby. Otrzymamy:

$$vLT^{-1}=v\lambda L'\tau^{-1}T'^{-1}=v\lambda\tau^{-1}L'T'^{-1}.$$

Podstawmy $v'=v\lambda\tau^{-1}$. Zatem

$$vLT^{-1}=v'L'T'^{-1}.$$

Zauważmy, że v' jest według definicji miarą prędkości przy jednostkach L' i T'; zatem wyrażenie $v'L'T'^{-1}$ przedstawia prędkość przy jednostkach długości i czasu L', T'.

Widzimy stąd, że symbol LT^{-1} pozwala wyznaczyć rachunkiem formalnym miarę prędkości przy zmianie jednostki.

Przykład. Wyznaczyć miarę prędkości 12 cm. sek^{-1} przy jednostkach m i min.

Mamy cm$=0{\cdot}01$ m, sek$=1/60$ min. Rachując formalnie, otrzymamy

$$12\,\text{cm. sek}^{-1}=12\cdot 0{\cdot}01\,\text{m}\cdot(1/60\,\text{min})^{-1}=12\cdot 0{\cdot}01\cdot 60\,\text{m. min}^{-1}=7{\cdot}2\,\text{m. min}^{-1}.$$

A więc 7,2 jest miarą danej prędkości przy jednostkach m i min.

Wyrażenie LT^{-1}, w którym L i T nie oznaczają szczególnych jednostek, lecz są symbolami dowolnych jednostek długości i czasu, nazywamy *wymiarem prędkości*.

Ogólne określenie wymiaru. Pojęcie wymiaru podane wyżej dla prędkości można uogólnić na inne wielkości, jak np. przyśpieszenie, prędkość i przyśpieszenie kątowe, etc.

Wymiarem jakiejkolwiek wielkości A nazywać będziemy wyrażenie

$$L^{\alpha}T^{\beta},$$

gdzie wykładniki α, β są liczbami spełniającymi warunek: jeżeli a jest miarą wielkości A przy jednostkach długości i czasu L, T, zaś a' jej miarą przy jednostkach L', T' związanych z L i T równaniami (1), to

$$a'=a\lambda^{\alpha}\tau^{\beta}. \tag{2}$$

Wymiar wielkości A oznaczamy przez $[A]$. Zatem

$$[A]=L^{\alpha}T^{\beta},$$

Jednostkę wielkości A przy jednostkach długości i czasu L, T oznaczamy przez $L^\alpha T^\beta$. Jeżeli więc a jest miarą wielkości A przy jednostce $L^\alpha T^\beta$, to wielkość tę oznaczamy przez

$$aL^\alpha T^\beta.$$

Załóżmy teraz, że wprowadziliśmy nowe jednostki długości i czasu L', T' związane z poprzednimi przez równania (1), str. 49. Rachując formalnie, otrzymujemy $aL^\alpha T^\beta = a(\lambda L')^\alpha (\tau T')^\beta = a\lambda^\alpha L'^\alpha \tau^\beta T'^\beta$, więc $aL^\alpha T^\beta = (a\lambda^\alpha \tau^\beta) L'^\alpha T'^\beta$. Stąd, oznaczając przez a' miarę danej wielkości przy jednostkach L', T', dostajemy na mocy (2)

$$aL^\alpha T^\beta = a' L'^\alpha T'^\beta. \tag{3}$$

A więc rachunek formalny pozwala wyznaczyć miarę przy zmianie jednostek.

Przykład. Wymiar przyśpieszenia jest LT^{-2} (co można stwierdzić podobnie jak przy prędkości). Przedstawić przyśpieszenie 5 cm. sek^{-2} przy jednostkach m i min.

Ponieważ cm$=0{,}01$ m, sek$=1/60$ min., więc $\lambda=0{,}01$, $\tau=1/60$, $\alpha=1$, $\beta=-2$, skąd na mocy (3) $5\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{sek}^{-2} = 5(0{,}01\,\mathrm{m})(1/60\,\mathrm{min})^{-2} = 5\cdot 0{,}01\cdot 60^2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{min}^{-2}$, czyli $5\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{sek}^{-2} = 180\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{min}^{-2}$.

A zatem 180 jest miarą danego przyśpieszenia w jednostkach m i min.

Wyznaczanie wymiaru. Do wyznaczania wymiarów pomocnym jest następujące

Twierdzenie. *Niech dane będą wielkości A, B, dla których*

$$[A] = L^\alpha T^\beta, \qquad [B] = L^\gamma T^\delta, \tag{4}$$

oraz trzecia wielkość C uzależniona od A i B w taki sposób, że oznaczając przez a, b, c miary wielkości A, B, C wyrażone w dowolnych jednostkach L i T, mamy zawsze

$$c = g a^p b^q, \tag{5}$$

gdzie liczby g, p, q nie zależą od jednostek L i *T.*

Przy tych założeniach jest

$$[C] = L^{p\alpha + q\gamma} T^{p\beta + q\delta}. \tag{I}$$

Wzór ten można napisać jeszcze inaczej. Wymiar $[C]$ możemy otrzymać, rachując formalnie jak następuje:

$$[C] = (L^\alpha T^\beta)^p (L^\gamma T^\delta)^q = L^{p\alpha} T^{p\beta} L^{q\gamma} T^{q\delta} = L^{p\alpha + q\gamma} T^{p\beta + q\delta};$$

wzorowi (I) możemy więc również nadać postać

$$[C] = [A]^p [B]^q.$$

Dowód. Obierzmy nowe jednostki L' i T' związane z poprzednimi przez równania (1), str. 49. Oznaczmy przez a', b', c' miary wielkości A, B, C przy nowych jednostkach. Mamy wedle założenia (5) $c'=ga'^p b'^q$. Na mocy (4) jest $a'=\lambda^\alpha \tau^\beta a$ i $b'=\lambda^\gamma \tau^\delta b$, zatem $c'=g(\lambda^\alpha \tau^\beta a)^p (\lambda^\gamma \tau^\delta b)^q = \lambda^{p\alpha+q\gamma} \tau^{p\beta+q\delta} c$, a stąd w myśl definicji wymiaru wynika wzór (I), c. b. d. d.

Z twierdzenia powyższego wypływają następujące wnioski:

Wniosek 1. Jeżeli wzór (5) *ma postać*

$$c=ab, \quad \text{to} \quad [C]=[A][B]=L^{\alpha+\gamma} T^{\beta+\delta}$$
$$c=a/b, \quad ,, \quad [C]=[A]/[B]=L^{\alpha-\gamma} T^{\beta-\delta}$$
$$c=a^p, \quad ,, \quad [C]=[A]^p=L^{\alpha p} T^{\beta p}.$$

Przykłady: 1. Prędkość wyraża się wzorem $v=s/t$. Zatem

$$[v]=[s]/[t]=L/T=LT^{-1}.$$

2. Przyśpieszenie p w ruchu jednostajnie przyśpieszonym wyraża się wzorem $p=v/t$. Zatem

$$[p]=[v]/[t]=LT^{-1}/T=LT^{-2}.$$

Podobny wynik otrzymamy, opierając się na wzorze $s=\frac{1}{2}pt^2$. Obliczamy z niego $p=2s/t^2$. Zatem

$$[p]=[s]/[t]^2=L/T^2=LT^{-2}.$$

3. Prędkość kątowa jest $\omega=d\varphi/dt$. Wymiar kąta φ jest $L^0 T^0$, gdyż miara łukowa φ nie zależy od jednostek długości. Zatem

$$[\omega]=1/T=T^{-1}.$$

4. Przyśpieszenie kątowe jest $\varepsilon=d^2\varphi/dt^2$, więc

$$[\varepsilon]=1/T^2=T^{-2}.$$

Wniosek 2. Pewne stałe mogą zależeć od wyboru jednostek długości i czasu. Możemy wtedy mówić o *wymiarze* tych *stałych*.

Przykład. Np. w pewnym ruchu przyśpieszenie jest co do wartości proporcjonalne do kwadratu prędkości. Oznaczając współczynnik proporcjonalności przez k, mamy

$$p=kv^2.$$

Przy jednostkach cm, sek jest $k=2$. Obliczyć k przy jednostkach m i min. Mamy $k=p/v^2$, zatem $[k]=[p]/[v]^2=LT^{-2}/(LT^{-1})^2$, więc $[k]=L^{-1}$, skąd

$$2\,\text{cm}^{-1}=2(1/100\,\text{m})^{-1}=200\,\text{m}^{-1}.$$

W układzie jednostek m i min jest więc $k=200$.