II. Zmiana układu odniesienia

§ 12. Związek między współrzędnymi. Prędkość i przyśpieszenie punktu zależą od układu odniesienia, względem którego badamy ruch punktu. Ruch tego samego punktu będzie więc opisany odmiennie przez dwóch obserwatorów, którzy poruszają się względem siebie.

Jeżeli np. jedziemy pociągiem, wówczas podróżni jadący z nami są względem nas w spoczynku. Dla obserwatora stojącego przy torze podróżni poruszają się z prędkością pociągu. Możemy to wypowiedzieć w ten sposób: względem układu odniesienia związanego z pociągiem podróżni są w spoczynku, a względem układu odniesienia związanego z ziemią podróżni poruszają się z prędkością pociągu.

Ruchy planet i słońca względem układu odniesienia związanego z ziemią są bardzo skomplikowane. Kopernik zrobił odkrycie, że ruchy planet przedstawiają się o wiele prościej, jeżeli jako układ odniesienia obierzemy układ związany ze słońcem.

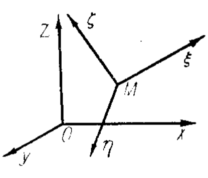
Niech dany będzie układ odniesienia $O(x, y, z)$ i drugi jeszcze układ $M(\xi, \eta, \zeta)$ poruszający się względem poprzedniego (rys. 1). Dla odróżnienia układ (x, y, z) nazywać będziemy układem stałym, a układ (ξ, η, ζ) ruchomym. Ruch tego samego punktu będzie przedstawiał się rozmaicie w obu układach.

Zajmiemy się zadaniem wyznaczenia ruchu punktu A względem jednego układu, gdy znany jest ten ruch względem innego układu.

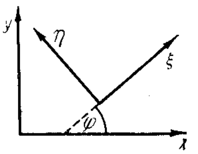
Zadanie powyższe jest bardzo ważne i spotykamy się z nim w wielu przypadkach.

Oznaczmy przez x_0, y_0, z_0 współrzędne początku M w układzie $O(x, y, z)$, a przez ξ_0, η_0, ζ_0 współrzędne początku O w układzie $M(\xi, \eta, \zeta)$. Niechaj $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ będą kątami między osiami obu układów, jak wskazuje tabelka:

osie	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3



1.



2.

Jeżeli x, y, z i ξ, η, ζ są współrzędnymi punktu A odpowiednio w układzie pierwszym i drugim, wówczas jak wiadomo z geometrii analitycznej,

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} x &= x_0+\xi\cos\alpha_1+\eta\cos\alpha_2+\zeta\cos\alpha_3\\ y &= y_0+\xi\cos\beta_1+\eta\cos\beta_2+\zeta\cos\beta_3\\ z &= z_0+\xi\cos\gamma_1+\eta\cos\gamma_2+\zeta\cos\gamma_3\end{aligned}$$

$$\text{(I')}\qquad \begin{aligned} \xi &= \xi_0+x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1\\ \eta &= \eta_0+x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2\\ \zeta &= \zeta_0+x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3.\end{aligned}$$

Ruch układu $M(\xi, \eta, \zeta)$ względem $O(x, y, z)$ będzie znany, jeżeli dla każdej chwili t podane będą współrzędne x_0, y_0, z_0 i kąty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$. Zatem współrzędne x_0, y_0, z_0, i kąty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ są funkcjami czasu t. Jeżeli ruch punktu A względem układu $M(\xi, \eta, \zeta)$ określony jest funkcjami $\xi=f(t)$, $\eta=\varphi(t)$, $\zeta=\psi(t)$, wówczas ruch względem układu $O(x, y, z)$ otrzymamy ze wzorów (I)

$$x=x_0+f(t)\cos\alpha_1+\varphi(t)\cos\alpha_2+\psi(t)\cos\alpha_3$$

i podobnie dla y, z.

Jeżeli ruch punktu A odbywa się w płaszczyźnie Π, to obierając osie x, y i ξ, η w tej płaszczyźnie i oznaczając przez φ kąt między osiami x a ξ (str. 53, rys. 2), otrzymamy:

$$\text{(II)}\qquad x=x_0+\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi,\qquad y=y_0+\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi$$

$$\text{(II')}\qquad \xi=\xi_0+x\cos\varphi+y\sin\varphi,\qquad \eta=\eta_0-x\sin\varphi+y\cos\varphi.$$

Jeżeli kierunki osi układu ruchomego $M(\xi, \eta, \zeta)$ nie zmieniają się, powiadamy, że układ ten porusza się ruchem *postępowym*.

W tym przypadku kąty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ są stałe.

Mówimy, że układ ruchomy obraca się około osi l z prędkością kątową ω, jeżeli punkty położone na osiach ξ, η, ζ obracają się około osi l z prędkością kątową ω.

Niech układ $M(\xi, \eta, \zeta)$ obraca się około osi ζ z prędkością kątową ω. Przyjmijmy, że w chwili $t=0$ układ stały $O(x, y, z)$ pokrywał się z układem ruchomym $M(\xi, \eta, \zeta)$. Mamy zatem $x_0=y_0=z_0=\xi_0=\eta_0=\zeta_0=0$. Oznaczmy przez φ kąt między osiami x, ξ. Oczywiście $\varphi=\omega t$. Ponieważ osie x, y i ξ, η leżą stale w jednej płaszczyźnie, więc na mocy (II i (II'):

$$\text{(III)}\qquad x=\xi\cos\omega t-\eta\sin\omega t,\qquad y=\xi\sin\omega t+\eta\cos\omega t,\qquad z=\zeta$$

$$\text{(III')}\qquad \xi=x\cos\omega t+y\sin\omega t,\qquad \eta=-x\sin\omega t+y\cos\omega t,\qquad \zeta=z.$$

Przykład 1. Ruch punktu względem układu stałego określony jest równaniami

(1) $$x=a\cos\omega t,\qquad y=b\sin\omega t,$$

a więc tor punktu jest elipsą o równaniu $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

Jak przedstawia się ruch tego punktu w układzie ruchomym o tym samym początku, jeżeli układ ten obraca się w kierunku dodatnim z prędkością kątową ω?

Zakładamy przytem, że w chwili początkowej $t=0$ oba układy się pokrywają.

Otóż oznaczając przez ξ,η współrzędne dowolnego punktu względem układu ruchomego, mamy

$$\xi=x\cos\omega t+y\sin\omega t,\qquad \eta=-x\sin\omega t+y\cos\omega t,$$

gdyż na mocy założenia kąt φ zawarty między osiami x, ξ wynosi tu ωt. Podstawiając po prawej stronie tych wzorów wyrażenia (1), otrzymujemy równania krzywej opisanej przez punkt w układzie ruchomym

$$\xi=a\cos^2\omega t+b\sin^2\omega t,\qquad \eta=(b-a)\sin\omega t\cos\omega t,$$

czyli, z uwagi na związki $\cos^2\omega t=\dfrac{1+\cos 2\omega t}{2}$, $\sin^2\omega t=\dfrac{1-\cos 2\omega t}{2}$ i $\sin\omega t\cos\omega t=\frac{1}{2}\sin 2\omega t$:

$$\xi=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos 2\omega t,\qquad \eta=\frac{b-a}{2}\sin 2\omega t,$$

skąd

$$\left[\xi-\frac{a+b}{2}\right]^2+\eta^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

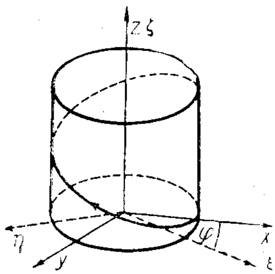
A więc: ze względu na układ ruchomy punkt opisuje koło, gdy $a\neq b$, zaś znajduje się w spoczynku, gdy $a=b$.

Przykład 2. Ruch po linii śrubowej. Ważnym przykładem ruchu punktu po krzywej przestrzennej jest *ruch śrubowy*, który powstaje w sposób następujący. Układ ruchomy (ξ,η,ζ) obraca się z prędkością kątową stałą ω około osi ζ, zaś punkt porusza się względem układu ruchomego ruchem jednostajnym z prędkością c po prostej $\xi=r$, $\eta=0$ (t. j. po prostej równoległej do osi ζ i przecinającej oś ξ w punkcie $\xi=r$).

Ruch taki powstaje np. gdy walec obraca się około swej osi z prędkością kątową ω, zaś punkt porusza się po tworzącej walca ruchem jednostajnym.

Niech w chwili $t=0$ układ stały (x, y, z) pokrywa się z układem ruchomym (ξ, η, ζ), zaś punkt ruchomy ma współrzędne r, 0, 0. Na mocy (III)

$$x = r\cos\omega t, \qquad y = r\sin\omega t, \qquad z = ct. \tag{2}$$



Równania powyższe możemy również odczytać wprost z rysunku. Przedstawiają one parametrycznie równania linii śrubowej. Ruch punktu odbywa się więc po linii śrubowej. Różniczkując (2) otrzymamy

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t, \qquad \dot{y} = r\omega\cos\omega t, \qquad \dot{z} = c$$

$$\ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t, \qquad \ddot{y} = -r\omega^2\sin\omega t, \qquad \ddot{z} = 0.$$

Zatem

$$|\bar{v}| = \sqrt{r^2\omega^2 + c^2}, \qquad |\bar{p}| = r\omega^2.$$

A więc: *w ruchu śrubowym prędkość i przyśpieszenie są stałe co do wartości bezwzględnej.*

§ 13. Związek między prędkościami. Prędkość punktu A względem układu stałego (x, y, z) nazywamy *prędkością bezwzględną* i oznaczamy przez $\bar{v}_b$.

Prędkość punktu względem układu ruchomego nazywamy *prędkością względną* i oznaczamy przez $\bar{v}_w$.

Wyobraźmy sobie, że punkt A, którego ruch badamy, związany jest z układem ruchomym (ξ, η, ζ) *sztywnie*, t. zn. że jego współrzędne ξ, η, ζ nie zmieniają się. Przy tym założeniu punkt A, złączony z układem ruchomym, posiadałby pewną prędkość względem układu stałego. Prędkość tę nazywamy *prędkością unoszenia* i oznaczamy przez $\bar{v}_u$.

Możemy także powiedzieć, że prędkością unoszenia punktu A w chwili danej nazywamy prędkość punktu złączonego z układem ruchomym i pokrywającego się w chwili tej z punktem A.

Przypuśćmy np., że po korytarzu pociągu biegnie podróżny. Za układ stały obierzmy układ związany z ziemią, za układ ruchomy — układ związany z pociągiem.

Człowiek stojący przy torze będzie obserwował ruch podróżnego względem układu stałego, a człowiek siedzący w wagonie — względem układu ruchomego.

Prędkość podróżnego, jaką zaobserwuje człowiek stojący przy torze, będzie prędkością *bezwzględną*. Prędkość, jaką zaobserwuje człowiek siedzący w pociągu, będzie prędkością *względną*. Prędkością *unoszenia* będzie prędkość tego punktu podłogi korytarza, którego dotyka w danej chwili podróżny biegnący przez korytarz.

Prędkość unoszenia będzie więc w tym przypadku prędkością pociągu. Prędkość bezwzględna będzie większa lub mniejsza od prędkości unoszenia zależnie od tego, czy podróżny biegnie w kierunku ruchu pociągu, czy przeciwnie.

Zajmiemy się teraz związkami zachodzącymi między prędkością bezwzględną, względną i unoszenia.

Punkt A ma względem układu stałego współrzędne x, y, z. Zatem rzuty prędkości bezwzględnej na osie układu stałego będą:

$$v_{b_x} = \dot{x}, \qquad v_{b_y} = \dot{y}, \qquad v_{b_z} = \dot{z}. \tag{1}$$

Podobnie, rzuty prędkości względnej na osie układu ruchomego będą

$$v_{w_\xi} = \dot{\xi}, \qquad v_{w_\eta} = \dot{\eta}, \qquad v_{w_\zeta} = \dot{\zeta}. \tag{2}$$

Aby porównać prędkość bezwzględną ze względną, utwórzmy rzuty prędkości względnej na osie układu stałego. Otrzymamy

$$v_{w_x} = \dot{\xi}\cos\alpha_1 + \dot{\eta}\cos\alpha_2 + \dot{\zeta}\cos\alpha_3 \qquad \text{i t. d.} \tag{3}$$

Na mocy (1), str. 54, współrzędne x, y, z względem układu stałego wynoszą

$$x = x_0 + \xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\alpha_2 + \zeta\cos\alpha_3 \qquad \text{i t. d.}$$

Różniczkując powyższy wzór, dostaniemy więc na mocy (1)

$$v_{b_x} = \dot{x} = \dot{x}_0 + \xi\frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \eta\frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \zeta\frac{d\cos\alpha_3}{dt} + \dot{\xi}\cos\alpha_1 + \dot{\eta}\cos\alpha_2 + \dot{\zeta}\cos\alpha_3. \tag{4}$$

Prędkość unoszenia otrzymamy, zakładając, że punkt A jest związany z układem ruchomym sztywnie, t. zn., że współrzędne ξ, η, ζ

są stałe, czyli że $\dot{\xi}=0$, $\dot{\eta}=0$, $\dot{\zeta}=0$. Na mocy więc (4) rzuty prędkości unoszenia na osie układu (x, y, z) wyniosą

$$v_{u_x} = \dot{x}_0 + \xi \frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \eta \frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \zeta \frac{d\cos\alpha_3}{dt} \qquad \text{i t. d.} \tag{5}$$

Na mocy (3) i (5) otrzymujemy z (4) $v_{b_x} = v_{u_x} + v_{w_x}$ i podobnie $v_{b_y} = v_{u_y} + v_{w_y}$, $v_{b_z} = v_{u_z} + v_{w_z}$, czyli

$$\bar{v}_b = \bar{v}_u + \bar{v}_w. \tag{I}$$

Udowodniliśmy więc, że *prędkość bezwzględna równa się sumie prędkości unoszenia i prędkości względnej.*

Gdy układ ruchomy porusza się ruchem postępowym, kąty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ są stałe, zatem pochodne $\frac{d\cos\alpha_1}{dt}$, $\frac{d\cos\alpha_2}{dt}, \ldots, \frac{d\cos\gamma_3}{dt}$ są zerami. Ze wzoru (5) otrzymujemy przeto

$$v_{u_x} = \dot{x}_0, \qquad v_{u_y} = \dot{y}_0, \qquad v_{u_z} = \dot{z}_0.$$

Jeżeli więc $\bar{v}_0$ jest prędkością początku układu ruchomego, to

$$\bar{v}_u = \bar{v}_0.$$

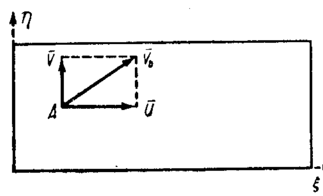
Zatem: *jeżeli układ porusza się ruchem postępowym, to prędkość unoszenia jest dla wszystkich punktów ta sama i równa się prędkości początku układu.*

Uwaga. O punkcie A mówimy, że wykonywa dwa ruchy równocześnie: jeden z prędkością względną, a drugi z prędkością unoszenia. Ruch względem układu stałego nazywamy *ruchem złożonym* z obu ruchów składowych albo ich ruchem *wypadkowym.*

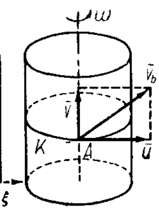
Prędkość ruchu wypadkowego jest więc sumą prędkości ruchów składowych. Aby prędkość ruchu wypadkowego była określona, wystarczy podać prędkość ruchów składowych; nie potrzeba przy tym podawać, która z prędkości jest względna, a która jest prędkością unoszenia.

Przykład 1. Pociąg porusza się z prędkością $\bar{u}$; po podłodze wagonu toczy się punkt A z prędkością $\bar{v}$ względem podłogi. Jaka jest prędkość punktu A względem ziemi?

Przyjmijmy, że osie układu (x, y, z) związane są z ziemią, zaś osie ξ, η, ζ z wagonem (rys. 1). Prędkością unoszenia punktu A jest więc $\bar{u}$. Taką bowiem prędkość miałby punkt A względem ziemi, gdyby był w spoczynku względem wagonu. Prędkość względna punktu A niechaj wynosi $\bar{v}$. Zatem



1.



2.

jego prędkość bezwzględna $\bar{v}_b$ (t. j. prędkość względem ziemi) wyniesie

$$\bar{v}_b = \bar{u} + \bar{v}.$$

Przykład 2. Walec obraca się około osi z prędkością kątową ω. Punkt A porusza się po tworzącej walca z prędkością $\bar{v}$ (względem tworzącej). Jaka jest prędkość bezwzględna punktu A?

Prędkość względna wynosi $\bar{v}$. Aby wyznaczyć prędkość unoszenia, zauważmy, że gdyby punkt A był z walcem związany, wówczas poruszałby się po kole K z prędkością kątową ω (rys. 2). Jeżeli więc r oznacza promień podstawy walca, to prędkość unoszenia $\bar{u}$ jest styczna do koła K i $|\bar{u}| = r\omega$. Prędkość bezwzględna $\bar{v}_b$ wynosi zatem $\bar{v}_b = \bar{v} + \bar{u}$, a ponieważ $\bar{v} \perp \bar{u}$, więc

$$|\bar{v}_b| = \sqrt{v^2 + u^2} = \sqrt{v^2 + r^2\omega^2} \qquad (v = |\bar{v}|, \quad u = |\bar{u}|).$$

§ 14. Związki między przyśpieszeniami. Zajmiemy się teraz związkami zachodzącymi między przyśpieszeniami punktu względem różnych układów. Przyjmijmy, że mamy dwa układy: stały (x, y, z) i ruchomy (ξ, η, ζ).

Przyśpieszenie punktu A względem układu stałego nazywamy *przyśpieszeniem bezwzględnym* $\bar{p}_b$.

Przyśpieszenie punktu względem układu ruchomego nazywamy *przyśpieszeniem względnym* $\bar{p}_w$.

Przyśpieszenie, jakie by punkt A posiadał (względem układu stałego), gdyby z układem ruchomym był związany sztywnie, nazywamy *przyśpieszeniem unoszenia* $\bar{p}_u$.

Możemy również powiedzieć, że przyśpieszeniem unoszenia nazywamy przyśpieszenie takiego punktu związanego z układem ruchomym, który w danej chwili pokrywa się z punktem A.

Jeżeli np. po korytarzu wagonu biegnie podróżny i za układ stały obierzemy układ związany z ziemią, za ruchomy zaś — związany z wagonem, to: przyśpieszeniem bezwzględnym podróżnego będzie przyśpieszenie, jakie zaobserwuje człowiek stojący przy torze, przyśpieszeniem względnym będzie przyśpieszenie, jakie zauważą podróżni jadący tym wagonem, wreszcie przyśpieszeniem unoszenia będzie przyśpieszenie względem ziemi tego punktu podłogi, którego w danej chwili dotyka biegnący podróżny.

Oznaczmy przez x, y, z współrzędne punktu A względem układu stałego, zaś przez ξ, η, ζ względem układu ruchomego.

Rzuty przyśpieszenia bezwzględnego $\bar{p}_b$ na osie x, y, z są:

$$p_{b_x} = \ddot{x}, \qquad p_{b_y} = \ddot{y}, \qquad p_{b_z} = \ddot{z}. \tag{1}$$

Rzuty przyśpieszenia względnego p_w na osie ξ, η, ζ są:

$$p_{w_\xi} = \ddot{\xi}, \qquad p_{w_\eta} = \ddot{\eta}, \qquad p_{w_\zeta} = \ddot{\zeta}. \tag{2}$$

Utwórzmy rzuty wektora $\bar{p}_w$ na osie układu stałego. Otrzymamy

$$p_{w_x} = \ddot{\xi} \cos\alpha_1 + \ddot{\eta} \cos\alpha_2 + \ddot{\zeta} \cos\alpha_3 \qquad \text{i t. d.} \tag{3}$$

Na mocy (1), str. 54, mamy

$$x = x_0 + \xi \cos\alpha_1 + \eta \cos\alpha_2 + \zeta \cos\alpha_3 \qquad \text{i t. d.} \tag{4}$$

Przyśpieszenie unoszenia otrzymamy, zakładając, że punkt A jest sztywnie związany z układem ruchomym, czyli że ξ, η, ζ są stałe, a więc że pochodne $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$ są równe zeru.

Rzuty wektora $\bar{p}_u$ na osie x, y, z otrzymamy, różniczkując dwukrotnie równanie (4) przy założeniu, że ξ, η, ζ są stałymi:

$$p_{u_x} = \ddot{x}_0 + \xi \frac{d^2 \cos\alpha_1}{dt^2} + \eta \frac{d^2 \cos\alpha_2}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 \cos\alpha_3}{dt^2} \qquad \text{i t. d.} \tag{5}$$

Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ są stałe, to $p_{u_x} = \ddot{x}_0$.

A więc: *jeżeli układ porusza się ruchem postępowym, to przyśpieszenie unoszenia jest dla wszystkich punktów równe przyśpieszeniu początku układu.*

Zróżniczkujmy dwukrotnie równanie (4). Otrzymamy

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \ddot{x}_0 &+ \xi \frac{d^2 \cos\alpha_1}{dt^2} + \eta \frac{d^2 \cos\alpha_2}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 \cos\alpha_3}{dt^2} + \\ &+ \ddot{\xi} \cos\alpha_1 + \ddot{\eta} \cos\alpha_2 + \ddot{\zeta} \cos\alpha_3 + \\ &+ 2\left(\dot{\xi} \frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \dot{\eta} \frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \dot{\zeta} \frac{d\cos\alpha_3}{dt}\right) \qquad \text{i t. d.} \end{aligned} \tag{6}$$

Wedle (3) i (5) wyrażenia w pierwszym i w drugim wierszu oznaczają rzuty $\bar{p}_u$ i $\bar{p}_w$ na osie x, y, z.

Oznaczmy przez $\bar{p}_C$ wektor, którego rzuty na osie x, y, z wyrażają się wzorami

$$(7) \qquad p_{C_x} = 2\left(\dot{\xi}\frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \dot{\eta}\frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \dot{\zeta}\frac{d\cos\alpha_3}{dt}\right) \qquad \text{i t. d.}$$

Wektor $\bar{p}_C$ nazywamy *przyśpieszeniem Coriolisa.*

Wzór (6) na mocy (1), (3), (5) i (7) możemy napisać w postaci $p_{b_x} = p_{u_x} + p_{w_x} + p_{C_x}$. Podobnie otrzymamy $p_{b_y} = p_{u_y} + p_{w_y} + p_{C_y}$ i $p_{b_z} = p_{u_z} + p_{w_z} + p_{C_z}$. Możemy więc napisać

$$\text{(I)} \qquad \bar{p}_b = \bar{p}_u + \bar{p}_w + \bar{p}_C.$$

A więc: *przyśpieszenie bezwzględne równa się sumie przyśpieszeń: unoszenia, względnego i Coriolisa.*

Przyśpieszenie Coriolisa. Aby uzmysłowić sobie znaczenie przyśpieszenia Coriolisa, wykreślmy z początku M układu ruchomego wektor prędkości względnej $\overline{MB} = \bar{v}_w$. Współrzędne punktu B względem układu (ξ, η, ζ) wynoszą $v_{w_\xi}, v_{w_\eta}, v_{w_\zeta}$ czyli $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$. Wyobraźmy sobie, że punkt B jest sztywnie związany z układem (ξ, η, ζ). Prędkość $\bar{u}$ punktu B względem układu stałego (x, y, z) równa się zatem jego prędkości unoszenia (bo jego prędkość względna jest zerem). Pisząc $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ zamiast ξ, η, ζ, otrzymamy więc na mocy (5), str. 58:

$$u_x = \dot{x}_0 + \dot{\xi}\frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \dot{\eta}\frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \dot{\zeta}\frac{d\cos\alpha_3}{dt} \qquad \text{i t. d.}$$

Porównując ze wzorem (7), otrzymamy:

$$u_x = \dot{x}_0 + \tfrac{1}{2}p_{C_x}, \qquad u_y = \dot{y}_0 + \tfrac{1}{2}p_{C_y}, \qquad u_z = \dot{z}_0 + \tfrac{1}{2}p_{C_z}.$$

Jeżeli więc przez $\bar{v}_0$ oznaczymy prędkość początku układu ruchomego, to $\bar{u} = \bar{v}_0 + \frac{1}{2}\bar{p}_C$, zatem

$$\text{(II)} \qquad \bar{p}_C = 2(\bar{u} - \bar{v}_0).$$

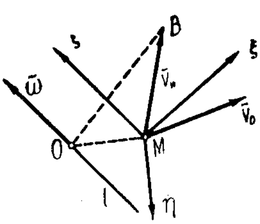
Różnica $\bar{u} - \bar{v}_0$ jest to prędkość punktu B względem początku M układu ruchomego (ξ, η, ζ) (por. § 14, str. 65, (I)).

A więc: *aby otrzymać przyśpieszenie Coriolisa, wykreślamy z początku układu ruchomego wektor prędkości względnej* $\bar{v}_w$ *i wyobrażamy sobie, że wektor ten jest związany sztywnie z układem ruchomym.*

Przyśpieszenie Coriolisa równa się podwojonej prędkości końca wektora $\bar{v}_w$ *względem jego początku.*

Wynika stąd, że *przyśpieszenie Coriolisa jest zerem, jeżeli prędkość względna jest zerem lub jeżeli układ ruchomy porusza się ruchem postępowym.*

W tych bowiem przypadkach początek i koniec wektora $\bar{v}_w$ ma tę samą prędkość. Można to również łatwo odczytać ze wzoru (7), kładąc $\dot{\xi}=0$, $\dot{\eta}=0$, $\dot{\zeta}=0$ lub $\alpha_1=\text{const.}$, $\alpha_2=\text{const.}$, $\alpha_3=\text{const.}$ i t. d.



Niech układ (ξ, η, ζ) obraca się około pewnej osi l z prędkością kątową $\bar{\omega}$. Zachowując poprzednie znakowanie i obierając dowolny punkt O na osi l, otrzymamy

$$\bar{u}=\overline{OB}\times\bar{\omega}, \qquad \bar{v}_0=\overline{OM}\times\bar{\omega}.$$

Zatem $\bar{p}_C=2(\bar{u}-\bar{v}_0)=2(\overline{OB}-\overline{OM})\times\bar{\omega}$. Lecz $\overline{OB}-\overline{OM}=\bar{v}_w$. A więc

$$\bar{p}_C=2\bar{v}_w\times\bar{\omega}. \tag{III}$$

Widzimy więc, że *przyśpieszenie Coriolisa równa się podwojonemu iloczynowi wektorowemu wektora prędkości względnej i prędkości kątowej.*

Przyśpieszenie Coriolisa jest tedy prostopadłe do osi obrotu i prędkości względnej i wynosi

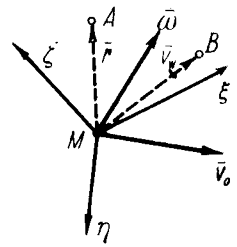
$$|\bar{p}_C|=2|\bar{\omega}|\,|\bar{v}_w|\sin\alpha,$$

gdzie α jest kątem między osią obrotu a prędkością względną. Wynika stąd, że przyśpieszenie Coriolisa jest zerem (poza tym, gdy $\bar{v}_w=0$), wówczas gdy $\alpha=0$, t. j. gdy wektor $\bar{v}_w$ jest równoległy do $\bar{\omega}$.

Wykażemy później (w rozdziale VII), że w każdej chwili prędkości punktów związanych sztywnie z układem ruchomym (ξ, η, ζ) są takie, jak gdyby układ wykonywał dwa ruchy równocześnie: jeden ruch postępowy z prędkością początku układu, a drugi obrotowy około pewnej osi, przechodzącej przez początek układu, z prędkością kątową $\bar{\omega}$.

Tę oś obrotu nazywamy *osią chwilowego obrotu*; $\bar{\omega}$ nazywamy *chwilową prędkością kątową.*

W każdym momencie czasu może być inna oś chwilowego obrotu i inne $\bar{\omega}$. A więc, oznaczając przez $\bar{v}_0$ prędkość początku układu M, otrzymamy na prędkość unoszenia $\bar{v}_u$ punktu A wzór



$$\bar{v}_u = \bar{v}_0 + \overline{MA} \times \bar{\omega}.$$

Jeżeli więc przez B oznaczymy koniec wektora prędkości względnej wykreślonej z początku układu, zaś przez $\bar{u}$ (jak poprzednio) prędkość unoszenia punktu B, to, $\bar{u} = \bar{v}_0 + \overline{MB} \times \bar{\omega} = \bar{v}_0 + \bar{v}_w \times \bar{\omega}$, skąd na mocy (II), str. 61

(IV) $$\bar{p}_C = 2\,\bar{v}_w \times \bar{\omega}.$$

Wzór (IV) przedstawia przyśpieszenie Coriolisa w przypadku ogólnym.

Przyśpieszenie Coriolisa jest więc zerem: 1^0 *gdy* $\bar{\omega}=0$, (t. j. gdy układ porusza się ruchem postępowym), 2^0 *gdy* $\bar{v}_w=0$, 3^0 *gdy* $\bar{\omega} \parallel \bar{v}_w$.

Przykład 1. Pociąg porusza po torze prostolinijnym z przyśpieszeniem $\bar{p}$. Po podłodze wagonu porusza się punkt z przyśpieszeniem $\bar{a}$ względem wagonu. Wyznaczyć przyśpieszenie punktu względem ziemi.

Przyśpieszenie względne jest $\bar{p}_w = \bar{a}$, przyśpieszenie unoszenia $\bar{p}_u = \bar{p}$. Ponieważ układ odniesienia związany z wagonem porusza się ruchem postępowym, więc przyśpieszenie Coriolisa $\bar{p}_C = 0$. Zatem przyśpieszenie bezwzględne (t. j. przyśpieszenie względem ziemi) wynosi

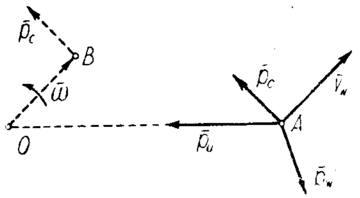
$$\bar{p}_b = \bar{a} + \bar{p}.$$

Przykład 2. Walec o promieniu r obraca się około osi z prędkością kątową ω. Po tworzącej walca porusza się punkt A z prędkością stałą $\bar{v}$ względem tworzącej. Wyznaczyć przyśpieszenie punktu A względem układu stałego.

Obierzmy układ ruchomy związany z walcem, przyjmując oś walca za oś ζ. Gdyby punkt A był sztywnie związany z układem (ξ, η, ζ), wówczas posuwałby się po kole K z prędkością kątową ω. Przyśpieszenie unoszenia $\bar{p}_u$ jest więc skierowane ku środkowi koła K i $|\bar{p}_u| = r\omega^2$. Przyśpieszenie względne $\bar{p}_w = 0$, wedle założenia. Ponieważ prędkość względna $\bar{v}_w = \bar{v}$ jest równoległa do osi obrotu, więc przyśpieszenie Coriolisa $\bar{p}_C = 0$. Zatem

$$\bar{p}_b = \bar{p}_u.$$

Przykład 3. Płaszczyzna pozioma obraca się z prędkością kątową ω około osi pionowej. Po płaszczyźnie porusza się punkt A, mający w pewnej chwili względem płaszczyzny prędkość $\bar{v}_w$ i przyśpieszenie $\bar{p}_w$. Wyznaczyć przyśpieszenie względem układu stałego w owej chwili.



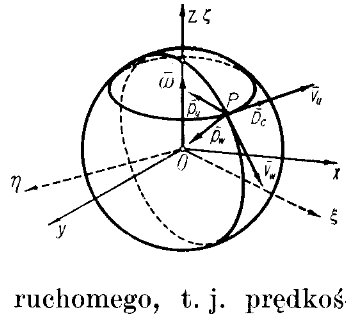
Oznaczmy przez O punkt przebicia osi obrotu z płaszczyzną ruchomą. Gdyby punkt A był z płaszczyzną ruchomą związany, wówczas posuwałby się po kole o środku O i promieniu $OA=r$ z prędkością kątową ω. Zatem przyśpieszenie unoszenia $\bar{p}_u$ skierowane jest do punktu O i $|\bar{p}_u|=r\omega^2$.

Aby wyznaczyć przyśpieszenie Coriolisa $\bar{p}_C$, obierzmy punkt O za początek układu ruchomego, związanego z płaszczyzną ruchomą i wykreślmy z punktu O wektor $\overline{OB}=\bar{v}_w$. Ponieważ prędkość punktu O jest zerem, więc $\frac{1}{2}\bar{p}_C$ równa się prędkości punktu B. Zatem $\bar{p}_C\perp\bar{v}_w$ i $|p_C|=2OB\,\omega=2|\bar{v}_w|\,\omega$.

To samo oczywiście otrzymalibyśmy, opierając się na wzorze $\bar{p}_C=2\bar{v}_w\times\bar{\omega}$ i na tym, że wektor prędkości kątowej $\bar{\omega}$ ma kierunek osi obrotu, jest więc do płaszczyzny ruchomej prostopadły.

Przyśpieszenie bezwzględne otrzymamy, dodając do siebie wektory $\bar{p}_w$, $\bar{p}_u$ i $\bar{p}_C$.

Przykład 4. Kula o promieniu r obraca się dokoła stałej osi ze stałą prędkością kątową $\bar{\omega}$. Po wielkim kole, przechodzącym przez oś obrotu, porusza się punkt P ze stałą prędkością $\bar{c}$. Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie tego punktu względem układu stałego (x, y, z).



Niech ξ, η, ζ oznacza układ ruchomy, którego oś ζ jest ta sama co dla układu stałego, zaś płaszczyzna $\xi\zeta$ jest płaszczyzną południka, po którym porusza się punkt P. Układ ten obraca się wraz z kulą dokoła osi z ze stałą prędkością kątową $\bar{\omega}$ (którą na rysunku przedstawia wektor narysowany na osi z). Prędkość punktu P względem układu ruchomego, t. j. prędkość względna $\bar{v}_w$, jest wektorem o długości c, stycznym do południka (po którym porusza się P). Prędkość unoszenia $\bar{v}_u$ równa się prędkości punktu równoleżnika przechodzącego przez P. Ponieważ punkt ten porusza się po kole o promieniu $\varrho = r\cos\varphi$, gdzie φ oznacza szerokość geograficzną tego równoleżnika (t. j. kąt zawarty między promieniem OP a płaszczyzną równika), więc prędkość $\bar{v}_u$ jest styczna do równoleżnika i wynosi $\varrho\omega = r\,\omega\cos\varphi$. Prędkości $\bar{v}_w$ i $\bar{v}_u$ są do siebie prostopadłe, zatem $|\bar{v}_b| = \sqrt{c^2 + r^2\omega^2\cos^2\varphi}$. Prędkość bezwzględna $\bar{v}_b$ tworzy z południkami kąt ϑ określony wzorem $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{|\bar{v}_u|}{|\bar{v}_w|} = \dfrac{r\,\omega}{c}\cos\varphi$.

Ponieważ punkt P porusza się po południku ze stałą prędkością c, więc przyśpieszenie względne $\bar{p}_w$ jest skierowane ku środkowi kuli i $|\bar{p}_w| = c^2/r$. Podobnie, przyśpieszenie unoszenia $\bar{p}_u$ jest skierowane ku środkowi równoleżnika (przechodzącego przez P) i $|\bar{p}_u| = \varrho\omega^2 = r\omega^2\cos\varphi$. Przyśpieszenie Coriolisa $\bar{p}_C = 2\bar{v}_w \times \bar{\omega}$ jest prostopadłe do $\bar{\omega}$ i $\bar{v}_w$, zatem jest prostopadłe do płaszczyzny południka i ma ten sam zwrot co $\bar{v}_u$. Ponieważ, jak łatwo widzieć, kąt zawarty między $\bar{\omega}$ a $\bar{v}_w$ wynosi $\pi - \varphi$, więc $|\bar{p}_C| = 2|\bar{v}_w||\bar{\omega}|\sin\varphi = 2c\,\omega\sin\varphi$. Dodając wektory $\bar{p}_w, \bar{p}_u$ i $\bar{p}_C$, otrzymamy przyśpieszenie bezwzględne $\bar{p}_b$.

§ 15. Wyznaczanie ruchu względnego. Dotychczas zajmowaliśmy się wyznaczaniem ruchu względem układu stałego, mając dany ruch względem układu ruchomego. Często spotykamy się z zagadnieniem odwrotnym, t. zn. mamy znaleźć ruch względem układu ruchomego, znając ten ruch względem układu stałego.

Ze wzorów (I), str. 58 i 61, otrzymujemy na prędkość względną i przyśpieszenie względne:

$$\text{(I)} \qquad \bar{v}_w = \bar{v}_b - \bar{v}_u, \qquad \bar{p}_w = \bar{p}_b - \bar{p}_u - \bar{p}_C.$$

A więc: *prędkość względną otrzymamy, dodając do prędkości bezwzględnej prędkość unoszenia ze zwrotem przeciwnym. Przyśpieszenie względne otrzymamy, dodając do przyśpieszenia bezwzględnego przyśpieszenie unoszenia i Coriolisa ze zwrotami przeciwnymi.*

Ruch względem punktu. Niech punkty A_1 i A_2 poruszają się względem pewnego układu stałego (x, y, z) z prędkościami $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$. Umieśćmy w A_2 początek układu ruchomego (ξ, η, ζ) i załóżmy, że układ ten porusza się ruchem postępowym.

Ruch punktu A_1 względem układu (ξ, η, ζ) nazywać będziemy *ruchem względnym względem punktu* A_2.

Taki ruch zauważyłby obserwator poruszający się ruchem postępowym wraz z punktem A_2.

Oznaczmy przez $\bar{v}_{1,2}$ prędkość punktu A_1 względem punktu A_2, t. zn. względem układu (ξ, η, ζ). Ponieważ prędkość unoszenia równa się prędkości $\bar{v}_2$ punktu A_2, zaś prędkość bezwzględna wynosi $\bar{v}_1$, więc $\bar{v}_1 = \bar{v}_{1,2} + \bar{v}_2$, skąd $\bar{v}_{1,2} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$ lub

(II) $$\bar{v}_{1,2} = \bar{v}_1 + (-\bar{v}_2).$$

Oznaczając przez $\bar{p}_{1,2}$ przyśpieszenie punktu A_1 względem A_2, t. j. względem układu (ξ, η, ζ), otrzymamy z uwagi na to, że przyśpieszenie Coriolisa jest zerem, $\bar{p}_{1,2} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2$ lub

(III) $$\bar{p}_{1,2} = \bar{p}_1 + (-\bar{p}_2).$$

A więc: *prędkość (przyśpieszenie) punktu A_1 względem A_2 otrzymamy, dodając do prędkości (przyśpieszenia) punktu A_1 prędkość (przyśpieszenie) punktu A_2 ze zwrotem przeciwnym.*

Przykład 1. Punkty A_1 i A_2 poruszają się odpowiednio po osiach x i y ruchem jednostajnym z prędkościami c_1 i c_2. Wyznaczyć prędkość punktu A_1 względem A_2.

Szukana prędkość $\bar{v}_{1,2}$ jest różnicą prędkości punktu A_1 i punktu A_2. A więc $\bar{v}_{1,2} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$. Rzuty prędkości $\bar{v}_{1,2}$ na osie x i y wynoszą c_1 i $-c_2$. Zatem

$$|\bar{v}_{1,2}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Przykład 2. Punkt A_1 porusza się po kole o promieniu r ruchem jednostajnym, zaś punkt A_2 porusza się w ten sposób, że znajduje się zawsze na drugim końcu średnicy przechodzącej przez A_1. Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie punktu A_1 względem A_2.

Oczywiście prędkości i przyśpieszenia obu punktów są równe co do wartości i mają zwroty przeciwne. Oznaczając przez $\bar{v}$ i $\bar{p}$ prędkość i przyśpieszenie punktu A_1, otrzymamy

$$\bar{v}_{1,2} = \bar{v} - (-\bar{v}) = 2\bar{v} \quad \text{i} \quad \bar{p}_{1,2} = \bar{p} - (-\bar{p}) = 2\bar{p}.$$

Ponieważ $|\bar{v}_{1,2}| = \text{const.}$, więc przyśpieszenie styczne ruchu względnego jest zerem; zatem $\bar{p}_{1,2}$ jest przyśpieszeniem normalnym. Stąd $|\bar{p}_{1,2}| = |\bar{v}_{1,2}|^2/\varrho = 4|\bar{v}|^2/\varrho$, a ponieważ $|\bar{p}_{1,2}| = 2|\bar{p}| = 2|\bar{v}|^2/r$, więc

$$4|\bar{v}|^2/\varrho = 2|\bar{v}|^2/r \quad \text{czyli} \quad \varrho = 2r.$$

A więc ruch punktu A_1 względem A_2 odbywa się po kole o środku A_2 o promieniu $2r$, z prędkością dwa razy większą od prędkości punktu A_2.

Przykład 3. Po osi x porusza się ciało A z prędkością stałą u, wyrzucając co T sekund drobne ciałka, biegnące po osi x ruchem jednostajnym z prędkością c. Niechaj ν oznacza częstość emisji (t. j. ilość ciałek wyrzucanych na sekundę,), zaś λ odległość dwóch po sobie wyrzuconych ciałek. Mamy oczywiście $\nu=1/T$.

Ponieważ prędkość względna ciałka wyrzuconego jest względem A $c-u$, więc po czasie T odległość ciałka od A wynosi $\lambda=(c-u)T$. Zatem

$$\nu=(c-u)/\lambda. \tag{1}$$

Przypuśćmy teraz, że po osi x porusza się obserwator B z prędkością stałą v. Oznaczmy przez ν' częstość względną emisji (t. j. ilość ciałek na sekundę, napotykanych przez obserwatora), a przez T' czas między spotkaniami dwu kolejnych ciałek. Ponieważ prędkość ciałek względem B wynosi $c-v$, więc $\lambda=(c-v)T'$. Zatem

$$\nu'=(c-v)/\lambda. \tag{2}$$

Na mocy (1) i (2) otrzymujemy

$$\nu'=\nu(c-v)/(c-u)=\nu(1-v/c)/(1-u/c). \tag{3}$$

Załóżmy, że prędkość c jest wielka w porównaniu z prędkościami u i v.

Ponieważ dla małych x mamy $1/(1-x)=1+x$, więc na mocy (3) jest $\nu'=\nu(1-v/c)(1+u/c)=\nu[1-(v-u)/c-vu/c^2]$. Opuszczając ostatni wyraz w nawiasie jako bardzo mały w porównaniu z pozostałymi, otrzymujemy w końcu

$$\nu'=\nu[1-(v-u)/c]. \tag{4}$$

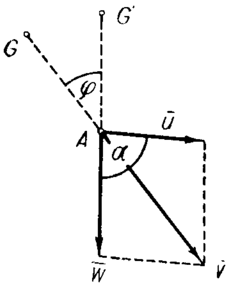
W szczególności, jeżeli $u=0$, dostaniemy

$$\nu'=\nu(1-v/c). \tag{5}$$

Przykład 4. W przestrzeni porusza się rój drobnych ciałek z prędkością stałą $\bar{v}$. Poprzez rój porusza się ciało A z prędkością $\bar{u}$. Prędkość względna ciałek względem A wynosi więc $\bar{w}=\bar{v}-\bar{u}$. Oznaczmy przez w, v i u bezwzględne wartości tych prędkości, przez φ kąt między $\bar{w}$ i $\bar{v}$, a przez α kąt między $\bar{w}$ i $\bar{u}$. Z trójkąta o bokach $\bar{v}$, $-\bar{u}$, $\bar{w}$ otrzymujemy

$$\sin\varphi=\frac{u}{v}\sin\alpha. \tag{6}$$

Podamy zastosowanie powyższego wzoru.



Jako układ stały obierzmy układ związany ze słońcem i gwiazdami stałymi. Pewna gwiazda G wysyła ku ziemi promienie światła biegnące z prędkością $\bar{v}$ ($v=300.000$ km/sek). Ziemia porusza się z prędkością $\bar{u}$ ($u=30$ km/sek). Promienie światła mają więc względem ziemi prędkość względną $\bar{w}$. Obserwator na ziemi, chcąc zobaczyć gwiazdę G, musi ustawić lunetę w kierunku prędkości względnej $\bar{w}$. Będzie więc widział G pozornie w miejscu G'. Kąt φ, wskazujący odchylenie od prawdziwego kierunku, możemy wyliczyć z (6).

Ponieważ v jest wielkie w porównaniu z u, więc kąt φ jest bardzo mały. Ze wzoru (6) otrzymamy

$$\sin\varphi=\frac{\sin\alpha}{10.000}.$$

Dla $\alpha=\pi/2$ (t. j. $\sin\alpha=1$) otrzymujemy dla kąta φ jako wartość maksymalną $\varphi=22''$.

Przykład 5. Po okręgu koła o środku O poruszają się punkty A_1 i A_2 z prędkościami kątowymi ω_1 i ω_2 względem pewnego układu stałego. Obierzmy osie ξ, η układu ruchomego w płaszczyźnie koła, przyjmując O za początek, zaś prostą OA_2 za oś ξ.

Prędkość kątową punktu A_1 względem obranego układu ruchomego nazywamy *prędkością kątową* (względną) *punktu* A_1 *względem punktu* A_2; oznaczamy ją przez $\omega_{1,2}$.

Łatwo można okazać, że

$$\omega_{1,2}=\omega_1-\omega_2. \tag{7}$$

Przypuśćmy, że punkty A_1 i A_2 poruszają się z prędkościami kątowymi stałymi. Oznaczając przez T_1, T_2 odpowiednio czasy obiegów punktów A_1, A_2 w układzie stałym, zaś przez $T_{1,2}$ czas obiegu punktu A_1 względem A_2 (t. j. czas obiegu punktu A_1 w układzie ruchomym), otrzymamy: $T_1=2\pi/\omega_1$, $T_2=2\pi/\omega_2$, $T_{1,2}=2\pi/\omega_{1,2}$. Zatem na mocy (7)

$$1/T_{1,2}=1/T_1-1/T_2. \tag{8}$$

Czas obiegu dużej wskazówki na zegarku wynosi $T_1=1$ godz, małej $T_2=12$ godz. Ze wzoru (8) dostajemy: $1/T_{1,2}=1-\frac{1}{12}$, skąd $T_{1,2}=\frac{12}{11}$ godz $=1$ godz 5 min 27 sek. Zatem wskazówki pokrywają się co 1 godz 5 min 27 sek.

Podróżnikowi odbywającemu podróż naokoło ziemi w kierunku z zachodu na wschód wydaje się, że podróż jego trwała n dób, ponieważ w ciągu podróży miał n dni i n nocy. Wróciwszy jednak do miejsca, z którego podróż rozpoczął, stwierdza, że podróż trwała nie n, lecz n' dób. Jaki jest związek między n a n'?

Oznaczmy przez T_1 okres podróży, a przez T_2 czas pozornego obiegu słońca naokoło ziemi. Zatem $T_1=n'$ i $T_2=-1$ (gdyż słońce obraca się pozornie dokoła ziemi ze wschodu na zachód t. j. w kierunku przeciwnym do kierunku podróży). Podróżnik przyjmował za dobę pozorną okres czasu między jednym a drugim przejściem słońca przez południk zmienny, na którym się znajdował. Ponieważ w ciągu n dni pozornych było n' dni prawdziwych, więc doba pozorna wynosi n'/n prawdziwych. Stąd $T_{1,2}=n'/n$. Na mocy więc (8)

$$n/n'=1/n'+1 \quad \text{czyli} \quad n'=n-1.$$

Zatem prawdziwych dni upłynęło o 1 mniej niż pozornych.

Gdyby podróżnik szedł ze wschodu na zachód, to (jak łatwo widzieć) prawdziwych dni upłynęłoby o 1 więcej niż pozornych.