II Dynamika punktu nieswobodnego.

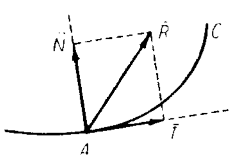
§ 17. Równania ruchu. Dotychczas badaliśmy ruch punktu materialnego *swobodnego*, t. j. takiego, który mógł wykonywać dowolne ruchy przy odpowiednich siłach. Spotykamy się jednak również z zagadnieniami, w których ruchy punktu podlegają pewnym ograniczeniom, takim np., że punkt musi stale pozostawać na pewnej linii, powierzchni i t. p.

Przykład. Wyobraźmy sobie, że drobna kulka nawleczona jest na sztywny drut (np. w kształcie koła). Jakimikolwiek siłami działalibyśmy na kulkę, będzie ona mogła wykonywać jedynie takie ruchy, przy których pozostanie stale na drucie. Zagadnienie sprowadza się więc w tym przypadku do badania ruchu punktu materialnego, który ma pozostawać stale na pewnej linii.

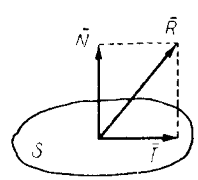
Punkt taki nazywamy *nieswobodnym*, a warunki ograniczające, jakim muszą czynić zadość ruchy punktu nieswobodnego, nazywamy *więzami*.

Reakcja. Przy rozpatrywaniu ruchu punktów nieswobodnych będziemy zakładali, że na punkt nieswobodny działa (oprócz danych sił) pewna dodatkowa siła, która sprawia, że punkt zachowuje więzy. Tę dodatkową siłę nazywamy *reakcją* (oddziaływaniem).

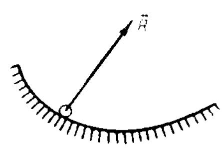
Reakcję przypisujemy działaniu na punkt materialny ciał wywołujących więzy. Reakcją drutu jest więc np. siła, z jaką drut przeciwstawia się porzuceniu go przez nawleczoną na niego kulkę.



1.



2.



3.

Niech punkt materialny nieswobodny A ma pozostawać stale na krzywej C (rys. 1). Niech reakcja w pewnym położeniu punktu A będzie $\bar{R}$. Składową $\bar{N}$ reakcji, prostopadłą do stycznej, nazywamy *reakcją normalną*, składową $\bar{T}$ styczną nazywamy *reakcją styczną* lub *tarciem*.

Podobnie, jeżeli punkt ma pozostawać stale na pewnej powierzchni S (rys. 2), to składową reakcji prostopadłą do powierzchni S nazywamy *reakcją normalną*, składową zaś styczną *reakcją styczną* lub *tarciem*.

Ilekroć więc zakładamy, że nie ma tarcia, to przyjmujemy tym samym, że reakcja jest prostopadła do krzywej (powierzchni). Gdy nie ma tarcia, mówimy też, że krzywa (powierzchnia) jest *gładka.*

Jeżeli o punkcie A, leżącym po pewnej stronie powierzchni, zakładamy tylko, że nie może przejść na drugą jej stronę (choć może porzucić tę powierzchnię), to reakcję uważamy za skierowaną w tę stronę powierzchni, z której znajduje się punkt (str. 123, rys. 3).

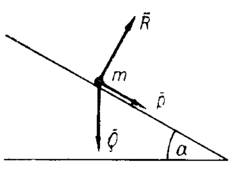
Gdy np. kulka leży na stole, wówczas reakcja stołu skierowana jest ku górze.

Równania ruchu. Reakcję określiliśmy jako siłę dodatkową, która sprawia, że punkt nieswobodny zachowuje więzy. Jeżeli więc do siły działającej $\bar{P}$ dodamy reakcję $\bar{R}$, to będziemy mogli uważać punkt materialny za punkt swobodny. Oznaczając przez m masę, a przez $\bar{p}$ przyśpieszenie punktu, otrzymamy więc

$$m\bar{p}=\bar{P}+\bar{R}. \tag{I}$$

W ten sposób badanie ruchu punktu nieswobodnego sprowadzamy do badania ruchu punktu swobodnego. Jeżeli o reakcji $\bar{R}$ przyjmiemy jeszcze pewne założenia specjalne, np. że nie ma tarcia, to (jak okażemy później) równanie (I) wystarcza do wyznaczenia ruchu.

Przykład. Niech punkt o masie m spada pod wpływem ciężaru $Q=mg$ po płaszczyźnie, nachylonej do poziomu pod kątem α.



Załóżmy, że nie ma tarcia. Reakcja $\bar{R}$ jest zatem prostopadła do płaszczyzny.

Oznaczając przez $\bar{p}$ przyśpieszenie punktu, mamy na mocy (I) $m\bar{p}=\bar{Q}+\bar{R}$. Tworząc rzuty na płaszczyznę pochyłą i kładąc $p=|\bar{p}|$, otrzymamy $mp=mg\sin\alpha$, skąd

$$p=g\sin\alpha.$$

Energia kinetyczna. Przyrost energii kinetycznej punktu nieswobodnego równa się sumie prac siły działającej $\bar{P}$ i reakcji $\bar{R}$. Przy założeniu braku tarcia reakcja jest prostopadła do toru, zatem praca reakcji równa się zeru. Wynika stąd, że gdy nie ma tarcia, przyrost energii kinetycznej równa się jedynie pracy wykonanéj przez siłę $\bar{P}$.

W szczególności, *jeżeli nie ma tarcia, to suma energii kinetycznej i potencjalnej punktu poruszającego się w polu potencjalnym jest stała.*

§ 18. Ruch punktu nieswobodnego po krzywej.

Ruch po krzywej płaskiej. Załóżmy, że punkt A o masie m ma pozostawać na krzywej płaskiej C i że siła $\overline{P}$ działająca na punkt leży w płaszczyźnie krzywej C. Przypuśćmy, że nie ma tarcia, t. zn. że reakcja $\overline{R}$ jest prostopadła do krzywej.

Oznaczając przez $\overline{p}$ przyśpieszenie punktu, mamy więc (por. wzór (I), str. 124)

$$m\overline{p}=\overline{P}+\overline{R}. \tag{1}$$

Nadajmy stycznej t zwrot zgodny ze zwrotem krzywej, a normalnej n zwrot ku środkowi krzywizny (rys. 1). Niechaj p_t, p_n, P_t, P_n będą rzutami przyśpieszenia p i siły $\overline{P}$ na styczną i normalną zaś R rzutem reakcji $\overline{R}$ na normalną. Z równania (1) otrzymamy, tworząc rzuty na styczną i normalną:

$$mp_t=P_t, \qquad mp_n=P_n+R. \tag{2}$$

Niech v oznacza rzut prędkości na styczną, zaś ϱ promień krzywizny. Wówczas (str. 41):

$$p_t=\dot{v}, \qquad p_n=v^2/\varrho,$$

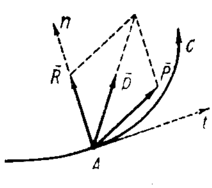
skąd na mocy (2):

$$m\dot{v}=P_t, \qquad mv^2/\varrho=P_n+R. \tag{I}$$

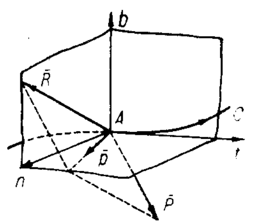
Pierwsze z równań (I) pozwala wyznaczyć ruch, znając siłę $\overline{P}$ lub jej rzut P_t. Równanie to możemy także napisać w innej jeszcze postaci, mianowicie:

$$m\ddot{s}=P_t, \tag{3}$$

gdzie s oznacza współrzędną łukową na krzywej C.



1.



2.

Drugie z równań (I) pozwala obliczyć reakcję $\overline{R}$, znając prędkość v.

Ruch po krzywej przestrzennej. Załóżmy, że tor jest krzywą przestrzenną C i że nie ma tarcia.

Nadajmy stycznej t zwrot zgodny ze zwrotem krzywej, normalnej głównej n zwrot ku środkowi krzywizny, wreszcie binormalnej b zwrot taki, by układ (t, n, b) miał zwrot zgodny z układem współrzędnych (rys. 2).

Utwórzmy rzuty na styczną, na normalną główną i na binormalną. Ponieważ rzut przyśpieszenia na binormalną (str. 42) i rzut $\bar{R}$ na styczną są zerami, więc otrzymamy z równania $m\bar{p}=\bar{P}+\bar{R}$:

$$mp_t=P_t, \qquad mp_n=P_n+R_n, \qquad 0=P_b+R_b,$$

skąd

(II) $$m\dot{v}=P_t, \qquad mv^2/\varrho=P_n+R_n, \qquad P_b+R_b=0.$$

Pierwsze z równań (II) pozwala wyznaczyć ruch, z dwóch zaś pozostałych równań (II) możemy obliczyć składowe R_n i R_b, a więc reakcję $\bar{R}$.

Ruch punktu nieswobodnego ciężkiego. Niech na punkt materialny nieswobodny o masie m działa siła ciężkości. Załóżmy, że nie ma tarcia. Potencjał siły ciężkości wynosi $V=-mgz$ (oś z skierowana pionowo w górę). Na mocy zasady zachowania energii całkowitej otrzymamy więc $\frac{1}{2}mv^2+mgz=\text{const.}$ lub po uproszczeniu

(III) $$v^2+2gz=h.$$

Stałą h możemy wyznaczyć, znając prędkość v_0 i współrzędną z_0 w pewnej chwili t_0. Dostaniemy

(4) $$h=v_0^2+2gz_0, \qquad \text{skąd} \qquad v^2+2gz=v_0^2+2gz_0.$$

Z (III) wynika $2gz\leqslant h$, zatem $z\leqslant h/2g$. Maksymalna więc wysokość, na jaką punkt może się wznieść, wynosi

(5) $$z_{\max}=\frac{1}{2g}h=\frac{1}{2g}v_0^2+z_0.$$

Jeżeli punkt w ciągu ruchu znajduje się kilka razy na tym samym poziomie $z=z'$, wówczas na mocy (III) mamy $v^2=h-2gz'$.

A więc: *na jednym i tym samym poziomie punkt ma jedną i tę samą prędkość.*

Przykład 1. Punkt spada po krzywej C o równaniu $z=f(x)$, położonej w płaszczyźnie pionowej xz. Załóżmy, że w czasie $t=0$ punkt znajduje się w punkcie $A(x_0, z_0)$ i ma prędkość $\bar{v}_0=0$.

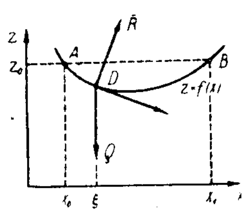
Oznaczając przez s współrzędną łukową, dostaniemy więc na mocy (4), z uwagi na to, że $v=\dot{s}$,

$$\dot{s}^2+2gz=2gz_0 \qquad \text{czyli} \qquad \dot{s}^2=2g(z_0-z).$$

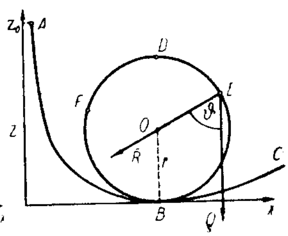
Obierzmy na krzywej C zwrot zgodny z początkowym ruchem punktu (t. j. zwrot ku dołowi). Aż do chwili, gdy punkt materialny dojdzie do punktu B, położonego na tej samej wysokości co punkt A (rys. 1), mamy $\dot{s}=\sqrt{2g(z_0-z)}$, więc $ds\sqrt{2g(z_0-z)}=dt$. Ponieważ $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}dx$, więc

$$(6)\qquad \int\limits_{x_0}^{\xi}\sqrt{\frac{1+f'^2(x)}{2g(f(x_0)-f(x))}}\,dx=t.$$

Wzór powyższy podaje czas, w którym punkt materialny osiągnie punkt D o współrzędnych $x=\xi$, $y=f(\xi)$. Jeżeli x_1 oznacza odciętą punktu B, to dla $x_0\leqslant\xi<x_1$ całka (6) ma wartość skończoną, więc czas t jest skończony. Dla $\xi=x_1$ funkcja podcałkowa staje się nieskończoną, bo z założenia $z_0=f(x_0)=f(x_1)$. W tym przypadku wartość całki może być więc skończona lub nieskończona. Wynika stąd, że punkt materialny może dojść do punktu B lub nie: zależeć to będzie od kształtu krzywej C. Łatwo okazać, że jeżeli styczna w punkcie B nie jest pozioma (t. zn. jeżeli $f'(x_1)\neq 0$), wówczas wartość całki (6) jest skończona, więc punkt materialny osiągnie punkt B.



1.



2.

Przykład 2. Niech punkt zsuwa się w płaszczyźnie pionowej po krzywej C, której część $BEDF$ jest kołem o środku O i promieniu r. Załóżmy, że nie ma tarcia. Załóżmy też, że punkt nie musi stale pozostawać na krzywej C, byleby tylko nie przeszedł na drugą jej stronę; reakcja będzie więc skierowana w tę stronę, po której punkt się znajduje (rys. 2).

Zapytajmy się, z jakiej wysokości z_0 należy punkt opuścić bez prędkości początkowej, ażeby obiegł okrąg koła $BEDF$.

Obierzmy na kole punkt E dowolnie. Oznaczmy przez v prędkość punktu w E, przez ϑ kąt, jaki tworzy z pionem promień OE. Zatem na mocy (I), str. 125, jest $mv^2/r=mg\cos\vartheta+R$, czyli

$$R=\frac{m}{r}(v^2-gr\cos\vartheta).$$

Ponieważ $R\geqslant 0$ (gdyż reakcja musi być skierowana w stronę punktu, t. j. ku środkowi koła), więc

$$(7)\qquad v^2-gr\cos\vartheta\geqslant 0.$$

Ponieważ punkt opuścił wysokość z_0 bez prędkości początkowej, więc oznaczając przez z współrzędną punktu E, będziemy mieli $v^2+2gz=2gz_0$. Wyznaczając stąd v^2 i wstawiając w (7), otrzymamy $2gz_0-2gz-gr\cos\vartheta\geqslant 0$, skąd

(8) $$z_0\geqslant z+\tfrac{1}{2}r\cos\vartheta.$$

Nierówność (8) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, jaki musi spełniać wysokość z_0, aby punkt obiegł okrąg $BDEF$. Prawa strona tej nierówności osiąga maksymalną wartość w najwyższym punkcie koła, w którym $z=2r$ i $\vartheta=0$. Wstawiając te wartości w (8), dostaniemy

$$z_0\geqslant 5r/2.$$

Jeżeli więc spuścimy punkt materialny z wysokości $z_0\geqslant 5r/2$, to punkt obiegnie koło.

Jeżeli zaś $z_0<5r/2$, to w pewnym punkcie koła nasz punkt materialny opuści koło, mianowicie w tym punkcie, w którym, $z_0=z+\frac{1}{2}r\cos\vartheta$. Gdyby bowiem dalej poruszał się po kole, to, jak łatwo stwierdzić, mielibyśmy $R<0$, co jest niemożliwe, gdyż to by oznaczało, że punkt jest przyciskany do krzywej. Po opuszczeniu koła punkt będzie spadał oczywiście tylko pod wpływem swego ciężaru.

Przykład 3. Punkt o masie m porusza się pod działaniem siły ciężkości po linii śrubowej

(9) $$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,\qquad z=k\varphi.$$

Mamy

$$\dot{x}=-r\dot{\varphi}\sin\varphi,\quad \dot{y}=r\dot{\varphi}\cos\varphi\quad\text{i}\quad \dot{z}=k\dot{\varphi},$$

więc $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=(r^2+k^2)\dot{\varphi}^2$, skąd na mocy (III), str. 126, otrzymujemy $(r^2+k^2)\dot{\varphi}^2+2gk\varphi=h$, a zatem $dt/d\varphi=\pm\sqrt{(r^2+k^2)}/\sqrt{(h-2gk\varphi)}$ i wreszcie

$$t=\pm\frac{1}{gk}\sqrt{r^2+k^2}\sqrt{h-2gk\varphi}+c.$$

Znak po prawej stronie i stała c zależą od warunków początkowych. Wyrażając φ przez t i wstawiając w (9), otrzymamy równania ruchu.

§ 19. Ruch punktu nieswobodnego po powierzchni. Niech na punkt materialny o masie m działa siła $\bar{P}$. Załóżmy, że punkt ma pozostawać stale na powierzchni S o równaniu

(1) $$F(x, y, z)=0$$

i że nie ma tarcia. Reakcja $\bar{R}$ jest więc prostopadła do S. Z geometrii różniczkowej wiadomo, że współczynniki kierunkowe normalnej do powierzchni są proporcjonalne do pochodnych cząstkowych $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$. Ponieważ reakcja $\bar{R}$ ma kierunek normalnej, więc:

(2) $$R_x=\lambda\,\partial F/\partial x, \qquad R_y=\lambda\,\partial F/\partial y, \qquad R_z=\lambda\,\partial F/\partial z,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności zależnym od czasu. Zatem $\lambda=\lambda(t)$.

Z równania $m\bar{p}=\bar{P}+\bar{R}$ otrzymamy na mocy (2):

(I) $$m\ddot{x}=P_x+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad m\ddot{y}=P_y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad m\ddot{z}=P_z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Równania (1) i (I) wyznaczają łącznie nieznane funkcje czasu $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$ i $\lambda=\lambda(t)$. Po wyznaczeniu tych funkcyj możemy reakcję $\bar{R}$ obliczyć z równań (2).

Przykład 1. Punkt ciężki o masie m porusza się po powierzchni walca kołowego (oś z skierowana pionowo w górę)

$$x^2+y^2=r^2.$$

Mamy tutaj $F(x, y, z)\equiv x^2+y^2-r^2=0$, $P_x=0$, $P_y=0$ i $P_z=-mg$, więc na mocy (I):

(3) $$m\ddot{x}=2\lambda x, \qquad m\ddot{y}=2\lambda y, \qquad m\ddot{z}=-mg.$$

Trzecie z równań (3) daje po scałkowaniu

(4) $$z=-\tfrac{1}{2}gt^2+at+b,$$

gdzie a i b są stałe. Przyjmijmy warunki początkowe dla $t=0$:

(5) $$x_0=r, \quad y_0=0, \quad z_0=0, \quad \dot{x}_0=0, \quad \dot{y}_0=u, \quad \dot{z}_0=w,$$

gdzie u i w oznaczają pewne stałe ($\dot{x}_0=0$, gdyż w chwili $t=0$ prędkość $\bar{v}_0$ jest styczna do walca, więc prostopadła do osi x). Na mocy (4) i (5) dostajemy $b=0$ i $a=w$, zatem

(6) $$z=-\tfrac{1}{2}gt^2+wt.$$

Ponieważ $v^2+2gz=v_0^2+2gz_0$, więc $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+2gz=u^2+w^2$, skąd na mocy (6) $\dot{x}^2+\dot{y}^2+(-gt+w)^2-g^2t^2+2wgt=u^2+w^2$, a zatem

(7) $$\dot{x}^2+\dot{y}^2=u^2.$$

A więc rzut punktu na płaszczyznę poziomą porusza się po kole $x^2+y^2=r^2$ z prędkością stałą u; prędkość kątowa wynosi więc $\omega=u/r$. Stąd $x=r\cos(ut/r+\varphi_0)$ i $y=r\sin(ut/r+\varphi_0)$. Ponieważ dla $t=0$ jest według (5) $x_0=r$ i $y_0=0$, więc możemy przyjąć $\varphi_0=0$. Dostaniemy zatem:

$$x=r\cos\frac{u}{r}t, \qquad y=r\sin\frac{u}{r}t. \tag{8}$$

Równania (6) i (8) określają ruch punktu. Czynnik λ otrzymamy z równań (3), wstawiając zamiast $\ddot{x}$ i x wartości z (8). Dostaniemy $\lambda=-mu^2/2r^2$, skąd na mocy (2):

$$R_x=-\frac{mu^2}{r^2}x, \qquad R_y=-\frac{mu^2}{r^2}y, \qquad R_z=0$$

i wreszcie

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\frac{mu^2}{r^2}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{mu^2}{r}.$$

A więc: reakcja jest stała co do wielkości i zawsze prostopadła do osi walca.

Przykład 2. Punkt o masie m porusza się pod działaniem siły ciężkości po kuli (oś z skierowana pionowo w górę)

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0. \tag{9}$$

Na mocy więc (I), str. 129:

$$m\ddot{x}=2\lambda x, \qquad m\ddot{y}=2\lambda y, \qquad m\ddot{z}=2\lambda z-mg. \tag{10}$$

Równania (10) nie dadzą się rozwiązać przy pomocy funkcyj elementarnych. Możemy jednak wyprowadzić pewne wnioski, nie rozwiązując tych równań.

Zauważmy, że reakcja $\bar{R}$ jest stale skierowana ku środkowi kuli, a więc, że jej rzut $\bar{R}'$ na płaszczyznę poziomą jest stale skierowany ku początkowi O układu. Rzut $\bar{R}'$ jest więc siłą środkową.

Ponieważ rzut siły ciężkości na płaszczyznę poziomą jest zerem, więc oznaczając przez $\bar{p}'$ rzut przyśpieszenia punktu na płaszczyznę poziomą, otrzymamy $m\bar{p}'=\bar{R}'$.

Wynika stąd (str. 86), że ruch rzutu będzie ruchem środkowym. Tor rzutu będzie więc albo linią prostą l, przechodzącą przez początek O, albo krzywą C, która nigdy przez początek nie przejdzie (str. 87).

W przypadku pierwszym ruch samego punktu będzie odbywał się w płaszczyźnie pionowej, której śladem jest l; punkt będzie więc poruszał się po południku. Przypadek ten zajdzie, jeżeli punktowi nadamy prędkość początkową styczną do południka, wtedy bowiem rzut prędkości (na płaszczyznę xy) będzie skierowany ku początkowi O, prędkość polowa rzutu będzie zerem i tor rzutu będzie linią prostą przechodzącą przez środek O.

W przypadku drugim, gdy tor rzutu jest krzywą C nigdy nie przechodzącą przez O, będziemy mieli, oznaczając przez r_0 i r_1 najmniejszą i największą odległość rzutu od O, $r_0^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant r_1^2$.

Na mocy (9) jest $z^2 = r^2-(x^2+y^2)$, więc $r^2-r_1^2 \leqslant z^2 \leqslant r^2-r_0^2$ czyli

$$\sqrt{r^2-r_1^2} \leqslant |z| \leqslant \sqrt{r^2-r_0^2}.$$

Wynika stąd, że punkt będzie krążył po kuli między dwiema płaszczyznami poziomymi. Przypadek ten zajdzie, jeżeli prędkość początkowa $\bar{v}_0$ punktu nie będzie styczna do południka; wtedy bowiem rzut prędkości $\bar{v}_0$ na płaszczyznę xy nie będzie skierowany ku O i prędkość polowa rzutu będzie różna od zera.

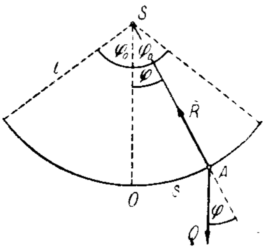
§ **20. Wahadło matematyczne.** *Wahadłem matematycznym* nazywamy punkt materialny m zawieszony w polu ciężkości na nici niematerialnej i nierozciągliwej, utwierdzonej jednym końcem w punkcie S.

Nić działa na punkt materialny tylko wówczas, gdy jest napięta; reakcja $\bar{R}$ jest skierowana wzdłuż nici ku punktowi S. Odległość punktu m od punktu S jest stale niewiększa od długości nici l. Punkt może się zatem poruszać wewnątrz i na powierzchni kuli K o środku S i promieniu l.

Jeżeli przy napiętej nici, tworzącej z pionem SO kąt $<\pi/2$ puścimy wolno punkt m (t. j. bez prędkości początkowej), to punkt będzie się poruszał w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez S, po kole o środku O i promieniu l.

Przyjąwszy na kole dowolny zwrot, oznaczmy położenie punktu A (leżącego na dolnej połowie koła) przy pomocy współrzędnej łukowej s, liczonej od najniższego punktu koła O. Oznaczmy przez φ kąt między OS i OA, przyczem znak kąta φ niechaj będzie zgodny ze zwrotem łuku OA. Zatem

$$s = l\varphi. \tag{1}$$



Tworząc rzuty siły ciężkości i reakcji $\bar{R}$ na styczną w punkcie A, otrzymamy $m\ddot{s} = -mg\sin\varphi$, a ponieważ na mocy (1) jest $\ddot{s} = l\ddot{\varphi}$, więc $ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$, a więc

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi\,. \tag{I}$$

Przyjmijmy, że w chwili początkowej $t=0$ mieliśmy $\varphi=\varphi_0>0$. W ciągu całego ruchu będzie oczywiście $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, gdyż punkt nie może się wznieść do położenia wyższego niż początkowe.

Jeżeli φ_0 jest dość małe, wówczas z wielkim przybliżeniem możemy przyjąć $\varphi = \sin\varphi$. Zatem na mocy (I) otrzymamy $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$, a ponieważ według (1) jest $\varphi = s/l$, więc

$$\ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0. \tag{2}$$

Porównując równanie (2) z równaniem ruchu harmonicznego (str. 112), widzimy, że punkt będzie poruszał się ruchem harmonicznym. Okres ruchu w myśl (5), str. 112, i z uwagi, że $k = \sqrt{g/l}$, wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \tag{3}$$

Wzór (3) jest wzorem przybliżonym, wyprowadzonym przy założeniu, że kąt φ_0 jest mały. Ciekawem jest, że *okres T nie zależy od kąta wychylenia φ_0*.

Odrzućmy teraz założenie, że kąt φ_0 jest mały. Pomnóżmy obie strony równania (I) przez $\dot{\varphi}$ i scałkujmy. Otrzymamy:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l}\cos\varphi + c. \tag{4}$$

Dla $t=0$ jest $\varphi=\varphi_0$ i $\dot{s}=0$; zatem na mocy (1) jest $\dot{\varphi}=0$. Z równania (4) dla $t=0$ dostaniemy $0 = \frac{g}{l}\cos\varphi_0 + c$ czyli $c = -\frac{g}{l}\cos\varphi_0$, a więc $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$ czyli

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}. \tag{5}$$

Przypuśćmy, że badamy ruch punktu od chwili początkowej $t=0$ do chwili, w której osiągnął on to samo wzniesienie po przeciwnej stronie prostej OS. Zatem $\dot{\varphi} \leqslant 0$, a więc wobec (5) będzie

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}, \quad \text{skąd} \quad -\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = dt.$$

Oznaczając przez T okres wahania, otrzymamy

$$-\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\varphi_0}^{-\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \frac{1}{2}T,$$

zatem

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_{0}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}. \tag{6}$$

Wprowadźmy nową zmienną u, podstawiając $\sin\frac{1}{2}\varphi = \sin u \sin\frac{1}{2}\varphi_0$. Ponieważ $\cos\varphi - \cos\varphi_0 = 2(\sin^2\frac{1}{2}\varphi_0 - \sin^2\frac{1}{2}\varphi)$, otrzymamy

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 u \sin^2\frac{1}{2}\varphi_0}}. \tag{7}$$

Obliczając całkę przy pomocy rozwinięcia w szereg[1]), dostaniemy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right) + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right) + \dots\right].$$

Dla małych φ_0 otrzymujemy wzór (3), pomijając wyrazy szeregu począwszy od drugiego.

§ 21. Równowaga punktu nieswobodnego. Jeżeli punkt nieswobodny jest w równowadze, znaczy to, że siła działająca $\bar{P}$ równoważy się z reakcją $\bar{R}$. Zatem

$$\bar{P} + \bar{R} = 0. \tag{I}$$

Równanie powyższe przedstawia *warunek konieczny równowagi*.

Gdy punkt ma pozostawać na powierzchni i nie ma tarcia, to — jak wiemy — reakcja jest prostopadła do powierzchni. W przypadku więc równowagi siła działająca $\bar{P}$ musi być również prostopadła do powierzchni.

Na odwrót, jeżeli w pewnej chwili t siła $\bar{P}$ jest prostopadła do powierzchni S, a punkt ma prędkość $\bar{v} = 0$, wówczas $\bar{P} + \bar{R} = 0$,

[1]) Por. S. Banach, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, T. II, Lwów, str. 110.

czyli punkt pozostanie w spoczynku. Przypuśćmy bowiem, że $\overline{P}+\overline{R}\neq 0$; punkt posuwałby się więc po pewnej krzywej C, położonej na powierzchni S. Zauważmy, że w chwili t przyśpieszenie normalne jest $p_n=v^2/\varrho=0$. Z równania $m\overline{p}=\overline{P}+\overline{R}$, tworząc rzuty na styczną do C, otrzymamy $mp_t=0$, gdyż $\overline{P}$ i $\overline{R}$ są prostopadłe do stycznej. Ponieważ $p_n=0$ i $p_t=0$, więc $\overline{p}=0$. Zatem byłoby $\overline{P}+\overline{R}=m\overline{p}=0$ wbrew założeniu.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi punktu nieswobodnego, mającego pozostawać (bez tarcia) na pewnej powierzchni, jest to, by siła działająca $\overline{P}$ była prostopadła do powierzchni.*

To samo odnosi się do linii krzywej.

Równowaga stała. Równowagę stałą określamy dla punktu nieswobodnego podobnie jak dla punktu swobodnego (str. 120), z tą różnicą, że wychylenie z położenia równowagi ma być zgodne z więzami. Punkt będzie więc w *równowadze stałej*, jeżeli przy małym (i zgodnym z więzami) wychyleniu z położenia równowagi i przy małej energii kinetycznej początkowej punkt ten będzie poruszał się stale w pobliżu położenia równowagi i stale z małą energią kinetyczną.

Równowaga w polu potencjalnym. Niech w polu sił potencjalnym punkt materialny ma pozostawać na pewnej powierzchni S o równaniu $F(x,y,z)=0$. Załóżmy, że nie ma tarcia.

Jeżeli w pewnym punkcie $A(x, y, z)$ powierzchni S potencjał V osiąga ekstremum ze względu na punkty tej powierzchni, to punkt A jest położeniem równowagi.

W punkcie A występuje bowiem ekstremum funkcji V z warunkiem ubocznym $F(x,y,z)=0$. Na mocy więc twierdzenia z teorii maximów i minimów istnieje taka liczba λ, że:

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

Zatem $P_x+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $P_y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}=0$, $P_z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}=0$. Ponieważ zaś $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ są proporcjonalne do współczynników kierunkowych normalnej w A, więc siła $\overline{P}$ ma kierunek normalnej, czyli punkt A jest istotnie położeniem równowagi.

Jeżeli w A występuje maximum właściwe potencjału ze względu na punkty powierzchni S, to punkt A jest położeniem równowagi stałej.

Dowód przebiega podobnie jak na str. 121.

Uwagi powyższe odnoszą się również do przypadku, gdy punkt materialny ma pozostawać na krzywej.

Niech np. punkt ma pozostawać w polu siły ciężkości na powierzchni S o równaniu $z=f(x,y)$ (oś z skierowana pionowo do góry). Położeniami równowagi są te punkty, w których siła ciężkości jest prostopadła do powierzchni, t. j. w których płaszczyzna styczna jest pozioma. Mogą to być punkty najwyższe lub najniższe (ze względu na otoczenie) lub t. zw. punkty siodłowe. Maximum właściwe potencjału $V=-mgz$ występuje w tych punktach, w których funkcja $z=f(x,y)$ osiąga minimum właściwe. W punktach najniższych występuje więc równowaga stała. Punkty A, B są tedy położeniami równowagi stałej; punkt zaś C położeniem równowagi niestałej (p. rysunek).

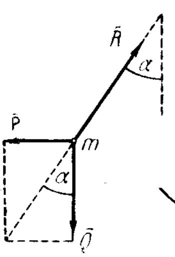
Jeżeli punkt wychylimy z położenia A, np. do A', i nadamy mu małą prędkość, to będzie on krążył w zagłębieniu koło punktu A z małą prędkością. Jeżeli natomiast punkt wychylimy z położenia C (choćby nieznacznie nawet) do położenia C', to oczywiście oddali się on od C pod wpływem ciężaru.

Przykład 1. Punkt materialny ciężki, zawieszony na nici tworzącej z pionem kąt α, jest w równowadze pod wpływem siły poziomej $\bar{P}$ (rys. 1). Na punkt działa reakcja nici $\bar{R}$ skierowana wzdłuż nici (ku punktowi zawieszenia), ciężar $\bar{Q}$ i siła $\bar{P}$. Zatem

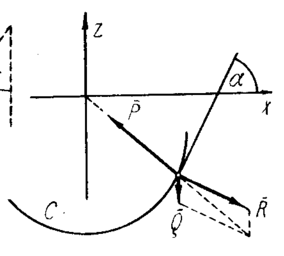
$$\bar{R}+\bar{Q}+\bar{P}=0.$$

Kładąc $|\bar{R}|=R$, $|\bar{P}|=P$ i $|\bar{Q}|=mg$, otrzymujemy z trójkąta utworzonego przez siły $\bar{R}$, $\bar{Q}$ i $\bar{P}$

$$P=mg\,\mathrm{tg}\,\alpha, \qquad R=mg/\cos\alpha.$$



1.



2.

Przykład 2. Na krzywej C o równaniu $z=f(x)$, leżącej w płaszczyźnie xz, znajduje się punkt ciężki, przyciągany ku początkowi układu O z siłą $\bar{P}$, o wielkości proporcjonalnej do odległości punktu od O. W jakim położeniu punkt będzie w równowadze, przy założeniu, że nie ma tarcia?

W położeniu równowagi siła $\bar{P}$, ciężar $\bar{Q}$ i reakcja $\bar{R}$ równoważą się (rys. 2), więc

$$\bar{P}+\bar{Q}+\bar{R}=0. \tag{1}$$

Rzuty siły $\bar{P}$ na osie układu wynoszą:

$$P_x=-\lambda^2 x, \qquad P_z=-\lambda^2 z, \tag{2}$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Niechaj α oznacza kąt, jaki w położeniu równowagi styczna tworzy z osią x. Rzutując na styczną, otrzymamy z (1) i (2) $-\lambda^2 x\cos\alpha-\lambda^2 z\sin\alpha-mg\sin\alpha=0$. Dzieląc przez $\cos\alpha$, dostaniemy z uwagi na to, że $\operatorname{tg}\alpha=z'$

$$\lambda^2 x+\lambda^2 zz'+mgz'=0. \tag{3}$$

Znając funkcję $z=f(x)$, możemy z równania (3) wyznaczyć współrzędną x położenia równowagi.

Jeżeli np. krzywa C jest parabolą $z=x^2-a$, to na mocy (3) mamy $\lambda^2 x+2\lambda^2(x^2-a)x+2mgx=0$, skąd

$$x_1=0 \quad \text{i} \quad x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{\lambda^2(2a-1)-2mg}{2\lambda^2}}.$$

Rozwiązania $x_{2,3}$ istnieją przy założeniu, że wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie.

Zapytajmy teraz: *jaka to jest krzywa, na której punkt jest w każdym położeniu w równowadze?*

Dla krzywej tej równanie (3) musi być spełnione tożsamościowo. Całkując je, otrzymamy $\frac{1}{2}\lambda^2 x^2+\frac{1}{2}\lambda^2 z^2+mgz=\text{const.}$, skąd

$$x^2+\left(z+\frac{mg}{\lambda^2}\right)^2=\text{const.}$$

Krzywą taką jest więc dowolne koło o środku w punkcie $(0,-mg/\lambda^2)$.