

III. Dynamika ruchu względnego.

§ 22. Prawa ruchu. Przypuśćmy, że badamy ruch punktu materialnego w układzie (x, y, z) , poruszającym się względem układu inercjalnego. Uważając układ inercjalny (p. str. 70) za stały, zaś układ (x, y, z) za ruchomy, otrzymamy (str. 61):

$$(1) \quad \bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_u + \bar{p}_c \quad \text{czyli} \quad \bar{p}_w = \bar{p}_b - \bar{p}_u - \bar{p}_c,$$

gdzie $\bar{p}_b, \bar{p}_w, \bar{p}_u, \bar{p}_c$ oznaczają przyśpieszenia: bezwzględne, względne, unoszenia i Coriolisa. Mnożąc (1) obustronnie przez masę m danego punktu, dostaniemy

$$(2) \quad m\bar{p}_w = m\bar{p}_b - m\bar{p}_u - m\bar{p}_c.$$

Położmy:

$$(I) \quad \bar{P}_b = m\bar{p}_b, \quad \bar{P}_u = -m\bar{p}_u, \quad \bar{P}_c = -m\bar{p}_c.$$

Ponieważ \bar{p}_b jest przyśpieszeniem punktu względem układu inercjalnego, więc \bar{P}_b jest wedle prawa Newtona siłą działającą na dany punkt materialny; nazywamy ją *siłą bezwzględną*. Wektor \bar{P}_u nazywamy *siłą unoszenia* lub *siłą odśrodkową*, a wektor \bar{P}_c siłą *Coriolisa* lub *siłą odśrodkową złożoną*.

Należy zwrócić uwagę na to, że wektory $-mp_u$ i $-mp_c$ nie przedstawiają żadnych sił, lecz nazwaliśmy je tylko ze względów praktycznych siłami unoszenia i Coriolisa.

Na mocy (2) i (I) jest

$$(II) \quad m\bar{p}_w = \bar{P}_b + \bar{P}_u + \bar{P}_c.$$

Według prawa Newtona mamy w układzie inercjalnym $mp = \bar{P}$; widzimy, że równanie (II) ma postać podobną.

A więc: *prawa ruchu w układzie ruchomym współrzędnych są takie, jak gdyby układ był układem inercjalnym, pod warunkiem jednak, że do sił działających dodamy siłę unoszenia i siłę Coriolisa.*

Sumę sił: bezwzględnej, unoszenia i Coriolisa nazywamy *siłą względną* i oznaczamy przez \bar{P}_w .

Zatem

$$(3) \quad \bar{P}_w = \bar{P}_b + \bar{P}_u + \bar{P}_c.$$

Równanie (II) możemy więc napisać w postaci

$$(III) \quad m\bar{p}_w = \bar{P}_w.$$

Obserwator, będący w spoczynku względem układu ruchomego i przyjmujący go za układ inercjalny, będzie sądził, że siłą działającą na punkt materialny jest właśnie siła względna \bar{P}_w . Jeżeli układ rozpoczął ruch w pewnej chwili t_0 , to obserwatorowi będzie się wydawało, że oprócz siły \bar{P}_b , działającej poprzednio, zaczęła działać od chwili t_0 nowa siła $\bar{P}_u + \bar{P}_C$. Np. człowiek jadący na karuzeli sądzi, że oprócz siły ciężkości działa na niego jeszcze nowa siła, skierowana od środka ruchu i starająca się zrzucić go z karuzeli (siła odśrodkowa). Dla obserwatora zaś będącego w spoczynku względem układu inercjalnego siły unoszenia i Coriolisa oczywiście nie istnieją.

Jeżeli układ ruchomy porusza się względem pewnego układu inercjalnego ruchem postępowym z prędkością stałą, to $\bar{p}_u = 0$ i $\bar{p}_C = 0$ (p. str. 62); wobec tego $\bar{P}_u = 0$ i $\bar{P}_C = 0$ i na mocy (II)

$$m\bar{p}_w = \bar{P}_b.$$

Do takiego układu ruchomego stosują się zatem prawa Newtona.

A więc: każdy układ współrzędnych, który porusza się względem układu inercjalnego ruchem postępowym z prędkością stałą, jest również układem inercjalnym.

Widzimy stąd, że prawa mechaniki nigdy nie pozwolą rozstrzygnąć, czy dany układ inercjalny jest w spoczynku czy nie.

Jeżeli ruch punktu materialnego badamy w pewnym układzie odniesienia (x, y, z) , to z równania (III) możemy otrzymać siłę względną \bar{P}_w . Jeżeli znamy przytem skądinąd siłę bezwzględną \bar{P}_b i zauważymy, że $\bar{P}_b \neq \bar{P}_w$, to wówczas będziemy mogli stwierdzić, że układ (x, y, z) nie jest układem inercjalnym, więc że porusza się względem każdego układu inercjalnego.

§ 23. Przykłady ruchu. Ruch postępowy układu.

Gdy układ porusza się ruchem postępowym, przyspieszenie Coriolisa jest $\bar{p}_C = 0$ (str. 62), więc siła Coriolisa $\bar{P}_C = 0$. Przyspieszenie unoszenia jest dla wszystkich punktów stałe i równa się przyspieszeniu początku układu (względem układu inercjalnego). Zatem siła unoszenia jest stałą. Wynika stąd, że siła unoszenia tworzy pole potencjalne (str. 102). Na mocy (II), str. 137, mamy wówczas

$$(I) \quad m\bar{p}_w = \bar{P}_b + \bar{P}_u.$$

Przykład 1. Płaszczyzna pochyła porusza się ze stałym przyspieszeniem poziomym \bar{a} . Na płaszczyźnie pochyłej znajduje się punkt ciężki o masie m . Tarcia nie uwzględniamy. Jakie przyspieszenie względem płaszczyzny pochyłej będzie miał punkt m ?

Siłami bezwzględnyymi są: ciężar \bar{Q} i reakcja \bar{R} , prostopadła do płaszczyzny pochyłej. Siła unoszenia wynosi $-m\bar{a}$. Obierzmy za oś x -ów prostą przecięcia płaszczyzny pochyłej z płaszczyzną pionową, przechodzącą przez m , i nadajmy jej zwrot ku dołowi (rys. 1). Oznaczając przez a kąt, jaki płaszczyzna pochyła tworzy z poziomem, i tworząc rzuty na oś x -ów, otrzymamy z (I)

$$(1) \quad p = g \sin a - a \cos a,$$

gdzie $p = p_{w_x}$, zaś $a = |\bar{a}|$. Widzimy stąd, że $p > 0$ lub $p < 0$, zależnie od tego czy $a < g \operatorname{tg} a$ czy $a > g \operatorname{tg} a$.

Przykład 2. Układ (x, y, z) porusza się w polu siły ciężkości ruchem postępowym ze stałym przyspieszeniem poziomym \bar{a} . Przyjmijmy, że oś z skierowana jest pionowo w górę, zaś oś x ma kierunek przyspieszenia \bar{a} , zwrot zaś przeciwny.

Siła unoszenia jest $\bar{P}_u = -m\bar{a}$; kładąc $a = |\bar{a}|$ otrzymamy $P_{u_x} = ma$, $P_{u_y} = 0$ i $P_{u_z} = 0$. Łatwo zauważyć, że siła unoszenia wytwarza pole potencjalne o potencjale $V_u = max$; potencjał siły ciężkości wynosi $V_g = -mgz$. Siła względna wytwarza więc pole o potencjale

$$(2) \quad V = max - mgz.$$

Jeżeli na punkt materialny działa tylko siła ciężkości \bar{Q} , to stosując zasadę zachowania energii całkowitej i kładąc $v = |\bar{v}_w|$, otrzymamy na mocy (2) $\frac{1}{2}mv^2 - V = \text{const.}$ czyli

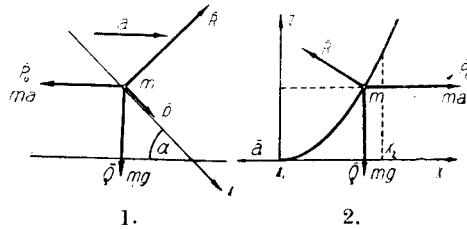
$$(3) \quad v^2 - 2ax + 2gz = h,$$

gdzie h jest pewną stałą.

Przypuśćmy teraz, że badamy ruch punktu nieswobodnego, mającego pozostawać na krzywej leżącej w płaszczyźnie xz o równaniu $z = x^2$ (rys. 2).

Zakładmy, że dla $t=0$ jest $x=0$ i $v=0$. Jeżeli nie uwzględniamy tarcia, to reakcja jest prostopadła do toru i nie wykonuje pracy. Do ruchu stosuje się więc wzór (3). Z warunków początkowych wynika, że $h=0$, więc $v^2 - 2ax + 2gx^2 = 0$ czyli

$$(4) \quad v^2 = 2x(a - gx).$$



Ponieważ $v^2 \geq 0$, więc $2x(a - gx) \geq 0$; wynika stąd, że $0 \leq x \leq a/g$. Ruch odbywać się więc będzie po łuku zawartym między odciętymi $x_1 = 0$ a $x_2 = a/g$. Ponieważ $v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \dot{x} \sqrt{1 + 4x^2}$, więc na mocy (4) będzie $\dot{x}^2(1 + 4x^2) = 2x(a - gx)$, skąd $\int \sqrt{\frac{1 + 4x^2}{2x(a - gx)}} dx = dt$, a więc

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1 + 4x^2}{2x(a - gx)}} dx = t.$$

Wzór powyższy ważny jest od chwili $t = 0$ aż do chwili gdy punkt osiągnie odciętą $x_2 = a/g$. Dla $x_2 = a/g$ na mocy (4) mamy $v = 0$. Następnie odbywać się będzie ruch powrotny aż do chwili, gdy punkt osiągnie odciętą $x = 0$ i t. d.

Ruch obrotowy układu. Niech układ (x, y, z) obraca się około osi z z prędkością kątową ω stałą. Przyspieszenie unoszenia ma rzuty:

$p_{u_x} = -x\omega^2$, $p_{u_y} = -y\omega^2$ i $p_{u_z} = 0$. Zatem dla siły unoszenia mamy:

$$P_{u_x} = mx\omega^2, \quad P_{u_y} = my\omega^2, \quad P_{u_z} = 0.$$

Łatwo zauważyć, że siła unoszenia wytwarza pole o potencjale

$$(5) \quad V = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Przyspieszenie Coriolisa będzie $p_C = 2\bar{v}_w \times \bar{\omega}$ (str. 63). Ponieważ rzuty prędkości względnej na osie x, y, z wynoszą $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, zaś $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$ i $\omega_z = \omega$, więc będzie $p_{C_x} = 2\dot{y}\omega$, $p_{C_y} = -2\dot{x}\omega$ i $p_{C_z} = 0$, skąd

$$P_{C_x} = -2m\dot{y}\omega, \quad P_{C_y} = 2m\dot{x}\omega, \quad P_{C_z} = 0.$$

Równania ruchu będą więc miały postać (str. 137, wzór (II)):

$$(6) \quad m\ddot{x} = P_{b_x} + mx\omega^2 - 2m\dot{y}\omega, \quad m\ddot{y} = P_{b_y} + my\omega^2 + 2m\dot{x}\omega, \quad m\ddot{z} = P_{b_z}.$$

Pracę siły w ruchu względnym nazywamy *pracą względną*.

Ponieważ \bar{p}_C jest prostopadle do \bar{v}_w , więc \bar{P}_C jest prostopadle do \bar{v}_w ; zatem siła Coriolisa nie wykonywa pracy względnej. Praca względna siły względnej sprowadza się więc do pracy siły bezwzględnej i siły unoszenia.

Jeżeli siłą bezwzględną jest siła ciężkości, to przyjmując, że oś z jest skierowana pionowo w górę, otrzymamy jako potencjał siły ciężkości $V_g = -mgz$. Siła ciężkości wraz z siłą unoszenia wytwarza pole potencjalne o potencjale

$$V = -\dot{m}gz + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

Jeżeli więc położymy $v = |\vec{v}_w|$, to na mocy zasady równowartości pracy i energii kinetycznej (str. 106) dostaniemy

$$\frac{1}{2}mv^2 - V = \text{const.}, \quad \text{więc} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgz - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) = \text{const.}$$

czyli

$$(7) \quad v^2 + 2gz - \omega^2(x^2 + y^2) = h,$$

gdzie h jest stałą.

Jeżeli badamy ruch punktu nieswobodnego po krzywej (lub powierzchni) nieruchomej względem układu (x, y, z) , to przy założeniu, że nie ma tarcia, reakcja nie wykonywa pracy względnej; wzór (7) zachodzi więc również i w tym przypadku.

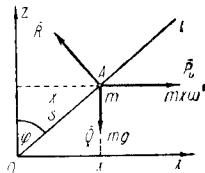
Przykład 3. Krzywa C płaska obraca się około osi pionowej, leżącej w jej płaszczyźnie, ze stałą prędkością kątową ω . Wyznaczyć ruch punktu nieswobodnego poruszającego się po krzywej C pod wpływem siły ciężkości.

Obierzmy za oś obrotu oś z skierowaną pionowo ku górze; za płaszczyznę krzywej C obierzmy płaszczyznę xz . Niechaj krzywa C ma równanie $z = f(x)$. Na mocy (7), wobec $y = 0$, dostaniemy $v^2 + 2gz - \omega^2x^2 = h$. Zakładając, że dla $t = 0$ jest $x = x_0$, $z = z_0 = f(x_0)$ i $v = 0$, otrzymamy $h = 2gz_0 - \omega^2x_0^2$. Ponieważ $ds = dx\sqrt{1+f'^2(x)}$, więc $v = \dot{s} = \dot{x}\sqrt{1+f'^2(x)}$; zatem

$$(8) \quad \dot{x}^2(1+f'^2(x)) + 2gf(x) - \omega^2x^2 = h.$$

Z równania powyższego możemy wyznaczyć x jako funkcję czasu t .

Przykład 4. Niech w szczególności C (z przykładu poprzedniego) będzie prostą l przechodzącą przez początek układu O i nachyloną do osi z pod kątem φ .



Aby wyznaczyć ruch punktu po prostej l , można by zastosować wzór (8), podstawiając $z = f(x) = x \operatorname{ctg} \varphi$. Wyprowadzimy jednak równania ruchu bezpośrednio.

Siła unoszenia jest prostopadła do osi z i wynosi $m\omega^2 s$. Oznaczmy przez s długość odcinka OA . Ponieważ siła Coriolisa i reakcja są prostopadłe do prostej l , więc rzut siły względnej na l wynosi $-mg \cos \varphi + m\omega^2 s \sin \varphi$. Z uwagi na to że $x = s \sin \varphi$, otrzymamy więc

$$m\ddot{s} = -mg \cos \varphi + m\omega^2 s \sin^2 \varphi$$

czyli

$$(9) \quad \ddot{s} - s\omega^2 \sin^2 \varphi = -g \cos \varphi.$$

Równanie jednorodne $\ddot{s} - s\omega^2 \sin^2 \varphi = 0$ ma rozwiązanie ogólne postaci $s = ae^{\omega t \sin \varphi} + be^{-\omega t \sin \varphi}$. Ponieważ rozwiązaniem szczególnym równania (9) jest $s = \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}$, więc rozwiązaniem ogólnym tego równania będzie

$$(10) \quad s = ae^{\omega t \sin \varphi} + be^{-\omega t \sin \varphi} + \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}.$$

Stałe a i b wyznaczymy z warunków początkowych. Jeżeli w szczególności $\varphi = \pi/2$, czyli prosta l jest osią x -ów, to

$$(11) \quad s = ae^{\omega t} + be^{-\omega t}.$$

§ 24. Równowaga względna. Jeżeli punkt materialny jest w równowadze (czyli spoczynku) względem układu ruchomego, to przyspieszenie względne jest $\bar{p}_w = 0$, a prędkość względna $\bar{v}_w = 0$. Wynika stąd, że również przyspieszenie Coriolisa jest $\bar{p}_C = 0$, a zatem i siła Coriolisa $\bar{P}_C = 0$. Z równania (II), str. 137, otrzymamy więc

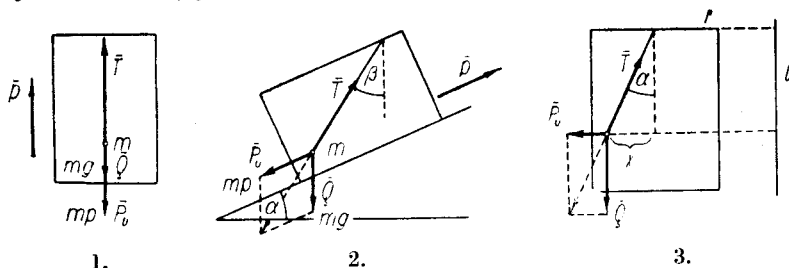
$$(I) \quad \bar{P}_b + \bar{P}_u = 0.$$

A więc: *gdy punkt jest w równowadze względnej, siła bezwzględna równoważy się z siłą unoszenia.*

Równowaga względna w układzie poruszającym się ruchem postępowym. Gdy układ porusza się ruchem postępowym, przyspieszenie unoszenia ma wartość stałą dla wszystkich punktów; stąd i siła unoszenia musi być jednakowa w każdym punkcie.

Jeżeli w szczególności układ ruchomy porusza się ruchem postępowym z prędkością stałą, to $\bar{p}_u = 0$, skąd $\bar{P}_u = 0$ i równanie (I), wyrażające warunek równowagi, sprowadza się do postaci $\bar{P}_b = 0$.

Przykład 1. W windzie, poruszającej się z przyspieszeniem \bar{p} , zawieszony jest na nici nierozciągliwej punkt ciężki o masie m . Niechaj nić ma kierunek pionowy i niech punkt pozostaje w równowadze względem windy (t. j. układu związanego z windą). Siły działające, mianowicie ciężar \bar{Q} i napięcie nici \bar{T} znoszą się więc z siłą unoszenia (rys. 1). Położmy $p = |\bar{p}|$ i $T = |\bar{T}|$.



1.

2.

3.

Przyspieszenie unoszenia jest \bar{p} . Załóżmy, że jest skierowane w górę. Zatem siła unoszenia jest skierowana w dół i wynosi mp . Tworząc rzuty sił na oś skierowaną pionowo w górę, otrzymamy $T - mg - mp = 0$ czyli $T = mg + mp$. Napięcie nici jest więc większe niż ciężar. Gdybyśmy trzymali ciało w ręce, uczulibyśmy pozorny wzrost ciężaru.

Na odwrót, jeżeli przyspieszenie jest skierowane w dół, to $T = mg - mp$; napięcie nici jest więc mniejsze niż ciężar i ciało w tym przypadku wydaje się lżejsze.

Wreszcie, jeżeli $p = 0$, to $T = mg$. A więc podczas ruchu jednostajnego windy napięcie nici równe jest ciężarowi.

Przykład 2. Wagon kolejki zębatej porusza się z przyspieszeniem \bar{p} po torze nachylonym do poziomu pod kątem α . Punkt materialny, zawieszony na nici nierozciągliwej, znajduje się w równowadze względem wagonu. Niech β oznacza kąt odchylenia nici od pionu.

Ciężar punktu \bar{Q} i napięcie nici \bar{T} równoważą się z siłą unoszenia \bar{P}_u (rys. 2), zatem

$$(1) \quad \bar{T} + \bar{Q} + \bar{P}_u = 0.$$

Przyspieszenie unoszenia jest \bar{p} . Załóżmy, że jest skierowane w górę. \bar{P}_u jest więc skierowane w dół i $|\bar{P}_u| = m|\bar{p}|$. Tworząc rzuty na oś poziomą i pionową, otrzymamy z (1):

$$(2) \quad T \sin \beta - mp \cos \alpha = 0, \quad T \cos \beta - mp \sin \alpha - mg = 0,$$

gdzie $T = |\bar{T}|$ i $p = |\bar{p}|$. Z równań (2) otrzymujemy:

$$T = m\sqrt{p^2 + g^2 + 2pg \sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{p \cos \alpha}{g + p \sin \alpha}.$$

Gdy w szczególności $\alpha=0$, t. zn. gdy tor jest poziomy, będzie $T = m\sqrt{p^2 + g^2}$ i $\operatorname{tg} \beta = p/g$. Możemy więc w wagonie kolejowym wyznaczyć z kąta wychylenia nitki od pionu przyspieszenie wagonu: mamy bowiem $p = g \operatorname{tg} \beta$.

Przykład 3. Po torze poziomym, zakrzywionym, porusza się wagon z prędkością stałą v . Możemy więc przyjąć, że wagon obraca się około pewnej prostej pionowej l . Niech punkt ciężki o masie m , zawieszony na nici nierozciągliwej, będzie w równowadze względem wagonu (str. 143, rys. 3).

Oznaczmy przez α kąt, jaki nie tworzy z pionem, przez r odległość punktu zawieszenia nici od prostej l . Odległość punktu m od osi l wynosi więc $r' = r + x = r + d \sin \alpha$ (gdzie d długość nici). Przyspieszenie unoszenia \bar{p}_u punktu m jest prostopadłe do l i jest skierowane ku l , przyczem $|\bar{p}_u| = v^2/(r+x)$. Siła unoszenia, mająca zwrot przeciwny, wynosi zatem $|\bar{P}_u| = mv^2/(r+x)$. Ponieważ ciężar \bar{Q} i napięcie nici \bar{T} równoważą się z siłą unoszenia, więc z trójkąta sił otrzymamy

$$\operatorname{tg} \alpha = |\bar{P}_u|/|\bar{Q}| = v^2/g(r+x).$$

Gdy x jest małe w stosunku do r , to $\operatorname{tg} \alpha = v^2/gr$.

Przykład 4. Punkt nieswobodny ciężki o masie m ma pozostawać na krzywej C , obracającej się z prędkością kątową ω około stałej prostej pionowej l . Tarcia nie uwzględniamy. W jakim położeniu punkt będzie w równowadze względem krzywej C ?

Oberzmy układ ruchomy (x, y, z) obracający się wraz z krzywą C około osi l z prędkością kątową ω , przyjmując l za oś z -ów skierowaną ku górze. Niech krzywa C , będąca w spoczynku względem układu (x, y, z) , dana będzie parametrycznie przy pomocy funkcji:

$$(3) \quad x = f(\sigma), \quad y = \varphi(\sigma), \quad z = \psi(\sigma).$$

W położeniu równowagi względnej ciężar \bar{Q} , reakcja \bar{R} i siła unoszenia \bar{P}_u równoważą się. Zatem suma $\bar{Q} + \bar{P}_u$ jest prostopadła do krzywej C . Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu w położeniu równowagi względnej, otrzymamy więc $p_{u_x} = -x\omega^2$, $p_{u_y} = -y\omega^2$ i $p_{u_z} = 0$, skąd $P_{u_x} = mx\omega^2$, $P_{u_y} = my\omega^2$ i $P_{u_z} = 0$. Suma $\bar{P}_u + \bar{Q}$ ma zatem rzuty: $mx\omega^2$, $my\omega^2$ i $-mg$.

Współczynniki kierunkowe stycznej są proporcjonalne do pochodnych $x'=f'(\sigma)$, $y'=\varphi'(\sigma)$, $z'=\psi'(\sigma)$. Z warunku prostokątności $\vec{P}_u + \vec{Q}$ do stycznej wynika tedy (po skróceniu przez m), że

$$(4) \quad xx'\omega^2 + yy'\omega^2 - gz' = 0.$$

Z równania powyższego możemy wyznaczyć wartość parametru σ , odpowiadającą położeniu równowagi względnej.

Jeżeli w szczególności krzywa C jest krzywą płaską o równaniu $z=\psi(x)$, leżącą w płaszczyźnie xz , wówczas dla położenia równowagi otrzymamy z równania (4) (kładąc $x=\sigma$, $y=0$ i $z=\psi(\sigma)$) lub bezpośrednio z rysunku:

$$(5) \quad \operatorname{tg} \alpha = \psi'(x) = x\omega^2/g.$$

Jeżeli np. krzywa C ma równanie $z=-\sqrt{r^2-x^2}$ (czyli jest dolną częścią koła $x^2+z^2=r^2$), to z (5) dostaniemy $x/\sqrt{r^2-x^2} = x\omega^2/g$, skąd $x_1=0$ i $x_{2,3} = \pm \sqrt{r^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}$. Rozwiązania $x_{2,3}$ istnieją tylko wtedy, gdy $r^2 - \frac{g^2}{\omega^4} \geq 0$, t. zn. gdy $\omega \geq \sqrt{g/r}$.

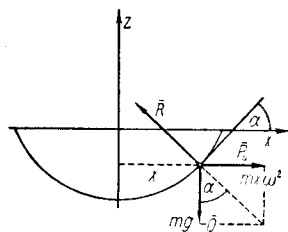
Zapytajmy teraz, *jakie to są krzywe, na których punkt jest w każdym położeniu w równowadze względnej.*

Dla krzywych tych równanie (4) musi być spełnione tożsamościowo, t. j. dla każdej wartości parametru σ . Otrzymamy tedy z (4) $\frac{1}{2} \frac{d[x^2+y^2]}{d\sigma} \omega^2 - g \frac{dz}{d\sigma} = 0$. Całkując, dostajemy $(x^2+y^2)\omega^2/2 - gz = \text{const.}$ czyli

$$(6) \quad z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2) + c,$$

gdzie $c = \text{const.}$

Równanie (6) przedstawia zbiór paraboloid obrotowych, powstałych przez obrót paraboli $z = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$ dokoła osi z . Na mocy (6) krzywa, leżąca na którejkolwiek z tych paraboloid, spełnia równanie (4) tożsamościowo. Krzywe płaskie, spełniające równanie (4), otrzymamy, tworząc przekrój paraboloidy dowolną płaszczyzną. Jako przekroje dostaniemy elipsy i parabole. W szczególności, przekrój płaszczyzną pionową $y=0$ będzie parabolą o równaniu $z = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$.



§ 25. Ruch względem ziemi. Siła ciężkości. Przyjmijmy za układ inercjalny układ, którego początek znajduje się w słońcu, a osie skierowane są ku gwiazdom stałym. Ziemia nie jest w spoczynku względem tego układu. Badając ruch punktu w ciągu krótkiego czasu, możemy się ograniczyć do ruchu obrotowego ziemi tylko około pewnej osi.

Niech punkt zawieszony na nici w pewnym miejscu powierzchni ziemi będzie względem ziemi w spoczynku. Siłami bezwzględными są: przyciąganie ziemi \bar{A} i napięcie nici \bar{T} (równe co do wielkości i kierunku ciężarowi, lecz o zwrocie przeciwnym).

Przyciąganie ziemi nie jest równe ciężarowi, bo w przeciwnym razie równoważyłoby się ono z napięciem nici i punkt byłby w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostoliniowym. To jednak nie zachodzi, gdyż punkt obraca się wraz z ziemią około jej osi.

Stosując warunki równowagi względnej (§ 24, str. 142) do układu związanego z ziemią, możemy powiedzieć, że przyciąganie ziemi \bar{A} i napięcie nici \bar{T} równoważą się z siłą unoszenia \bar{P}_u . A więc

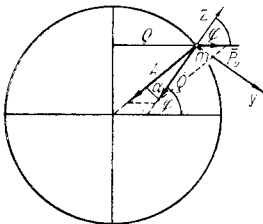
$$\bar{A} + \bar{T} + \bar{P}_u = 0.$$

Ponieważ ciężar ciała $\bar{Q} = -\bar{T}$, więc $\bar{A} - \bar{Q} + \bar{P}_u = 0$, skąd

$$(I) \quad \bar{Q} = \bar{A} + \bar{P}_u.$$

A więc: *ciężar jest wypadkową siły odśrodkowej (siły unoszenia) i siły przyciągania ziemi.*

Wielkość i kierunek przyciągania ziemi. Załóżmy, że ziemia ma kształt bryły obrotowej, której osią jest oś obrotu ziemi. Załóżmy ponadto, że gęstość ziemi jest rozłożona symetrycznie względem środka masy. Można udowodnić wówczas, że siła przyciągania jest skierowana stale ku środkowi masy ziemi.



Niech α będzie kątem, jaki siła \bar{A} tworzy z pionem, t. j. z ciężarem \bar{Q} . Oznaczmy przez ρ promień równoleżnika, na którym znajduje się punkt materialny, przez φ szerokość geograficzną tego punktu (t. j. kąt między przechodzącym przezeń pionem a płaszczyzną równika), wreszcie przez ω prędkość kątową obrotu ziemi.

Siła unoszenia leży w płaszczyźnie równoleżnika i jest skierowana od osi obrotu, przyczem $|\bar{P}_u| = m\rho\omega^2$. Utwórzmy rzuty sił \bar{A} , \bar{Q} i \bar{P}_u na oś z zwróconą pionowo w górę oraz na oś y poziomą (t. j.

prostopadłą do pionowej), leżącą w płaszczyźnie południka (t. j. w płaszczyźnie sił) i zwróconą na południe. Kładąc $A=|\vec{A}|$ i $Q=|\vec{Q}|$, otrzymamy na mocy (I)

$$-Q = -A \cos \alpha + m \varrho \omega^2 \cos \varphi, \quad -A \sin \alpha + m \varrho \omega^2 \sin \varphi = 0.$$

Zatem:

$$(1) \quad A \cos \alpha = Q + m \varrho \omega^2 \cos \varphi, \quad A \sin \alpha = m \varrho \omega^2 \sin \varphi.$$

Stąd, znając Q , ϱ , ω i φ , możemy obliczyć A i α . Na równiku mamy $\varphi=0$; zatem na mocy (1) dostajemy $\alpha=0$. Oznaczając przez A_0 , Q_0 i ϱ_0 odpowiednie wartości na równiku, otrzymamy

$$(2) \quad A_0 = Q_0 + m \varrho_0 \omega^2.$$

Znając Q_0 i ϱ_0 , możemy więc obliczyć A_0 . Znając A_0 , otrzymamy

$$(3) \quad m \varrho_0 \omega^2 / A_0 = 1/289 = 1/17^2.$$

Gdyby prędkość ziemi wynosiła $\omega_1 = 17\omega$, byłoby więc $m \varrho_0 \omega_1^2 / A_0 = 1$ czyli $A_0 = m \varrho_0 \omega_1^2$. Na mocy (2) otrzymujemy stąd $Q_0 = A_0 - m \varrho_0 \omega_1^2 = 0$; gdyby więc ziemia obracała się 17 razy szybciej, wówczas ciała na równiku pozbawione były by ciężaru.

Zalóżmy teraz, że ziemia jest kulą, złożoną z warstw współśrodkowych o stałej gęstości. Wówczas, jak można wykazać, A musi być stałe na powierzchni ziemi. Zatem $A = A_0$. Oznaczając przez R promień ziemi, otrzymamy

$$(4) \quad \varrho = R \cos(\varphi - \alpha).$$

Na mocy (1) jest $\sin \alpha = \frac{mR\omega^2}{A_0} \cos(\varphi - \alpha) \sin \varphi$, a ponieważ $\varrho_0 = R$, więc na mocy (3)

$$\sin \alpha = \frac{1}{289} \cos(\varphi - \alpha) \sin \varphi.$$

Kąt α jest bardzo mały; przyjmując więc w przybliżeniu $\sin \alpha = \alpha$ i $\cos(\varphi - \alpha) = \cos \varphi$, dostaniemy

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot 289} \sin 2\varphi.$$

Widzimy stąd, że α ma największą wartość dla $\varphi = 45^\circ$. Kładąc $\alpha = 0$, dostaniemy na mocy (1) i (4)

$$Q = A_0 - mR\omega^2 \cos^2 \varphi = A_0 \left(1 - \frac{mR\omega^2}{A_0} \cos^2 \varphi \right),$$

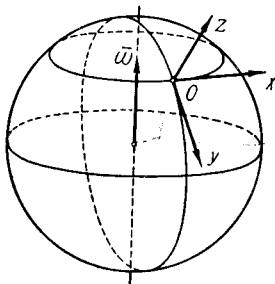
skąd na mocy (3), wobec $\varrho_0=R$, otrzymamy

$$Q = A_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{289} \right).$$

Siła Coriolisa. Badając ruch punktu względem ziemi, należy do sił bezwzględnych dodać siły unoszenia i Coriolisa. Załóżmy, że oprócz siły przyciągania \bar{A} działa na punkt materialny jeszcze pewna siła \bar{P} . Oznaczając przez \bar{p} przyspieszenie względem ziemi, otrzymamy $m\bar{p} = \bar{P} + \bar{A} + \bar{P}_u + \bar{P}_C$, a ponieważ $\bar{A} + \bar{P}_u$ równa się ciężarowi \bar{Q} , więc

$$(5) \quad m\bar{p} = \bar{P} + \bar{Q} + \bar{P}_C.$$

Zatem: przy badaniu ruchu punktu względem ziemi należy do siły \bar{P} i ciężaru \bar{Q} dodać siłę Coriolisa \bar{P}_C .



Obierzmy w danym miejscu na ziemi oś z skierowaną pionowo w górę, oś x poziomo skierowaną na wschód i oś y poziomo skierowaną na południe. Oś obrotu będzie leżała w płaszczyźnie yz i utworzy z osią z kąt $90^\circ - \varphi$ (porównaj rysunek na str. 146). Ponieważ ziemia obraca się z zachodu na wschód, więc wektor prędkości kątowej $\bar{\omega}$, położony na osi obrotu, ma zwrot od bieguna południowego ku północnemu. Kładąc $|\bar{\omega}| = \omega$, otrzymamy na półkuli północnej:

$$(N) \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega \cos \varphi, \quad \omega_z = \omega \sin \varphi,$$

a na południowej:

$$(S) \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega \cos \varphi, \quad \omega_z = -\omega \sin \varphi,$$

Oznaczając przez \bar{v} prędkość punktu względem ziemi, otrzymamy $\bar{p}_C = 2\bar{v} \times \bar{\omega}$, zatem $\bar{P}_C = -m\bar{p}_C = -2m\bar{v} \times \bar{\omega}$ czyli

$$(6) \quad \bar{P}_C = 2m\bar{\omega} \times \bar{v},$$

skąd na mocy (N), dla półkuli północnej:

$$(II) \quad P_{C_x} = -2m\omega(v_y \sin \varphi + v_z \cos \varphi), \quad P_{C_y} = 2m\omega v_x \sin \varphi, \\ P_{C_z} = 2m\omega v_x \cos \varphi.$$

Jeżeli punkt ma tylko prędkość pionową, t. j. gdy $v_x = 0$ i $v_y = 0$, otrzymamy $P_{C_x} = -2m\omega v_z \cos \varphi$, $P_{C_y} = 0$ i $P_{C_z} = 0$. Przy wznośzeniu się punktu jest $v_z > 0$, a więc $P_{C_x} < 0$ i \bar{P}_C jest skierowane

poziomo na zachód; przy opadaniu zaś punktu $v_z < 0$, $P_{C_x} > 0$, a zatem \bar{P}_C jest skierowane poziomo na wschód.

Wynika stąd, że *ciało spadające zbacza na wschód pod wpływem siły Coriolisa.*

Jeżeli punkt porusza się stale w płaszczyźnie poziomej, czyli gdy $v_z = 0$, to $P_{C_x} = -2m\omega v_y \sin \varphi$ i $P_{C_y} = 2m\omega v_x \sin \varphi$. Składowa pozioma siły Coriolisa jest więc wtedy prostopadła do prędkości i ma w stosunku do niej zwrot na prawo.

A zatem: *punkt poruszający się w płaszczyźnie poziomej na półkuli północnej dąży (pod wpływem siły Coriolisa) do zbaczenia w prawo od kierunku prędkości.*

Z tego powodu np. prawa szyna jest bardziej uciskana przy biegu pociągów niż lewa.

Efekty siły Coriolisa są małe, bo siła jest mała. Na mocy (6) mamy bowiem $|\bar{P}_C| = 2m\omega|\bar{v}|\sin \varepsilon$, gdzie ε oznacza kąt między \bar{v} a osią obrotu. Ponieważ

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ sek}^{-1} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ sek}^{-1} = 0,00007 \text{ sek}^{-1},$$

gdzie T oznacza czas obrotu ziemi dookoła osi, więc \bar{P}_C jest małe.

Utwórzmy rzuty (5) na osie x, y, z . Na mocy (II) otrzymamy:

$$(III) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= P_x - 2m\omega(\dot{y}\sin \varphi + \dot{z}\cos \varphi), & m\ddot{y} &= P_y + 2m\omega\dot{x}\sin \varphi, \\ m\ddot{z} &= P_z - mg + 2m\omega\dot{x}\cos \varphi. \end{aligned}$$

Zboczenie na wschód przy spadku. Zajmiemy się wyznaczeniem zboczenia od pionu dla punktu materialnego spadającego swobodnie.

Założmy, że dla $t=0$ mamy:

$$(7) \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad \bar{v}=0.$$

Na mocy (III), otrzymamy przy założeniu, że $\bar{P}=0$:

$$(8) \quad \ddot{x} = -2\omega(\dot{y}\sin \varphi + \dot{z}\cos \varphi), \quad \ddot{y} = 2\omega\dot{x}\sin \varphi, \quad \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\cos \varphi.$$

Całkując, dostaniemy z uwagi na warunki początkowe (7):

$$(9) \quad \dot{x} = -2\omega(y\sin \varphi + z\cos \varphi), \quad \dot{y} = 2\omega x\sin \varphi, \quad \dot{z} = -gt + 2\omega x\cos \varphi.$$

Wstawiając w (8) wartości \dot{y} i \dot{z} , otrzymamy

$$\ddot{x} = -4\omega^2 x + 2\omega g t \cos \varphi.$$

Równanie powyższe możnaby było scałkować, a następnie, podstawiając w (9), moglibyśmy wyznaczyć y i z . Rozwiązanie przybliżone otrzymamy, opuszczając wyraz $-4\omega^2 x$, bardzo mały w porównaniu z $2\omega g t \cos \varphi$. Dostaniemy $\ddot{x} = 2\omega g t \cos \varphi$, skąd

$$(10) \quad x = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi.$$

Opuszczając w trzecim z równań (9) wyraz $2\omega x \cos \varphi$, jako mały w porównaniu z $-gt$, otrzymamy $\dot{z} = -gt$, skąd $z = -\frac{1}{2}gt^2$. Gdy punkt spadnie do poziomu $z = -h$, będzie $-h = -\frac{1}{2}gt^2$, zatem $t = \sqrt{2h/g}$. Na mocy więc (10)

$$(11) \quad x = \frac{2}{3} \omega h \cos \varphi \sqrt{2h/g}.$$

Wzór powyższy przedstawia zboczenie na wschód (gdyż $x > 0$) ciała spadającego z wysokości h .

W Harvard (Stany Zjednoczone) wykonano doświadczenia, przyjmując $h = 23$ m i $\varphi = 42^\circ$. Z około tysiąca doświadczeń otrzymano zboczenie zawarte między 1,3 m a 1,7 m. Ze wzoru przybliżonego (11) wypada natomiast $x = 1,8$ cm. Różnica jest więc niewielka.

Wahadło Foucaulta. Zbadajmy wpływ siły Coriolisa na ruch wahadła. Umieścimy początek układu (x, y, z) w punkcie zawieszenia nici nierozciągliwej, na której końcu umocowany jest punkt ciężki o masie m . Niechaj l będzie długością wahadła (t. j. nici). Ponieważ reakcja \bar{P} ze strony nici działa na punkt wzdłuż nici, więc, oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu m , otrzymamy:

$$P_x = \lambda m x, \quad P_y = \lambda m y, \quad P_z = \lambda m z,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności, zależnym od czasu.

Na mocy (III), str. 149, otrzymamy, dzieląc przez m :

$$(12) \quad \ddot{x} = \lambda x - 2\omega(\dot{y} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \quad \ddot{y} = \lambda y + 2\omega \dot{x} \sin \varphi,$$

$$(13) \quad \ddot{z} = \lambda z - g + 2\omega \dot{x} \cos \varphi.$$

Zajmiemy się tylko przybliżonym rozwiązaniem równań (12) i (13). Założmy, że kąt wychylenia jest dostatecznie mały, by można było przyjąć w przybliżeniu

$$(14) \quad z = -l, \quad \dot{z} = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Z równania (13) otrzymamy zatem $0 = -\lambda l - g + 2\omega \dot{x} \cos \varphi$, skąd $\lambda = \frac{-g + 2\omega \dot{x} \cos \varphi}{l}$. Opuszczając w liczniku drugi wyraz jako mały w porównaniu z pierwszym, dostaniemy

$$(15) \quad \lambda = -g/l.$$

Współczynnik λ możemy więc uważać w przybliżeniu za stały. Równania (12) przyjmą na mocy (14) i (15) postać:

$$(16) \quad \ddot{x} = -\frac{g}{l}x - 2\omega \dot{y} \sin \varphi, \quad \ddot{y} = -\frac{g}{l}y + 2\omega \dot{x} \sin \varphi.$$

Mnożąc pierwsze z równań (16) przez \dot{x} , a drugie przez \dot{y} , i dodając, otrzymamy $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = -\frac{g}{l}(x\dot{x} + y\dot{y})$, skąd po scałkowaniu

$$(17) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = -\frac{g}{l}(x^2 + y^2) + a,$$

gdzie a jest pewną stałą. Mnożąc pierwsze z równań (16) przez y , a drugie przez x i odejmując, dostaniemy $y\ddot{x} - x\ddot{y} = -2\omega(y\dot{y} + x\dot{x}) \sin \varphi$, skąd po scałkowaniu

$$(18) \quad y\dot{x} - x\dot{y} = -\omega(x^2 + y^2) \sin \varphi + b.$$

gdzie b jest pewną stałą. Wprowadźmy współrzędne biegunowe:

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi.$$

Na mocy (17) i (18) otrzymamy:

$$(19) \quad \dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 = -\frac{g}{l}r^2 + a,$$

$$(20) \quad r^2\dot{\psi} = r^2 \omega \sin \varphi - b.$$

Wprowadźmy nowy układ współrzędnych (x_1, y_1, z_1) , mający z układem poprzednim (x, y, z) wspólny początek oraz wspólną oś z i obracający się dookoła osi z z prędkością kątową $\omega \sin \varphi$ w kierunku od wschodu na południe, t. j. od x ku y . Dla współrzędnych biegunowych r_1, ψ_1 otrzymamy w nowym układzie wzory:

$$(21) \quad r = r_1, \quad \psi = \psi_1 + \omega t \sin \varphi.$$

Przez podstawienie (21) w (20) otrzymamy w nowych współrzędnych r_1, ψ_1 równanie $r_1^2(\dot{\psi}_1 + \omega \sin \varphi) = r_1^2 \omega \sin \varphi - b$, skąd

$$(22) \quad r_1^2\dot{\psi}_1 = -b,$$

a przez podstawienie (21) w równanie (19) dostaniemy

$$\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\psi}_1^2 + 2r_1^2\dot{\psi}_1 \omega \sin \varphi + r_1^2 \omega^2 \sin^2 \varphi = -\frac{g}{l}r_1^2 + a,$$

skąd opuszczając wyraz $r_1^2 \omega^2 \sin^2 \varphi$ jako bardzo mały i stosując równanie (22), otrzymamy

$$(23) \quad \dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\psi}_1^2 = -\frac{g}{l}r_1^2 + a_1,$$

gdzie $a_1 = a + 2b \omega \sin \varphi = \text{const}$.

Łatwo sprawdzić, że (22) i (23) są równaniami ruchu, który we współrzędnych x_1, y_1, z_1 ma równania:

$$(24) \quad \ddot{x}_1 = -\frac{g}{l}x_1, \quad \ddot{y}_1 = -\frac{g}{l}y_1.$$

Istotnie, równania (16) przyjmują tę właśnie postać dla $\omega=0$. A więc, wprowadzając współrzędne biegunowe, otrzymamy, jak widać z równań (19) i (20) dla $\omega=0$, równania (22) i (23).

Równania (24) wyznaczają ruch punktu pod wpływem siły \bar{P} , której rzuty wynoszą:

$$(25) \quad P_{x_1} = -\frac{g}{l}mx_1, \quad P_{y_1} = -\frac{g}{l}my_1.$$

Jest to siła sprężysta t. j. skierowana stale ku początkowi układu współrzędnych i wprost proporcjonalna do odległości punktu od początku układu. Na str. 114 wykazaliśmy, że ruch pod wpływem siły sprężystej odbywa się po elipsie. A więc punkt materialny będzie odbywał ruch w układzie (x_1, y_1, z_1) po elipsie. Że zaś ten układ obraca się około osi z z prędkością kątową $\omega \sin \varphi$, więc oś tej elipsy będzie obracała się z prędkością kątową $\omega \sin \varphi$ ze wschodu na południe. Czas obrotu wynosi

$$T = 2\pi / \omega \sin \varphi.$$

Ponieważ obrót ziemi trwa 24 godz, więc $2\pi/\omega = 24$ godz, skąd $T = 24/\sin\varphi$ godz. Dla $\varphi = 45^\circ$ dostajemy $T = 34$ godz.

Zjawisko powyższe pierwszy stwierdził doświadczalnie L. Foucault. Stanowi ono dowód obrotu ziemi naokoło osi.