ROZDZIAŁ IV

GEOMETRIA MAS

I. Układy punktów

§ 1. Momenty statyczne. Moment statyczny punktu. Weźmy pod uwagę dowolną płaszczyznę Π. Dzieli ona przestrzeń na dwie części; jedną z tych części uważajmy za dodatnią, a drugą za ujemną. Niech A oznacza pewien punkt materialny, a d jego odległość od płaszczyzny Π. Będziemy pisali $\sigma=+d$ lub $\sigma=-d$, zależnie od tego, czy punkt A leży w dodatniej części przestrzeni czy w ujemnej.

Oznaczając masę punktu A przez m, wyrażenie

$$M_{\Pi}=m\sigma$$

nazywać będziemy *momentem statycznym* punktu materialnego A względem płaszczyzny Π.

Moment statyczny punktu może więc być liczbą dodatnią, ujemną lub zerem (jest on zerem dla każdego punktu A leżącego na płaszczyźnie Π).

Jeżeli za płaszczyznę Π obierzemy jedną z płaszczyzn rzutowych xy, yz, zx, to za część dodatnią przestrzeni uważać będziemy tę część, w której znajduje się część dodatnia osi prostopadłej do obranej płaszczyzny rzutowej. Gdy punkt A o masie m ma współrzędne x, y, z, mamy na mocy powyższej umowy:

$$M_{xy}=mz, \qquad M_{yz}=mx, \qquad M_{zx}=my,$$

gdzie M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} oznaczają odpowiednio momenty statyczne punktu A względem płaszczyzn xy, yz i zx.

Moment statyczny układu punktów. Zbiór punktów materialnych nazywamy *układem punktów*, sumę zaś momentów statycznych poszczególnych jego punktów nazywamy *momentem statycznym (ogólnym) układu punktów.*

Jeżeli więc punkty materialne o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$, mają odpowiednio względem płaszczyzny Π momenty statyczne: $m_1\sigma_1$, $m_2\sigma_2, \ldots m_n\sigma_n$, to momentem statycznym ogólnym układu tych punktów będzie

$$M_{\Pi} = m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \ldots + m_n\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i,$$

Jeżeli punkty materialne danego układu punktów mają odpowiednio współrzędne x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $\ldots$, x_n, y_n, z_n, to momenty statyczne ogólne tego układu punktów względem odpowiednich płaszczyzn rzutowych wyrażają się wzorami:

$$M_{xy} = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i,$$

$$M_{yz} = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i,$$

$$M_{zx} = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i.$$

Momenty statyczne nazywamy także *momentami stopnia pierwszego.*

§ 2. Środek masy. Niech będzie dany układ U punktów materialnych $m_1(x_1, y_1, z_1)$, $m_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, m_n(x_n, y_n, z_n)$. Weźmy pod uwagę punkt S o współrzędnych:

$$\text{(I)} \quad x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y_0 = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$
$$z_0 = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Punkt S nazywamy *środkiem masy* lub *środkiem ciężkości* danego układu punktów U.

Sumę mas poszczególnych punktów (występującą w mianowniku ułamków (I)) nazywać będziemy *masą całkowitą* układu punktów.

Jakkolwiek określiliśmy środek masy przy pomocy układu współrzędnych, to jednak wykażemy, że położenie środka masy jest od układu współrzędnych nie zależne, lecz że zależy ono tylko od mas punktów i ich wzajemnego rozmieszczenia. Wyniknie to łatwo z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Moment statyczny układu punktów względem dowolnej płaszczyzny równa się momentowi statycznemu masy całkowitej, umieszczonej w środku ciężkości.*

Dowód. Niechaj Π będzie dowolną płaszczyzną, której równanie normalne ma kształt

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

Przyjmijmy za dodatnią tę z dwóch części przestrzeni, dla której $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p>0$, gdy za x, y i z podstawić współrzędne dowolnego punktu tej części. Jeżeli więc $A(x, y, z)$ jest dowolnym punktem przestrzeni, to ponieważ odległość punktu A od płaszczyzny Π wyraża się wzorem

$$d=|x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p|,$$

zatem możemy w myśl naszej umowy położyć:

$$\sigma=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p.$$

Moment statyczny punktu A o masie m względem płaszczyzny Π wynosi więc

$$(1)\qquad M_\Pi=m\sigma=mx\cos\alpha+my\cos\beta+mz\cos\gamma-mp.$$

Niech dany będzie układ punktów materialnych $m_1(x_1, y_1, z_1)$, $m_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $m_n(x_n, y_n, z_n)$. Moment statyczny tego układu punktów względem płaszczyzny Π będzie na mocy (1)

$$M_\Pi=(m_1x_1\cos\alpha+m_1y_1\cos\beta+m_1z_1\cos\gamma-m_1p)+\dots$$
$$\dots+(m_nx_n\cos\alpha+m_ny_n\cos\beta+m_nz_n\cos\gamma-m_np)$$

czyli

$$(2)\qquad \begin{aligned} M_\Pi=(m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n)\cos\alpha+(m_1y_1+\dots+m_ny_n)\cos\beta+\\ +(m_1z_1+\dots m_nz_n)\cos\gamma-(m_1+\dots+m_n)p.\end{aligned}$$

Kładąc $m_1+m_2+\dots m_n=m$, mamy na mocy (I):

$$(\mathrm{II})\qquad mx_0=\sum m_ix_i,\quad my_0=\sum m_iy_i,\quad mz_0=\sum m_iz_i\quad i=1, 2, \dots, n,$$

skąd na mocy (2)

$$(3)\qquad M_\Pi=mx_0\cos\alpha+my_0\cos\beta+mz_0\cos\gamma-mp.$$

Ponieważ prawa strona równości (3) przedstawia na mocy (1) moment statyczny masy m, umieszczonej w środku ciężkości S o współrzędnych x_0, y_0, z_0, więc twierdzenie zostało udowodnione.

Aby wykazać teraz, że środek masy układu punktów nie zależy od wyboru układu współrzędnych, przypuśćmy, że własność środka ciężkości S, wypowiedzianą w twierdzeniu, posiada, prócz punktu S, jeszcze jakiś inny punkt S'. Udowodnimy, że to jest nie możliwe.

Poprowadźmy w tym celu przez punkt S dowolną płaszczyznę Π, nie przechodzącą przez S'. Zatem

$$M_\Pi = m\sigma \quad \text{i} \quad M_\Pi = m\sigma', \tag{4}$$

gdzie σ i σ' oznaczają odpowiednio odległości (ze znakami) punktów S i S' od płaszczyzny Π. Z (4) wynika, że $\sigma = \sigma'$. Lecz $\sigma = 0$, ponieważ Π przechodzi przez S. Zatem musiałoby być również $\sigma' = 0$, co jednak nie możliwe, gdyż S' nie leży w płaszczyźnie Π.

Widzimy więc, że *położenie środka masy układu punktów nie zależy od układu współrzędnych.*

Środek masy dwóch układów punktów. Niech układ U złożony będzie z punktów materialnych

$$m_1'(x_1', y_1', z_1'), \quad m_2'(x_2', y_2', z_2'), \quad \ldots, \quad m_1''(x_1'', y_1'', z_1''), \quad m_2''(x_2'', y_2'', z_2''), \quad \ldots$$

Środek S' masy układu punktów $m_1', m_2' \ldots$ ma na mocy określenia współrzędne:

$$\begin{gathered} x_0' = (m_1' x_1' + m_2' x_2' + \ldots)/m', \qquad y_0' = (m_1' y_1' + m_2' y_2' + \ldots)/m', \\ z_0' = (m_1' z_1' + m_2' z_2' + \ldots)/m', \end{gathered} \tag{5}$$

gdzie $m' = m_1' + m_2' + \ldots$. Dla środka S masy całego układu U będzie zaś

$$x_0 = \frac{(m_1' x_1' + m_2' x_2' + \ldots) + (m_1'' x_1'' + m_2'' x_2'' + \ldots)}{(m_1' + m_2' + \ldots) + (m_1'' + m_2'' + \ldots)},$$

skąd na mocy (5)

$$x_0 = \frac{m' x_0' + (m_1'' x_1'' + m_2'' x_2'' + \ldots)}{m' + (m_1'' + m_2'' + \ldots)}. \tag{6}$$

Podobne wzory otrzymamy na y_0 i z_0. Wzór (6) przedstawia odciętą środka masy układu, jaki otrzymamy z układu danego U, jeżeli część jego, mianowicie punkty o masach $m_1', m_2', \ldots$ zastąpimy jednym punktem materialnym o masie $m' = m_1' + m_2' + \ldots$, umieszczonym w środku masy tej części. Otrzymaliśmy zatem

Twierdzenie 2. *Środek masy układu punktów nie zmieni się, jeżeli jego część zastąpimy punktem materialnym o masie równej masie tej części i umieszczonym w środku jej masy.*

Jeżeli więc w szczególności mamy dwa układy punktów U' i U'' o masach całkowitych m' i m'' i o środkach ciężkości S' i S'', to środek masy układu $U'+U''$ otrzymamy, wyznaczając środek masy układu dwu punktów materialnych o masach m' i m'', umieszczonych odpowiednio w punktach S' i S''. Układy U' i U'' możemy bowiem uważać za części układu $U'+U''$.

Układ płaski punktów. Układ punktów materialnych nazywamy *płaskim*, jeżeli wszystkie jego punkty leżą w jednej płaszczyźnie. Obierając tę płaszczyznę za płaszczyznę xy (co wolno nam uczynić, ponieważ środek masy nie zależy od wyboru układu współrzędnych), będziemy mieli dla punktów układu: $z_1=0$, $z_2=0, \ldots, z_n=0$, skąd na mocy wzorów (I), str. 154, dostaniemy $z_0=0$.

Środek ciężkości układu płaskiego leży zatem w płaszczyźnie układu.

Momentem statycznym układu płaskiego względem dowolnej prostej l leżącej w płaszczyźnie układu nazywamy wyrażenie

$$M_l=\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i, \tag{7}$$

gdzie $|\sigma_i|$ jest odległością punktu o masie od prostej l, zaś znak przy σ_i zależy od tego, czy m_i znajduje się w dodatniej czy ujemnej części płaszczyzny, na które dzieli płaszczyznę prosta l. Widzimy stąd, że moment statyczny układu płaskiego względem prostej l jest to moment statyczny tego układu względem płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny układu i przecinającej ją wzdłuż prostej l. W szczególności więc momenty względem osi x i y wyrażają się wzorami:

$$M_x=\Sigma m_i y_i, \qquad M_y=\Sigma m_i x_i. \tag{8}$$

Układ liniowy punktów. Jeżeli punkty układu leżą na jednej prostej l, to środek masy układu leży również na tej prostej. Obierając bowiem prostą l za oś x-ów, mamy $y_1=0$, $y_2=0, \ldots$ i $z_1=0$, $z_2=0, \ldots$, skąd na mocy wzorów (I), str. 154, dostaniemy $y_0=0$, $z_0=0$. Środek masy będzie więc także leżał na osi x.

Środek masy dwóch punktów. Niech punkty materialne o masach m_1 i m_2 będą od siebie w odległości d. Środek masy leży oczywiście na prostej łączącej te punkty. Umieśćmy w m_1 początek osi x-ów, zaś dodatnią jej część przeprowadźmy przez m_2. Punkty m_1 i m_2 będą więc miały współrzędne odpowiednio $x_1=0$ i $x_2=d$, a środek masy współrzędną

$$x_0=m_2 d/(m_1+m_2). \tag{9}$$

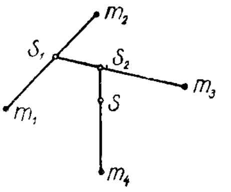
Ponieważ $0<x_0<d$, więc środek masy leży między punktami. Oznaczając przez d_1 i d_2 odległości środka masy od punktów m_1 i m_2, otrzymujemy $d_1=x_0=m_2d/(m_1+m_2)$ i $d_2=d-d_1=m_1d/(m_1+m_2)$, skąd

$$d_1/d_2=m_2/m_1. \tag{10}$$

Mamy więc następujące

Twierdzenie 3. *Środek masy układu dwupunktowego leży między punktami układu i dzieli odcinek, łączący te punkty, w stosunku odwrotnym do ich mas.*

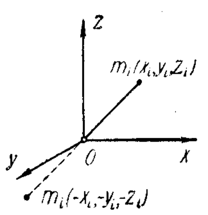
Opierając się na twierdzeniu 2, str. 156, możemy w następujący sposób wyznaczyć środek masy skończonego układu punktów, A_1, A_2, A_3,... o masach m_1, m_2, ... (rys. 1): wyznaczamy najpierw środek masy S_1 układu punktów A_1 i A_2; wyznaczamy następnie środek masy S_2 układu dwu punktów, złożonego z punktu o masie m_1+m_2, umieszczonego w S_1, i z punktu A_3 o masie m_3; postępując tak dalej, otrzymamy środek masy całego danego układu.



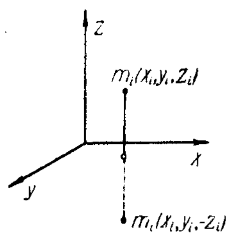
1.

Układy punktów symetryczne. Punkt O (prostą l, płaszczyznę Π) nazywamy *środkiem (prostą, płaszczyzną) symetrii układu punktów* materialnych, jeżeli do każdego punktu m_i istnieje w układzie punkt o tej samej masie m_i, symetrycznie względem O (prostej l, płaszczyzny Π) położony.

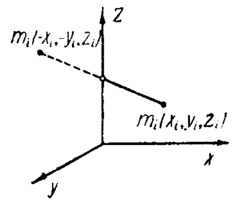
Jeżeli środkiem symetrii jest początek układu współrzędnych (rys. 2), to wraz z każdym punktem $m_i(x_i, y_i, z_i)$ układ punktów za-



2.



3.



4.

wiera punkt $m_i(-x_i, -y_i, -z_i)$. Jeżeli płaszczyzną symetrii jest płaszczyzna xy (rys. 3), to wraz z każdym punktem $m_i(x_i, y_i, z_i)$ układ zawiera punkt $m_i(x_i, y_i, -z_i)$. Jeżeli osią symetrii jest oś z (rys. 4), to wraz z każdym punktem $m_i(x_i, y_i, z_i)$ układ zawiera punkt $m_i(-x_i, -y_i, z_i)$.

Łatwo okazać, że zawsze *środek symetrii jest środkiem masy.*

Środek masy pary punktów symetrycznych leży bowiem na mocy twierdzenia 3, str. 158, w środku symetrii. Na mocy twierdzenia 2, str. 156, możemy więc taką parę zastąpić przez punkt materjalny umieszczony w środku symetrii. Robiąc to z każdą parą, przekonywamy się, że środek symetrii jest środkiem masy całkowitej układu.

Podobnie, *środek masy leży na prostej symetrii (i na płaszczyźnie symetrii).*

Z tych samych bowiem powodów środek pary punktów symetrycznych leży na prostej (i na płaszczyźnie) symetrii.

§. 3 Momenty stopnia drugiego. Moment bezwładności. Niech będzie dany punkt materialny A o masie m i pewna płaszczyzna Π. Oznaczmy przez r odległość punktu A od płaszczyzny Π. Wyrażenie

$$I = mr^2 \tag{1}$$

nazywamy *momentem bezwładności* punktu A względem płaszczyzny Π. Jeżeli przez r oznaczymy odległość punktu materialnego A od pewnej prostej l (lub od pewnego punktu O), to (1) będzie momentem bezwładności punktu A względem prostej l (lub względem punktu O).

Momentem bezwładności ogólnym układu punktów nazywamy sumę momentów bezwładności poszczególnych punktów tego układu.

Moment zboczenia (dewiacji). Niech dane będą dwie płaszczyzny Π_1 i Π_2, prostopadłe do siebie. Połóżmy $\sigma_1 = \pm d_1$, gdzie d_1 oznacza odległość punktu materialnego A od Π_1, przyczem znak zależeć ma od tego, czy punkt znajduje się w dodatniej czy ujemnej z dwu części, na jakie dzieli przestrzeń płaszczyzna Π_1. Podobnie określamy σ_2 względem płaszczyzny Π_2. Wyrażenie

$$D = m\sigma_1\sigma_2 \tag{2}$$

nazywamy *momentem zboczenia* (lub *dewiacji*) punktu materialnego A względem płaszczyzn Π_1 i Π_2.

Momentem zboczenia ogólnym układu punktów $A_1, A_2, \ldots$ względem płaszczyzn Π_1 i Π_2 nazywamy sumę momentów zboczenia poszczególnych punktów. A więc

$$D = \sum m_i \sigma_1^{(i)} \sigma_2^{(i)}, \tag{3}$$

gdzie m_i, $\sigma_1^{(i)}$, $\sigma_2^{(i)}$ oznaczają odpowiednio masę punktu A_i i jego odległości od płaszczyzn Π_1 i Π_2 (opatrzone właściwymi znakami).

Momenty bezwładności i momenty zboczenia nazywamy *momentami stopnia drugiego.*

Ramię bezwładności. Niech I oznacza ogólny moment bezwładności układu punktów U względem pewnej płaszczyzny Π (prostej l, punktu O). Liczbę

$$(4) \qquad k=\sqrt{I/m}, \qquad \text{gdzie} \quad m=m_1+m_2+\ldots$$

nazywamy *ramieniem bezwładności* układu punktów U względem płaszczyzny Π (prostej l, punktu O). Na mocy (4) jest

$$(5) \qquad I=mk^2.$$

A więc: *ramię bezwładności k jest odległością, w jakiej umieszczona masa całkowita układu ma moment bezwładności równy ogólnemu momentowi bezwładności układu.*

Masa zredukowana. Niech r będzie dowolną liczbą dodatnią. Masą układu *zredukowaną na odległość r* względem danej płaszczyzny (prostej lub punktu) nazywamy liczbę

$$(6) \qquad m_r=I/r^2.$$

Zatem $I=m_r r^2$. A więc: *moment bezwładności układu względem płaszczyzny (prostej, punktu) równa się momentowi bezwładności jego masy zredukowanej m_r, umieszczonej w odległości r od tej płaszczyzny (prostej, punktu).*

Momenty stopnia drugiego układu punktów:

$$m_1(x_1, y_1, z_1), \quad m_2(x_2, y_2, z_2), \quad \ldots, \quad m_n(x_n, y_n, z_n)$$

względem płaszczyzny, osi i początku układu spółrzędnych wyrażają się następującymi wzorami:

Momenty bezwładności względem płaszczyzn xy, yz i xz:

$$(7) \qquad I_{xy}=\sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2, \qquad I_{yz}=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2, \qquad I_{zx}=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2.$$

Momenty bezwładności względem osi x, y i z:

$$(8) \qquad I_x=\sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2+z_i^2), \qquad I_y=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+z_i^2), \qquad I_z=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+y_i^2).$$

Momenty bezwładności względem początku O układu współrzędnych:

(9) $$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Momenty zboczenia względem par płaszczyzn xy i zx, xy i yz oraz xz i zy:

(10) $$D_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i, \qquad D_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i, \qquad D_z = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i.$$

Ze wzorów (7)—(10) wynikają łatwo związki:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \qquad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \qquad I_z = I_{xz} =+ I_{yz};$$

$$I_{xy} = \tfrac{1}{2}[I_x + I_y - I_z], \qquad I_{yz} = \tfrac{1}{2}[I_y + I_z - I_x], \qquad I_{xz} = \tfrac{1}{2}[I_x + I_z - I_y];$$

$$I_O = \tfrac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}, \qquad I_O = I_x + I_{yz} = I_y + I_{xz} = I_z + I_{xy}.$$

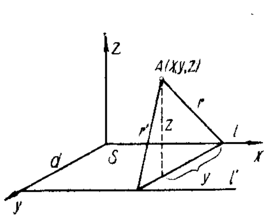
Momenty bezwładności względem prostych równoległych. Znając momenty bezwładności układu punktów o masie całkowitej m względem prostych przechodzących przez jeden punkt np. przez początek układu spółrzędnych, możemy łatwo wyznaczyć moment bezwładności tegoż układu punktów względem dowolnej prostej w przestrzeni, opierając się na następującym twierdzeniu:

Jeżeli prosta l przechodząca przez środek masy układu punktów jest równoległa do prostej l', to

(I) $$I_{l'} = I_l + m d^2,$$

gdzie d oznacza odległość między l a l', zaś I_l i $I_{l'}$ momenty bezwładności względem tych prostych..

Dowód. Środek S masy układu punktów, przez który przechodzi prosta l, obierzmy za początek układu współrzędnych, prostą l za oś x-ów, a płaszczyznę przesuniętą przez proste równoległe l i l' za płaszczyznę xy. Oznaczając odpowiednio przez r i r' odległość dowolnego punktu $A(x,y,z)$ od prostych l i l', mamy $r'^2 = z^2 + (d-y)^2$ i $r^2 = z^2 + y^2$,



skąd $r'^2 = r^2 + d^2 - 2dy$, a więc

$$I_{l'} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i [r_i^2 + d^2 - 2dy_i] = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 + d^2 \sum_{i=1}^{n} m_i - 2d \sum_{i=1}^{n} m_i y_i =$$

$$= I_l + md^2 - 2d \sum_{i=1}^{n} m_i y_i.$$

Lecz $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = m y_0 = 0$, gdyż środek S masy układu punktów leży w początku układu współrzędnych. Zatem $I_{l'} = I_l + md^2$, c. b. d. d.

Z wzoru (I) wynika, że jeżeli wziąć pod uwagę wszystkie proste równoległe do prostej o pewnym danym kierunku, to moment bezwładności będzie najmniejszy względem tej prostej, która przechodzi przez środek masy. Oczywistym jest również, że jeżeli proste l' i l'' są równoległe, to oznaczając przez d_1 i d_2 odległości środka masy od tych prostych, będziemy mieli

$$(10) \qquad I_{l'} - md_1^2 = I_{l''} - md_2^2,$$

ponieważ na mocy (I) obie strony równości wynoszą I_l, gdzie l jest prostą równoległą do l' i l'', przechodzącą przez środek masy.

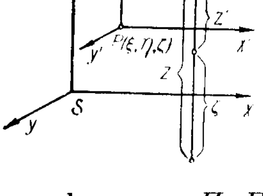
Ze wzoru (10) mamy

$$(\mathrm{II}) \qquad I_{l''} = I_{l'} + m(d_2^2 - d_1^2).$$

Wzór powyższy pozwala obliczyć moment bezwładności układu punktów względem dowolnej prostej w przestrzeni, gdy znane są momenty bezwładności tego układu względem wszystkich prostych przechodzących przez jeden punkt i położenie środka masy układu.

M o m e n t y z b o c z e n i a w z g l ę d e m p ł a s z c z y z n r ó w n o l e g ł y c h. Dla momentów zboczenia można udowodnić twierdzenie podobne do twierdzenia o momentach bezwładności (str. 161).

Niechaj płaszczyzny Π_1, Π_2 będą do siebie prostopadłe i przechodzą przez środek masy m danego układu punktów materialnych. Obierzmy dowolnie płaszczyzny Π_1', Π_2' równoległe odpowiednio do płaszczyzn Π_1, Π_2. Niech σ_1 oznacza odległość między płaszczyznami Π_1, Π_1', zaopatrzoną znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy płaszczyzna Π_1' leży w dodatniej czy ujemnej części przestrzeni, na jakie dzieli przestrzeń płaszczyzna Π_1. Analogicznie określmy σ_2 dla pary płaszczyzn Π_2, Π_2'. Wreszcie oznaczmy przez D i D' momenty zboczenia danego układu względem par płaszczyzn Π_1, Π_2 i Π_1', Π_2'. Mamy wówczas analogicznie do (I) wzór



$$(\mathrm{III}) \qquad D' = D + m\sigma_1\sigma_2.$$

Uwaga. Zauważmy, że iloczyn $m\sigma_1\sigma_2$ oznacza moment zboczenia względem pary płaszczyzn Π_1, Π_2 masy całkowitej m układu, umieszczonej gdziekolwiek bądź na prostej przecięcia pary płaszczyzn Π_1' i Π_2'.

Dowód wzoru (III). Obierzmy początek układu współrzędnych (x, y, z) w środku S masy całkowitej m danego układu punktów. Za oś x-ów weźmiemy prostą przecięcia płaszczyzn Π_1 i Π_2, zaś płaszczyzny te obieramy odpowiednio za płaszczyzny xy i yz.

Analogicznie obieramy drugi układ współrzędnych (x', y', z') dla pary płaszczyzn Π_1', Π_2', przyjmując za początek dowolny punkt P leżący na prostej przecięcia płaszczyzn Π_1' i Π_2'.

Oznaczmy współrzędne punktu P względem układu współrzędnych (x, y, z) przez ξ, η, ζ. Oczywiście $\eta=\sigma_2$ i $\zeta=\sigma_1$. Niech x, y, z będą współrzędnymi dowolnego punktu A względem układu współrzędnych (x, y, z), zaś x', y', z' współrzędnymi tegoż punktu A względem układu współrzędnych (x', y', z'). Wówczas:

$$x'=x-\xi, \qquad y'=y-\eta, \qquad z'=z-\zeta. \tag{11}$$

Ponieważ

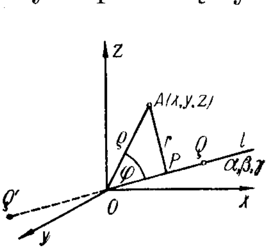
$$D'=\sum m_i z_i' y_i', \qquad D=\sum m_i z_i y_i, \tag{12}$$

więc na mocy (11)

$$\begin{aligned} D'&=\sum m_i(z_i-\zeta)(y_i-\eta)=\sum m_i[z_i y_i+\zeta\eta-\zeta y_i-\eta z_i]= \\ &=\sum m_i z_i y_i+\zeta\eta\sum m_i-\zeta\sum m_i y_i-\eta\sum m_i z_i. \end{aligned} \tag{13}$$

Lecz $\sum m_i y_i=my_0=0$ i $\sum m_i z_i=mz_0=0$, gdyż środek S masy m danego układu punktów leży z założenia w początku układu (x, y, z). Na mocy (12) i (13) jest więc $D'=D+m\zeta\eta$, a ponieważ $\zeta=\sigma_1$ i $\eta=\sigma_2$, więc otrzymujemy w końcu $D'=D+m\sigma_1\sigma_2$, c. b. d. d.

§ 4. Elipsoida bezwładności. Osie bezwładności. Niech $O(x, y, z)$ będzie dowolnym układem współrzędnych prostokątnych o początku O. Udowodnimy, że znając momenty bezwładności względem osi i momenty zboczenia względem płaszczyzn tego układu współrzędnych, można wyznaczyć momenty bezwładności względem dowolnej prostej l, przechodzącej przez O.



Niechaj prosta l tworzy z osiami układu współrzędnych $O(x, y, z)$ kąty α, β, γ. Obierzmy dowolny punkt $A(x, y, z)$ i niechaj P będzie rzutem punktu A na prostą l. Zatem $AP=r$ jest odległością punktu A od prostej l. Połóżmy

$$OA=\varrho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1}$$

Oznaczając przez φ kąt między prostą OA a prostą l, otrzymamy

$$AP=r=\varrho\sin\varphi. \tag{2}$$

Ponieważ, jak wiadomo z geometrii analitycznej,

$$OP=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma,$$

więc z uwagi na to, że $OP=\varrho\cos\varphi$, otrzymamy

$$\cos\varphi=\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\varrho}$$

Na mocy (2) jest $r^2=\varrho^2\sin^2\varphi=\varrho^2(1-\cos^2\varphi)$, więc

$$r^2=\varrho^2\left[1-\frac{(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2}{\varrho^2}\right]=\varrho^2-[x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma]^2,$$

skąd na mocy (1) jest $r^2=x^2[1-\cos^2\alpha]+y^2[1-\cos^2\beta]+z^2[1-\cos^2\gamma]-$ $-2xy\cos\alpha\cos\beta-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2yz\cos\beta\cos\gamma$.

Ponieważ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, więc podstawiając $1-\cos^2\alpha=$ $=\cos^2\beta+\cos^2\gamma$ i t. d., dostaniemy:

$$r^2=(y^2+z^2)\cos^2\alpha+(x^2+z^2)\cos^2\beta+(x^2+y^2)\cos^2\gamma-$$
$$-2xy\cos\alpha\cos\beta-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2yz\cos\beta\cos\gamma.$$

Oznaczając przez m_i masę, a przez r_i odległość punktu A_i danego układu punktów $A_1, A_2, \ldots$ od prostej l, otrzymamy na moment bezwładności I_l tego układu punktów względem prostej l wzór

$$I_l=\sum m_i r_i^2=\cos^2\alpha\sum m_i(y_i^2+z_i^2)+\cos^2\beta\sum m_i(x_i^2+z_i^2)+\cos^2\gamma\sum m_i(x_i^2+y_i^2)-$$
$$-2\cos\alpha\cos\beta\sum m_i x_i y_i-2\cos\alpha\cos\gamma\sum m_i x_i z_i-2\cos\beta\cos\gamma\sum m_i y_i z_i,$$

skąd

$$\begin{aligned}I_l&=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-\\&-2D_z\cos\alpha\cos\beta-2D_y\cos\alpha\cos\gamma-2D_x\cos\beta\cos\gamma.\end{aligned} \tag{I}$$

Ze wzoru (I) możemy wyznaczyć moment bezwładności układu punktów materialnych względem prostej l, znając $I_x, I_y, I_z, D_x, D_y, D_z$ oraz kąty, jakie prosta l tworzy z osiami układu współrzędnych.

Zachowując znakowanie poprzednie, oznaczmy przez k_l długość ramienia bezwładności danego układu punktów względem prostej l. Zatem (str. 160)

$$k_l = \sqrt{I_l/m}. \tag{3}$$

Załóżmy, że dla każdej prostej l przechodzącej przez O jest $I_l \neq 0$. Założenie to równoważne jest założeniu, że punkty materialne danego układu nie leżą na jednej i tej samej prostej przechodzącej przez O. Ponieważ $I_l \neq 0$, więc na mocy (3) jest również $k_l \neq 0$.

Odetnijmy na każdej prostej l odcinki OQ i OQ' o długości odwrotnie proporcjonalnej do ramienia bezwładności k_l, t. zn.

$$OQ = OQ' = a/k_l = a\sqrt{m/I_l}, \tag{4}$$

gdzie a jest dowolną stałą dodatnią, nie zależną od prostej l. Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu Q, mamy:

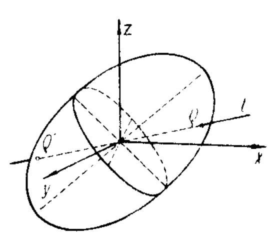
$$x = \pm a\sqrt{\frac{m}{I_l}}\cos\alpha, \qquad y = \pm a\sqrt{\frac{m}{I_l}}\cos\beta, \qquad z = \pm a\sqrt{\frac{I_l}{m}}\cos\gamma. \tag{5}$$

Punkt Q' ma współrzędne $-x, -y, -z$. Zbiór wszystkich punktów Q i Q' utworzy pewną powierzchnię Σ. Aby otrzymać jej równanie, wyznaczmy z (5) $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ i wstawmy otrzymane wartości do równania (I). Dostaniemy:

$$I_l = \frac{I_l}{ma^2}[I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2D_x yz - 2D_y xz - 2D_z xy],$$

skąd

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2D_x yz - 2D_y xz - 2D_z xy = c^2, \tag{6}$$



gdzie $c^2 = ma^2$. Widzimy stąd, że powierzchnia Σ jest powierzchnią rzędu drugiego. Wykażemy, że Σ jest elipsoidą. Wystarczy w tym celu udowodnić, że Σ jest powierzchnią ograniczoną (t. zn. że odległości jej punktów od początku układu współrzędnych nie przekraczają pewnej liczby). W rzeczy samej, założyliśmy, że $I_l \neq 0$, a więc mamy stale $I_l > 0$. Ponieważ na mocy wzoru (I) I_l jest funkcją ciągłą kątów α, β, γ, więc minimum I_l jest również dodatnie. Oznaczając to minimum przez h, mamy na mocy (3) $k_l \geqslant \sqrt{h/m}$, skąd na mocy (4) $OQ' = OQ \leqslant a\sqrt{m/h}$. A zatem powierzchnia Σ jest powierzchnią ograniczoną. Wynika stąd, że powierzchnia Σ jest elipsoidą, gdyż jedyną powierzchnią ograniczoną drugiego rzędu jest elipsoida.

Otrzymaną elipsoidę Σ nazywamy *elipsoidą bezwładności* danego układu punktów względem punktu O.

Ponieważ w równaniu (6) brak jest wyrazów pierwszego stopnia, t. j. y, x, z, więc punkt O jest środkiem elipsoidy bezwładności.

Zatem: *elipsoida bezwładności układu punktów materialnych względem punktu O ma tę własność, że odległość od O każdego jej punktu jest odwrotnie proporcjonalna do ramienia bezwładności układu względem średnicy, przechodzącej przez ten punkt.*

Osie elipsoidy bezwładności względem punktu O nazywamy *osiami bezwładności* względem punktu O.

Elipsoidę bezwładności względem środka ciężkości nazywamy elipsoidą bezwładności *środkową*, osie jej osiami bezwładności *środkowymi* a płaszczyzny przeprowadzone przez dwie osie *płaszczyznami środkowymi.*

Istnieje oczywiście nieskończenie wiele elipsoid bezwładności danego układu względem jednego i tego samego punktu O. Zależą one od wyboru współczynnika proporcjonalności. Wszystkie te elipsoidy mają jednak wspólny środek i wspólne kierunki osi głównych. Ponadto stosunek osi głównych jest we wszystkich elipsoidach jednakowy. Wszystkie elipsoidy bezwładności względem jednego i tego samego punktu O są więc do siebie podobne.

Ramię bezwładności ma największą wartość względem osi małej; zatem moment bezwładności ma najmniejszą wartość względem osi małej. Względem wielkiej osi jest na odwrót.

W szczególności, gdy elipsoida jest kulą, punkt O nazywamy punktem *kulistym.*

Momenty bezwładności względem każdej prostej przechodzącej przez punkt kulisty są równe (i na odwrót).

Wyznaczanie osi bezwładności. Jeżeli za osie spółrzędnych x, y, z przyjąć osie bezwładności, to równanie elipsoidy bezwładności będzie miało kształt

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = F. \tag{7}$$

Porównując równania (6) i (7), widzimy, że w tym przypadku $D_x = 0$, $D_y = 0$ i $D_z = 0$; równanie elipsoidy bezwładności będzie zatem

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = c^2. \tag{8}$$

A więc: *warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by osie układu współrzędnych były osiami bezwładności, jest by momenty zboczenia D_x, D_y, D_z były równe zeru.*

Jeżeli osie spółrzędnych x, y, z obierzemy tak, by tylko jedna z nich, np. oś z, pokrywała się z jedną z osi bezwładności, to równanie elipsoidy bezwładności przyjmie kształt

(9) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Exy = F.$$

Porównując równania (6) i (9), widzimy, że $D_x = 0$ i $D_y = 0$. Równanie elipsoidy bezwładności będzie więc w tym przypadku

(10) $$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2D_z xy = c^2.$$

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by oś z była osią bezwładności, jest by momenty zboczenia D_x i D_y były równe zeru.*

Łatwo sformułować analogiczne warunki na to, by osiami bezwzględności były oś x, lub oś y.

Przyjmijmy teraz za początek układu współrzędnych (x, y, z) środek S masy całkowitej m danego układu punktów materialnych, zaś jego osie środkowe za osie współrzędnych x, y, z. Mamy oczywiście:

(11) $$D_x = 0, \qquad D_y = 0, \qquad D_z = 0.$$

Przyjmijmy następnie dowolny punkt $O(\xi, \eta, \zeta)$ za początek nowego układu współrzędnych (x', y', z') o osiach odpowiednio równoległych do osi x, y i z. Na mocy (III), str. 162, będzie:

$$D_{x'} = D_x + m\zeta\eta, \qquad D_{y'} = D_y + m\xi\zeta, \qquad D_{z'} = D_z + m\xi\eta,$$

skąd na mocy (11):

(12) $$D_{x'} = m\zeta\eta, \qquad D_{y'} = m\xi\zeta, \qquad D_{z'} = m\xi\eta.$$

Załóżmy, że punkt $O(\xi, \eta, \zeta)$ leży na jednej z płaszczyzn środkowych, np. na płaszczyźnie xy. Zatem $\zeta = 0$. Na mocy więc (12) otrzymamy $D_{x'} = 0$ i $D_{y'} = 0$. Wynika stąd, że oś z' jest osią bezwładności względem punktu O. Mamy więc twierdzenie:

Jedna z osi bezwładności względem punktu położonego w płaszczyźnie środkowej jest prostopadła do tej płaszczyzny.

W szczególności, gdy punkt O leży na osi środkowej, np. na osi x, mamy $\eta=0$ i $\zeta=0$, skąd na mocy (12) $D_{x'}=0$, $D_{y'}=0$ i $D_{z'}=0$. Wynika stąd, że osie x', y', z' są osiami bezwładności względem punktu O. Otrzymujemy więc wnioski:

1⁰ *Osie bezwładności względem punktu położonego na osi środkowej są równoległe do osi środkowych.*

2⁰ *oś środkowa jest osią bezwładności względem każdego jej punktu.*

Jeżeli dany układ punktów materialnych posiada oś lub płaszczyznę symetrii, wówczas można dowieść następującego twierdzenia:

Oś symetrii układu punktów materialnych jest osią środkową; podobnie *płaszczyzna symetrii jest płaszczyzną środkową.*

Dowód. Aby dowieść pierwszej części twierdzenia, zauważmy, że na osi symetrii leży środek S masy m układu. Weźmy S za początek układu współrzędnych (x, y, z), a oś symetrii za oś z. Wobec tego dany układ punktów materialnych zawiera do każdego punktu A_i o masie m_i i współrzędnych x_i, y_i, z_i drugi punkt A_i' o masie równej m_i i o współrzędnych $-x_i$, $-y_i$, z_i. Mamy więc:

$$D_x=\sum[m_i y_i z_i+m_i(-y_i)z_i]=0, \qquad D_y=\sum[m_i x_i z_i+m_i(-x_i)z_i]=0.$$

Wynika stąd, że oś symetrii z jest zarazem osią bezwładności względem środka masy S, a zatem jest osią środkową.

Aby dowieść drugiej części twierdzenia, zauważmy, że na płaszczyźnie symetrii leży środek masy S. Przyjmijmy S za początek układu współrzędnych, zaś osie x i y obierzmy w płaszczyźnie symetrii. Ponieważ płaszczyzna xy jest płaszczyzną symetrii, więc do każdego punktu A_i o masie m_i i współrzędnych x_i, y_i, z_i istnieje w naszym układzie punktów materialnych punkt A_i' o masie równej m_i i o współrzędnych x_i, y_i, $-z_i$. Mamy więc:

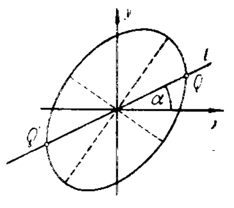
$$D_x=\sum[m_i y_i z_i+m_i y_i(-z_i)]=0, \qquad D_y=\sum[m_i x_i z_i+m_i x_i(-z_i)]=0.$$

Wynika stąd, że oś z jest osią środkową, a więc płaszczyzna symetrii xy, jako prostopadła do osi środkowej z, jest płaszczyzną środkową.

§ 5. Momenty kwadratowe układu płaskiego. Niech dany będzie układ punktów materialnych leżących w płaszczyźnie Π. Jako płaszczyzna symetrii jest więc płaszczyzna Π na mocy twierdzenia poprzedniego płaszczyzną środkową. W każdym punkcie płaszczyzny Π jedna z osi bezwładności jest tedy prostopadła do płaszczyzny Π, podczas gdy dwie pozostałe osie bezwładności leżą w płaszczyźnie Π.

Jeżeli wziąć pod uwagę tylko momenty bezwładności względem prostych leżących w płaszczyźnie Π, to rozważania §§ 3 i 4 można uprościć.

Obierzmy dany punkt O za początek układu współrzędnych (x, y) płaszczyzny Π. Wykreślmy z punktu O dowolną prostą l leżącą w tej płaszczyźnie i tworzącą kąt α z osią x-ów. Moment bezwładności względem l otrzymamy ze wzoru (1), str. 164, kładąc $\beta = 90^0 - \alpha$ i $\gamma = 90^0$. Zatem



(1) $$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - D_z \sin 2\alpha.$$

Moment zboczenia $D_{xy} = \Sigma m_i x_i y_i$ nazywać będziemy *momentem zboczenia względem osi x i y.*

Zaznaczmy na prostej l punkty Q i Q', których odległości od O są odwrotnie proporcjonalne do ramienia bezwładności. Zbiór takich par punktów zaznaczonych na wszystkich prostych l, jakie przechodzą przez O, utworzy krzywą, która będzie przekrojem płaszczyzny Π z elipsoidą bezwładności względem punktu O. Krzywa ta będzie zatem elipsą; nazywamy ją *elipsą bezwładności względem O.*

Równanie jej otrzymamy z równania (6), str. 165, kładąc $z=0$. A więc równaniem elipsy bezwładności będzie

(2) $$I_x x^2 + I_y y^2 - 2 D_z xy = c^2.$$

Jeżeli za osie x, y obierzemy osie bezwładności, to równanie elipsy bezwładności przyjmie postać

(3) $$I_x x^2 + I_y y^2 = c^2.$$