III. Układy ciał

§ 14. Warunki równowagi. Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu ciał sztywnych (swobodnych lub nie) jest, by każde ciało układu było w równowadze. Wynika stąd, że *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu ciał sztywnych jest, by dla każdego ciała z osobna siły działające na to ciało równoważyły się z reakcjami.*

Siły, z jakimi dwa ciała układu działają na siebie, nazywamy siłami *wewnętrznymi* układu. Pozostałe siły nazywamy *zewnętrznymi.*

Jeżeli np. dwa ciała układu stykają się z sobą, to reakcje w punktach zetknięcia są siłami wewnętrznymi. Natomiast te siły działające i reakcje, które pochodzą od ciał nie należących do układu (np. od podpór), są siłami zewnętrznymi.

Siły wewnętrzne występują parami i podlegają prawu akcji i reakcji, zatem suma i moment ogólny sił wewnętrznych jest zerem.

Jeżeli układ ciał jest w równowadze, to dla każdego ciała siły zewnętrzne, działające na to ciało, równoważą się z siłami wewnętrznymi. Wynika stąd, że siły zewnętrzne, działające na cały układ, równoważą się z siłami wewnętrznymi układu. Ponieważ (jak wyżej wspomnieliśmy) siły wewnętrzne mają sumę i moment ogólny równe zeru, więc *jeżeli układ ciał sztywnych jest w równowadze, to suma i moment ogólny sił zewnętrznych są zerami.*

Warunek ten jest tylko koniecznym, ale nie wystarczającym do równowagi układu ciał sztywnych.

Każda część układu ciał sztywnych, będącego w równowadze, jest oczywiście sama w równowadze. Siłami zewnętrznymi względem pewnej części układu są:

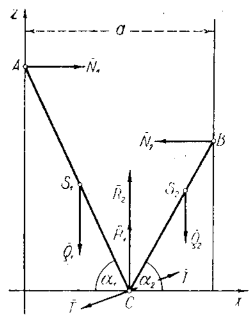
a) te siły zewnętrzne całego układu, które działają na daną jego część,

b) reakcje, wywierane na tę część przez pozostałe ciała układu.

Wynika stąd, że *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu ciał sztywnych jest, by siły zewnętrzne, działające na jakąkolwiek część układu, równoważyły się z reakcjami, wywieranymi na tę część przez pozostałe ciała układu.*

Możemy bowiem obrać za części układu poszczególne ciała układu.

Przykład. Dwa pręty ciężkie AC i BC, leżące w płaszczyźnie pionowej i stykające się w punkcie C, opierają się w A i B o ściany pionowe, zaś w C o ścianę poziomą. Dane są ciężary prętów $\bar{Q}_1$ i $\bar{Q}_2$, zaczepione w środkach ciężkości, oraz długości $l_1 = AC$, $l_2 = BC$, $a_1 = S_1C$, $a_2 = S_2C$ i odległość d ścian pionowych od siebie. Wyznaczyć w położeniu równowagi kąty α_1 i α_2, jakie pręty tworzą z poziomem, przy założeniu, że nie ma tarcia.



Oznaczmy: przez $\bar{N}_1$ i $\bar{N}_2$ reakcje ścian pionowych (reakcje te mają więc kierunek poziomy), przez $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ reakcje ściany poziomej (mające więc kierunek pionowy), wreszcie przez $\bar{T}$ siłę, z jaką pręt CB działa na pręt AC w punkcie C. Na mocy prawa akcji i reakcji pręt AC działa wówczas na pręt CB z siłą $-\bar{T}$. O kierunku siły $\bar{T}$ nie możemy nic z góry powiedzieć.

Obierzmy osie x i z w płaszczyźnie prętów, nadając osi x kierunek poziomy, zaś osi z kierunek pionowy w górę. Gdy pręt AC jest w równowadze, siły działające na ten pręt równoważą się. Tworząc zatem ich rzuty na osie x, z i obliczając moment względem C, otrzymamy:

(1) $$N_1 + T_x = 0, \qquad -Q_1 + R_1 + T_y = 0,$$

(2) $$N_1 l_1 \sin\alpha_1 - Q_1 a_1 \cos\alpha_1 = 0,$$

gdzie N_1, R_1 i Q_1 oznaczają wartości bezwzględne odpowiednich sił. Podobnie dla pręta CB dostaniemy:

(3) $$-N_2 - T_x = 0, \qquad -Q_2 + R_2 - T_y = 0,$$

(4) $$-N_2 l_2 \sin\alpha_2 + Q_2 a_2 \cos\alpha_2 = 0.$$

Z równań (2) i (4) mamy:

(5) $$N_1 = Q_1 a_1 \operatorname{ctg}\alpha_1 / l_1, \qquad N_2 = Q_2 a_2 \operatorname{ctg}\alpha_2 / l_2,$$

z pierwszych zaś równań (1) i (3) $N_1 = N_2$, skąd na mocy (5)

(6) $$Q_1 a_1 \operatorname{ctg}\alpha_1 / l_1 = Q_2 a_2 \operatorname{ctg}\alpha_2 / l_2.$$

Ponadto, jak widać z rysunku,

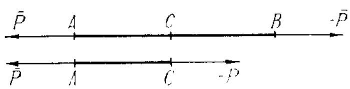
(7) $$l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos\alpha_2 = d.$$

Z równań (6) i (7) możemy wyznaczyć kąty α_1 i α_2.

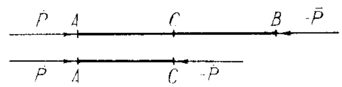
Uwaga. Z równań (1)-(4) nie możemy wyznaczyć sił $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ i $\bar{T}$. Możemy natomiast otrzymać siłę $\bar{T}'=\bar{R}_1+\bar{T}$ i $\bar{T}''=\bar{R}_2-\bar{T}$. Są to wypadkowe reakcyj, działających w C na pręty. Dostaniemy:

$$T'_x = T_x = -N_1, \qquad T'_y = R_1 + T_y = Q_1,$$
$$T''_x = -T_x = N_2, \qquad T''_y = R_2 - T_y = Q_2.$$

§ 15. Układy prętów. Jeżeli na pręt sztywny działają dwie siły, zaczepione w jego końcach A i B, i pręt jest w równowadze, to siły te (z uwagi na to, że ich suma i moment ogólny równają się zeru) działają wzdłuż pręta, są równe co do wielkości i skierowane przeciwnie. Oznaczmy te siły przez $\bar{P}$ i $-\bar{P}$.



1.



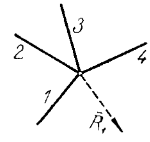
2.

Napięcia w prętach. Przetnijmy pręt w jakimś punkcie C i usuńmy prawą jego część CB (rys. 1). Aby teraz lewa część pręta pozostała w równowadze, należałoby dołączyć siłę $-\bar{P}$ o początku w C. Możemy zatem przyjąć, że część prawa CB oddziaływa na część lewą AC z siłą $-\bar{P}$. Siłę tę nazywamy *napięciem* pręta.

Gdy siły $\bar{P}$ i $-\bar{P}$ skierowane są ku sobie, napięcie nazywamy *ściskaniem* (rys. 1), w przeciwnym razie *rozciąganiem* (rys. 2).

Napięcie ma w każdym punkcie pręta tą samą wielkość i kierunek; zwrot zaś napięcia będzie zależał od tego, czy idzie o oddziaływanie części prawej na lewą, czy przeciwnie. Co do końca pręta, to możemy mówić tylko o oddziaływaniu całego pręta na koniec. Jeżeli więc podamy wielkość napięcia i jego rodzaj (t. zn. czy jest ono ściskaniem czy rozciąganiem), to napięcia w końcach prętów będą w zupełności określone.

Połączenia przegubowe. Wyobraźmy sobie kilka prętów sztywnych tak ze sobą połączonych, że muszą się one stale ze sobą stykać pewnymi punktami, np. końcami. Jeżeli poza tym połączenie to nie powoduje innych ograniczeń ruchu prętów, powiadamy, że pręty są *połączone przegubowo*, a punkty, w których pręty stykają się jeden z drugim, nazywamy *przegubami*.



3.

Połączenie przegubowe możemy otrzymać w przybliżeniu, łącząc np. końce prętów bardzo krótką nicią nierozciągliwą.

Reakcje, z jakimi jeden pręt działa na drugi, możemy zastąpić w myśl twierdzenia o redukcji przez jedną siłę $\overline{R}$, zaczepioną w punkcie styku oraz przez parę sił o momencie $\overline{M}$.

Dla prostoty zakładać będziemy, że $\overline{M}=0$. Mówimy wówczas, że *przegub jest gładki*.

Zaznaczyć należy, że nie zawsze możemy założyć gładkość przegubu; przykłady na to podamy później (str. 297).

W przypadku przegubu gładkiego reakcja, z jaką jeden pręt oddziaływa na drugi, jest siłą zaczepioną w punkcie zetknięcia, t. j. w przegubie. W szczególności, jeżeli w przegubie gładkim schodzi się kilka prętów, to reakcja wywierana na pewien pręt przez pozostałe będzie siłą zaczepioną w punkcie przegubu (np. reakcja $\overline{R}_1$ prętów 2, 3, 4 na pręt 1, przedstawiona na rysunku).

Układy prętów. Weźmy pod uwagę układ prętów połączonych w końcach. Jeżeli jakaś siła zewnętrzna zaczepiona jest w przegubie, to należy wówczas zaznaczyć wyraźnie, na który pręt działa ta siła.

Gdy układ prętów jest w równowadze, siły działające na każdy pręt muszą się oczywiście równoważyć z reakcjami wywieranymi na ten pręt.

Na rys. 1, str. 294, przedstawiony jest układ prętów, w którym na pręt AB działają siły zewnętrzne $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ i $\overline{P}_3$. Siła $\overline{P}_1$ zaczepiona jest w końcu A pręta. Siły te równoważą się z reakcjami $\overline{R}_1$ i $\overline{R}_2$ w końcach A i B.

Często dogodnym jest uważać przegub za odrębny punkt materialny (za odrębne ciało), połączony z końcami prętów schodzących się w tym przegubie. Innymi słowy, zakłada się wówczas, że końce prętów nie są połączone z sobą bezpośrednio, lecz za pośrednictwem przegubu. Przy tym założeniu reakcje stykających się prętów zastępuje się reakcjami przegubu na te pręty, a siły zaczepione w przegubie uważa się za siły działające na przegub, a nie na pręty. Jedynymi siłami wewnętrznymi układu prętów będą wtedy reakcje przegubów na pręty i prętów na przeguby.

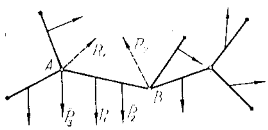
W przypadku równowagi układu każdy pręt i przegub jest w równowadze, zatem (str. 290):

1° *siły zewnętrzne, działające na dowolny pręt* (nie zaczepione w przegubie) *równoważą się z reakcjami, jakie przeguby na ten pręt wywierają;*

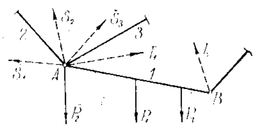
2° *siły zewnętrzne, zaczepione w którymkolwiek przegubie, równoważą się z reakcjami prętów na ten przegub.*

Na rys. 2 siła $\overline{P}_2$ o początku w przegubie A równoważy się z reakcjami $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$ prętów 1, 2, 3 na przegub A. Siły zaś zewnętrzne $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$ działające na pręt AB równoważą się z reakcjami $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ przegubów A i B na ten pręt.

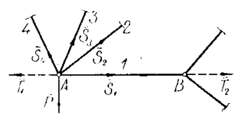
O kierunkach reakcji przegubów na pręty nie możemy na ogół nic z góry powiedzieć. Inaczej jednak przedstawia się sprawa, gdy siły zewnętrzne zaczepione są tylko w przegubach.



1.



2.



3.

Weźmy pod uwagę taki właśnie układ prętów, pozostający w równowadze (rys. 3). Niech $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ oznaczają reakcje przegubów A i B na pręt łączący te przeguby. Ponieważ na pręt nie działają żadne siły zewnętrzne, więc reakcje $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ muszą się równoważyć (wynika to z warunku 1^0). Reakcje działają więc wzdłuż pręta i mamy $\overline{T}_1 = -\overline{T}_2$.

A więc: *jeżeli układ prętów połączonych przegubowo jest w równowadze, a siły zewnętrzne zaczepione są tylko w przegubach, to reakcje przegubów na pręty są siłami skierowanymi wzdłuż prętów; reakcje, z jakimi oddziałują na pręt przeguby, które ten pręt łączy, są równe co do wielkości i kierunku, a zwroty mają przeciwne.*

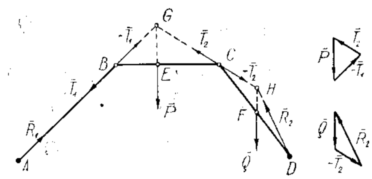
Reakcje przegubów A i B wywołują w pręcie napięcie, które może być rozciąganiem lub ściskaniem (w naszym przypadku napięcie jest rozciąganiem). Na mocy prawa akcji i reakcji pręt AB działa na przegub A z siłą $\overline{S}_1 = -\overline{T}_1$. Siła $\overline{S}_1$ jest więc napięciem pręta w końcu A. Reakcje prętów na przeguby są tedy równe napięciom tych prętów. Z warunku 2^0 wynika więc tw. następujące:

Siły zewnętrzne zaczepione w przegubie równoważą się z napięciami prętów (schodzących się w tym przegubie).

Na rys. 3 napięcia $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3, \overline{S}_4$ prętów 1, 2, 3, 4 równoważą się z siłą $\overline{P}$, zaczepioną w przegubie A; jest więc $\overline{P} + \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3 + \overline{S}_4 = 0$.

Przykład 1. Trzy pręty AB, BC i CD, połączone przegubowo w punktach B i C, unieruchomione zaś (również przegubowo) w punktach A i D, pozostają w równowadze w płaszczyźnie pionowej pod działaniem sił pionowych $\overline{P}$ i $\overline{Q}$ o początkach E i F. Dane są: siła $\overline{P}$ oraz punkty zaczepienia E i F. Wyznaczyć siłę $\overline{Q}$.

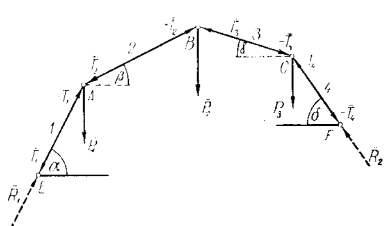
Na pręt AB działa w punkcie A reakcja $\bar{R}_1$ i w punkcie B reakcja $\bar{T}_1$ pręta BC. Mamy $\bar{R}_1+\bar{T}_1=0$, reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{T}_1$ działają więc wzdłuż pręta AB.



Na pręt BC działa reakcja $-\bar{T}_1$, siła $\bar{P}$ i reakcja $\bar{T}_2$ pręta CD w punkcie C. Ponieważ pręt BC jest w równowadze, więc kierunki tych sił przecinają się w jednym punkcie G, który znajdziemy jako punkt przecięcia prostej AB i kierunku siły $\bar{P}$. Mając punkt G, możemy otrzymać kierunek CG reakcji $\bar{T}_2$. Ponieważ $-\bar{T}_1+\bar{P}+\bar{T}_2=0$, więc znając kierunki sił $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ i siłę $\bar{P}$, możemy wyznaczyć z trójkąta sił siły $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$.

Na pręt CD działają reakcje $-\bar{T}_2$ i $\bar{R}_2$ oraz siła $\bar{Q}$. Siły te przecinają się w jednym punkcie H, który otrzymamy, jako punkt przecięcia się kierunków sił $-\bar{T}_2$ i $\bar{Q}$. Mając punkt H, otrzymamy kierunek siły $\bar{R}_2$. Ponieważ $-\bar{T}_2+\bar{Q}+\bar{R}_2=0$, więc znając $\bar{T}_2$, otrzymujemy z trójkąta sił siły $\bar{Q}$ i $\bar{R}_2$.

Przykład 2. Cztery pręty 1, 2, 3 i 4 są połączone przegubowo w A, B i C, zaś unieruchomione w łożyskach przegubowych E i F. Pręty są nachylone do poziomu pod kątami α, β, γ i δ. W przegubach A, B i C zaczepione są siły pionowe $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$. Dana jest siła $\bar{P}_1$. Wyznaczyć siły $\bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$ oraz reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w E i F.



Ponieważ siły zewnętrzne zaczepione są tylko w przegubach, więc w każdym przegubie napięcia prętów równoważą się z siłami zewnętrznymi zaczepionymi w tym przegubie.

W przegubie E napięcie $\bar{T}_1$ pręta 1 równoważy się z reakcją $\bar{R}$: $\bar{T}_1+\bar{R}_1=0$.

W przegubie A napięcia $-\bar{T}_1$ pręta 1 i $\bar{T}_2$ pręta 2 równoważą się z siłą $\bar{P}_1$: $-\bar{T}_1+\bar{T}_2+\bar{P}_1=0$. Oznaczając przez T_1, T_2 i P_1 wartości bezwzględne tych sił i tworząc ich rzuty na kierunki pionowy i poziomy, otrzymamy:

$$T_1\cos\alpha-T_2\cos\beta=0, \qquad T_1\sin\alpha-T_2\sin\beta-P_1=0.$$

Z równań tych obliczamy T_1 i T_2.

W przegubie B dla napięcia $\bar{T}_3$ pręta 3 dostaniemy związek $-\bar{T}_2+\bar{T}_3+\bar{P}_2=0$. Tworząc rzuty na kierunek poziomy i pionowy oraz kładąc $T_3=|\bar{T}_3|$ i $P_2=|\bar{P}_2|$, otrzymamy:

$$T_2\cos\beta - T_3\cos\gamma=0, \qquad T_2\sin\beta+T_3\sin\gamma-P_2=0.$$

Z równań tych wyznaczamy T_3 i P_2.

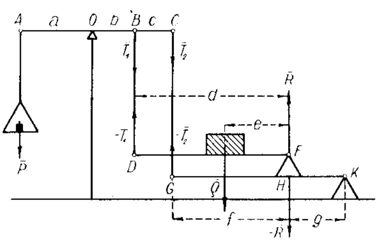
W przegubie C dostaniemy przy analogicznym znakowaniu:

$$T_3\cos\gamma - T_4\cos\delta=0, \qquad -T_3\sin\gamma+T_4\sin\delta-P_3=0,$$

skąd obliczymy T_4 i P_3.

W przegubie F otrzymamy wreszcie $-\bar{T}_4+\bar{R}_2=0$ czyli $\bar{R}_2=\bar{T}_4$.

Przykład 3. Waga dziesiętna. Belka AC, podparta w O, połączona jest w punktach B i C z belkami DF i GK przy pomocy prętów BD i CG. Belka DF, podparta w punkcie F, opiera się w punkcie H na belce GK, podpartej w K. W punktach B, C, G i D połączenia są przegubowe.



Na belce DF kładziemy ciężar $\bar{Q}$, który mamy zważyć, i równoważymy go ciężarkiem $\bar{P}$, położonym na szalce zawieszonej w A. Ciężary belek i prętów pomijamy. Wyznaczyć związek między ciężarami $\bar{P}$ i $\bar{Q}$.

Oznaczmy przez $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ napięcia prętów BD i CG w punktach B i C.

Gdy belka AC jest w równowadze, suma momentów sił na nią działających względem O równa jest zeru:

$$(8) \qquad -Pa+bT_1+(b+c)T_2=0,$$

gdzie $P=|\bar{P}|$, $T_1=|\bar{T}_1|$ i $T_2=|\bar{T}_2|$, zaś długości a, b i c mają znaczenie takie jak na rysunku.

Na belkę DF działają: napięcie $-\bar{T}_1$ pręta BD w punkcie D, ciężar $\bar{Q}$ oraz reakcja $\bar{R}$ w punkcie F. Tworząc rzuty na kierunek pionowy oraz moment względem F, otrzymamy w położeniu równowagi belki DF:

$$(9) \qquad T_1+R-Q=0, \qquad T_1d-Qe=0,$$

gdzie $R=|\bar{R}|$ i $Q=|\bar{Q}|$, zaś długości d i e mają znaczenie podane na rysunku.

Na belkę GK działa napięcie $-\bar{T}_2$ pręta CG w punkcie G oraz reakcja $-\bar{R}$ belki DF w punkcie H. Tworząc moment tych sił względem punktu oparcia K, otrzymamy

(10) $$T_2(f+g)-Rg=0.$$

Z równań (9) otrzymujemy:

$$T_1=Q\cdot\frac{e}{d},\qquad R=Q\cdot\frac{d-e}{d},$$

skąd na mocy równania (10)

$$T_2=Q\cdot\frac{d-e}{d}\cdot\frac{g}{f+g}.$$

Podstawiając otrzymane wartości w równanie (8) zamiast T_1 i T_2, otrzymujemy

(11) $$P=Q\cdot\frac{(bf-cg)\,e+(b+c)\,gd}{ad\,(f+g)}.$$

Jeżeli przyjmiemy, że $bf-cg=0$ czyli

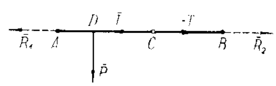
(12) $$b/c=g/f,$$

to P będzie niezależne od e, t. zn. od tego, w którym miejscu dźwigni DF umieścimy ciężar $\bar{Q}$. Na mocy (11) i (12) jest wtedy

$$P=Q\cdot\frac{b}{a}.$$

Dla $b/a=1/10$ mamy *wagę decymalną* czyli *dziesiętną*.

Przykład 4. Dwa pręty unieruchomione w końcach A i B, zaś połączone przegubowo w C, leżą na jednej prostej. Na pręt AC działa siła $\bar{P}$ o początku D, prostopadła do AC. Układ prętów jest w równowadze, ponieważ punkt C nie może zmienić swego położenia.



Przypuśćmy na chwilę, że pręt AC działa na CB z siłą $\bar{T}$ o początku w C. Zatem pręt CB działałby na pręt AC z siłą $-\bar{T}$, również zaczepioną w C.

Oznaczmy przez $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ reakcje w A i B.

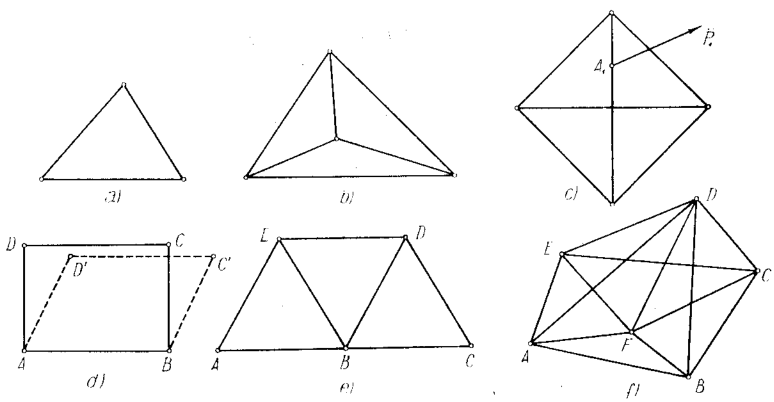
Ponieważ pręt CB jest w równowadze, więc siły $\bar{R}_2$ i $\bar{T}$ działają wzdłuż pręta AB. Wynika stąd, że pręt AC nie może być w równowadze, bo siły $-\bar{T}$, $\bar{R}_1$ i $\bar{P}$, działające na ten pręt, nie równoważą się, gdyż ich moment ogólny względem A równy jest różnemu od zera momentowi siły $\bar{P}$ względem A. Doszliśmy więc do sprzeczności.

Musimy zatem przyjąć, że pręt AC działa na pręt CB z siłą równoważną jednej sile i parze sił o momencie różnym od zera.

§ 16. Kratownice. Układ prętów sztywnych, połączonych przegubowo i tworzących jako całość ciało sztywne, nazywamy *kratownicą przestrzenną*.

Przykładem kratownicy (przestrzennej) jest układ trzech prętów, połączonych przegubowo i tworzących trójkąt (rys. a)), lub układ sześciu prętów, tworzących krawędzie czworościanu (rys. b)). Natomiast układ prętów, tworzących krawędzie prostopadłościanu i połączonych przegubowo w wierzchołkach, nie jest kratownicą, gdyż pręty mogą zmieniać położenie względem siebie.

Przeguby kratownicy nazywamy także *węzłami*.



Kratownica płaska. Jeżeli układ prętów sztywnych, połączonych przegubowo, leży w jednej płaszczyźnie i pręty nie mogą w tej płaszczyźnie zmieniać wzajemnego położenia, to układ taki nazywamy *kratownicą płaską*.

Przykłady kratownic płaskich przedstawiają rys. a), b), c), e) i f).

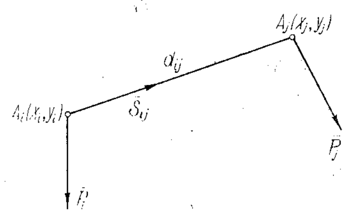
Układ prętów na rys. d) nie tworzy kratownicy, nawet płaskiej, bo pręty mogą zmieniać położenie względem siebie; mogą np. przyjąć położenie oznaczone kreską przerywaną.

Kratownica płaska nie musi tworzyć układu sztywnego, jeżeli dopuścimy ruchy prętów w przestrzeni. Jeżeli np. w kratownicy na rys. e) unieruchomimy przeguby B, C, D i E, to możemy pręty AE i AB obracać w przestrzeni około EB. Natomiast w płaszczyźnie kratownicy pręty AE i AB nie mogą się poruszyć.

Jeżeli w kratownicy przedstawionej na rys. f) usuniemy pręt AB, to w płaszczyźnie jej układ prętów pozostanie nadal utworem sztywnym, t. j. kratownicą. Pręt taki nazywamy prętem *nadliczbowym*.

Kratownica przedstawiona na rys. e) nie ma prętów nadliczbowych.

Wyznaczanie napięć w kratownicy (przy pomocy rachunku). Kratownica płaska ma p prętów i w węzłów $A_1, A_2, \dots, A_w$, w których zaczepione są siły zewnętrzne $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_w$. Gdy węzeł A_i, jest połączony prętem z węzłem A_j, oznaczamy przez d_{ij} długość tego pręta, a przez S_{ij} liczbę, której wartość bezwzględna równa się wielkości napięcia w tym pręcie, znak zaś jest + lub — zależnie od tego, czy napięcie jest rozciąganiem czy ściskaniem (str. 292).



Obierzmy dowolny układ współrzędnych i oznaczmy przez $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_w, y_w$ współrzędne węzłów $A_1, A_2, \dots, A_w$. Z określenia liczby S_{ij} wynika, że dla $i = 1, 2, \dots, w$ napięcie pręta w węźle A_i ma na osie układu rzuty:

$$\frac{x_j - x_i}{d_{ij}} S_{ij}, \qquad \frac{y_j - y_i}{d_{ij}} S_{ij}.$$

Ponieważ w węźle A_i siła zewnętrzna $\overline{P}_i$ równoważy się z napięciami prętów stykających się w tym węźle (str. 294), więc:

$$P_{i_x} + \sum_j{}' \frac{x_j - x_i}{d_{ij}} S_{ij} = 0, \qquad P_{i_y} + \sum_j{}' \frac{y_j - y_i}{d_{ij}} S_{ij} = 0$$

czyli

(1) $$P_{i_x} = \sum_j{}' \frac{x_i - x_j}{d_{ij}} S_{ij}, \qquad P_{i_y} = \sum_j{}' \frac{y_i - y_j}{d_{ij}} S_{ij},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie takie wskaźniki j, dla których węzeł A_j jest połączony prętem z węzłem A_i. Ponieważ z założenia jest w węzłów, więc układ (1) składa się z $2w$ równań.

Równania (1) służą do wyznaczania napięć S_{ij}, gdy dane są siły $\overline{P}_i$. Może się jednak zdarzyć, że układ (1) rozwiązania nie posiada lub że równań jest za mało do wyznaczenia niewiadomych S_{ij}.

Np. w kratownicy przedstawionej na rys. c), str. 298, pręty stykające się w węźle A_1 leżą na jednej prostej, zaś siła zewnętrzna $\overline{P}_1$ zaczepiona w tym węźle nie leży na tej prostej. Napięcia w tych prętach nie mogą zrównoważyć siły $\overline{P}_1$. Układ równań (1) dla tej kratownicy nie ma więc rozwiązania (str. 297).

W kratownicy na rys. f), str. 298, prętów mamy 13, a wierzchołków 6. Niewiadomych napięć jest zatem 13, a równań w układzie (1) jest tylko $2 \cdot 6 = 12$. A więc równań jest za mało.

Oznaczmy w równaniach (1) prawe strony pierwszych równań przez E_i, a drugich przez F_i. Równania (1) przyjmą wtedy postać:

(2) $$P_{i_x} = E_i, \qquad P_{i_y} = F_i.$$

Łatwo można sprawdzić rachunkowo, że:

(3) $$\sum_{i=1}^{w} E_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{w} F_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{w} (E_i y_i - F_i x_i) = 0.$$

Równości (3) są tożsamościami, t. zn. zachodzą dla wszelkich wartości S_{ij}.

Tożsamości (3) można wyprowadzić również bez rachunku w sposób następujący:

Obierzmy S_{ij} zupełnie dowolnie, a P_{i_x} i P_{i_y} wyznaczmy z równań (1). Ponieważ równania te wyrażają, że w każdym węźle napięcia prętów równoważą się z siłami zewnętrznymi, więc tak wyznaczone siły będą w równowadze (str. 293). Zatem siły zewnętrzne będą w równowadze, t. j. będą zachodziły równości:

(4) $$\sum_{i=1}^{w} P_{i_x} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{w} P_{i_y} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{w} (P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) = 0.$$

Wynika stąd na mocy (2), że związki (3) muszą być spełnione tożsamościowo dla wszelkich wartości S_{ij}.

Załóżmy teraz, że dla pewnej kratownicy równania (1) mają rozwiązania dla każdego układu sił $\{\overline{P}_i\}$ równoważnego zeru. Załóżmy dalej, że prawe strony równań (1) spełniają tożsamościowo jakiś związek liniowy kształtu

(5) $$a_1 E_1 + a_2 E_2 + \ldots + b_1 F_1 + b_2 F_2 + \ldots = 0,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots$ i $b_1, b_2, \ldots$ są pewnymi stałymi.

Niech układ sił $\{\overline{P}_i\}$ będzie równoważny zeru; równania (1) mają więc rozwiązanie. Na mocy (2) i (5) siły $\{\overline{P}_i\}$ muszą zatem spełniać związek

(6) $$a_1 P_{1_x} + a_2 P_{2_x} + \ldots + a_w P_{w_x} + b_1 P_{1_y} + b_2 P_{2_y} + \ldots + b_w P_{w_y} = 0.$$

A więc, jeżeli siły $\{\overline{P}_i\}$ spełniają równania (4), to spełniają również równanie (6). Związek (6) jest tedy zależny od związków (4). Wynika stąd, że związek (5) jest zależny od związków (3).

Prawe strony równań (1) spełniają zatem tylko trzy związki niezależne (3). Układ równań (1) ma więc $2w-3$ równań niezależnych (trzy zaś równania są zależne od pozostałych). Niewiadomych musi być co najmniej tyle, ile równań niezależnych, a więc $\geqslant 2w-3$. Ponieważ niewiadomych S_{ij} jest tyle ile prętów, czyli p, więc

(7) $$p \geqslant 2w-3.$$

W przypadku, gdy $p > 2w-3$, równań niezależnych jest mniej niż niewiadomych; istnieje wtedy nieskończenie wiele rozwiązań. W przypadku zaś, gdy $p = 2w-3$, niewiadomych jest tyle, ile równań liniowo niezależnych; zatem napięcia S_{ij} są wówczas wyznaczone jednoznacznie.

Kratownicę nazywamy *wyznaczalną statycznie*, jeżeli równania (1) wyznaczają jednoznacznie napięcia S_{ij} prętów dla każdego układu sił $\{\overline{P}_i\}$ będącego w równowadze. Udowodniliśmy zatem twierdzenie:

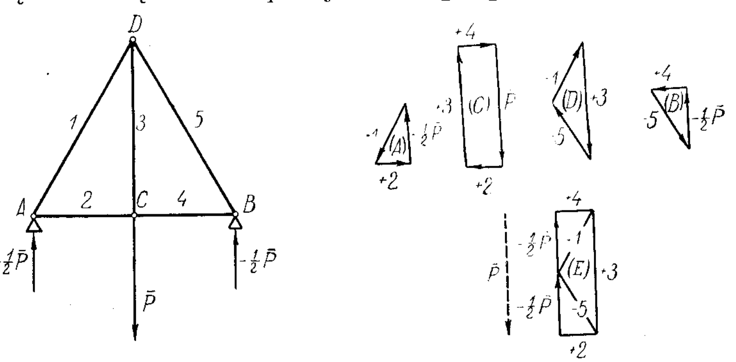
I. *Jeżeli kratownica jest wyznaczalna statycznie, to* $p = 2w-3$ (gdzie p oznacza liczbę prętów, a w liczbę węzłów).

Można dowieść twierdzenia:

II. *Kratownica wyznaczalna statycznie nie posiada prętów nadliczbowych.*

Warunki wypowiedziane w tw. I i II są koniecznymi, ale nie dostatecznymi na to, aby kratownica była wyznaczalna statycznie (p. rys. c), str. 298).

Wyznaczanie napięć w kratownicy (przy pomocy planów sił). Mamy wyznaczyć napięcia prętów w kratownicy przedstawionej na rysunku. Węzły oznaczone są literami A, B, C i D, a pręty liczbami 1, 2, 3, 4 i 5. Kratownica obciążona jest siłą pionową $\overline{P}$ w węźle C i spoczywa na podporach gładkich A i B.



Wyznaczmy najpierw reakcje w A i B. Ze względu na symetrię, każda z reakcyj wynosi $-\overline{P}/2$.

Na węzeł A działa siła zewnętrzna $-\overline{P}/2$ i napięcia prętów 1 i 2. Ponieważ siły te równoważą się, więc tworzą wielobok zamknięty, który możemy narysować, znając siłę $-\overline{P}/2$ i kierunki napięć. Wielobok ten przedstawiony jest na rys. (A); napięcia oznaczone są liczbami 1 i 2, a znaki przed liczbami oznaczają czy napięcie jest rozciąganiem (+) czy ściskaniem (—).

Na węzeł C działają napięcia prętów 2, 3 i 4, równoważące się z siłą $\overline{P}$. Ponieważ nieznane są tylko dwie siły, mianowicie napięcia prętów 3 i 4, więc możemy narysować wielobok sił, pamiętając o tym, że napięcie pręta 2 w węźle C ma zwrot przeciwny niż w węźle A. Wielobok ten przedstawiony jest na rysunku (C).

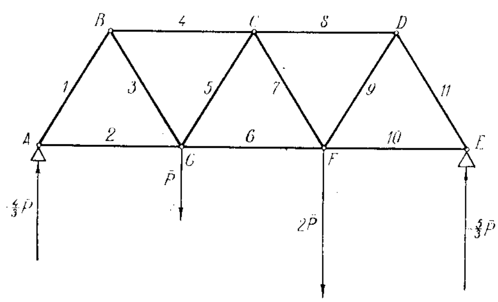
Na węzeł D nie działają żadne siły zewnętrzne, zaczepione w tym węźle, zatem napięcia się równoważą. Tworzą więc one wielobok zamknięty, który możemy narysować (rys D), pamiętając o tym, że napięcia prętów 1 i 3 w węźle D mają zwroty przeciwne niż w A i C.

Wyznaczyliśmy napięcia we wszystkich prętach. Dla sprawdzenia można jeszcze zbudować wielobok dla węzła B (rys. (B)).

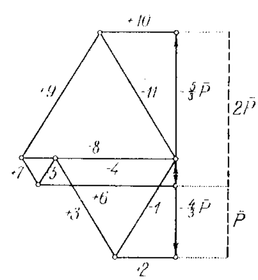
Postępując w ten sposób, nakreśliliśmy każdą siłę dwa razy. Można jednak wprowadzić uproszczenie, polegające na tym, że wszystkie wieloboki (A), (B), (C) i (D) rysujemy łącznie, jak na rys. (E).

W rysunku tym każda siła występuje raz tylko; rysunek taki nazywamy *planem sił Cremony* dla danej kratownicy.

Pewne wskazówki, jak można otrzymać plan sił Cremony, podamy na przykładzie następującym:



1.



2.

Rys. 1 przedstawia kratownicę, a rys. 2 jej plan sił Cremony. Kratownica obciążona jest w węzłach G i F siłami $\overline{P}$ i $2\overline{P}$. W węzłach A i E spoczywa ona na podporach gładkich. Pręty 2, 6 i 10 są poziome i równej długości. Obliczając moment sił zewnętrznych względem E i A, otrzymamy, że reakcja w A wynosi $-\frac{4}{3}\overline{P}$, zaś w E wynosi $-\frac{5}{3}\overline{P}$.

Kreślimy teraz wielobok sił zewnętrznych w takim porządku, w jakim występują one na obwodzie kratownicy. Idąc np. w kierunku wskazówek zegara, kreślimy po kolei $-\frac{4}{3}\overline{P}$, $-\frac{5}{3}\overline{P}$, $2\overline{P}$ i $\overline{P}$.

Następnie budujemy wielobok dla węzła A. Zauważmy, że pręt 2 łączy węzły A i G, w których zaczepione są siły zewnętrzne $-\frac{4}{3}\overline{P}$ i $\overline{P}$. Na planie sił napięcie pręta 2 rysujemy z początku siły $-\frac{4}{3}\overline{P}$ i końca siły $\overline{P}$. Zwrot sił w wieloboku dla węzła A określa siła $-\frac{4}{3}\overline{P}$. Otrzymujemy napięcia prętów 1 i 2 i zaznaczamy, że w pręcie 1 jest ściskanie (—) zaś w 2 rozciąganie (+).

Przechodzimy teraz do węzła, gdzie są dwa tylko napięcia niewiadome. Węzłem takim jest B. Wyznaczamy wielobok napięć w węzłach 1, 3 i 4. Zwrot sił otrzymamy, wiedząc z poprzedniego wieloboku, że w pręcie 1 występuje ściskanie.

Przechodzimy następnie do węzła G, w którym są tylko dwa napięcia niewiadome, mianowicie napięcia prętów 5 i 6. Postępując tak dalej, przechodzimy kolejno węzły C, F, D i E.

Przy sporządzaniu planu sił Cremony należy trzymać się dwóch reguł następujących:

1. Siły zewnętrzne w wieloboku sił rysujemy na planie w takim porządku, w jakim występują one na obwodzie kratownicy.

2. Jeżeli pręt na obwodzie kratownicy łączy węzły, które są początkami sił zewnętrznych, to napięcie pręta rysujemy na planie sił z punktu, w którym koniec jednej siły zewnętrznej schodzi się z początkiem drugiej.

Zauważmy, że plan sił Cremony, przedstawiony na rys. 2, str. 302, ma jeszcze następujące dwie własności:

(a) siły działające na węzeł tworzą na planie wielobok zamknięty,

(b) jeżeli trzy pręty tworzą trójkąt, to na planie napięcia ich wychodzą z jednego punktu.

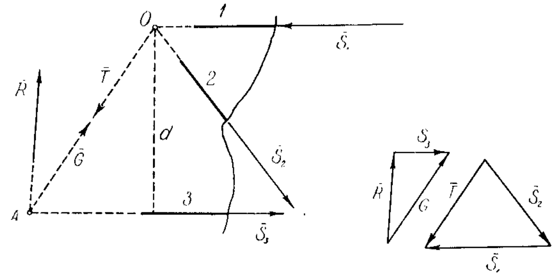
Plan sił Cremony, mający powyższe dwie własności, nazywa się *planem sił odwrotnym*.

Nazwa ta stoi w związku z t. zw. teorią figur odwrotnych.

Należy zwrócić uwagę, że nie dla każdej kratownicy wyznaczalnej statycznie można zbudować plan sił Cremony.

W y z n a c z a n i e   n a p i ę ć   z   p o m o c ą   p r z e k r o j ó w. Przypuśćmy, że kratownica daje się przeciąć przez trzy pręty nie wychodzące z jednego węzła, w taki sposób, by rozpadła się na dwie części. Jeżeli choć dwa z przeciętych prętów nie są równoległe, to w prętach przeciętych można wyznaczyć napięcia bez obliczania napięć w pozostałych prętach.

Oznaczmy pręty przecięte przez 1, 2, 3. Jeżeli usunąć jedną część kratownicy, np. prawą, to lewa pozostanie w równowadze po dołączeniu napięć $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$.



1. 2.

Niech pręty 1 i 2 przecinają się w punkcie O (rys. 1). Ponieważ lewa część kratownicy jest w równowadze, więc siły zewnętrzne działające na tę część równoważą się z napięciami $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$. Oznaczając przez $\bar{M}$ moment sił zewnętrznych (działających na lewą część kratownicy) względem O, a przez d odległość O od pręta 3, dostaniemy $|\bar{M}|=|\bar{S}_3|d$ czyli $|\bar{S}_3|=|\bar{M}|/d$.

Zwrot siły $\bar{S}_3$ obieramy tak, by $\bar{M}$ i moment siły $\bar{S}_3$ względem O miały znaki przeciwne. Moment $\bar{M}$ możemy otrzymać, wyznaczając najpierw wypadkową $\bar{R}$ (ewentualnie parę wypadkową) sił zewnętrznych, działających na lewą część, a następnie obliczając moment wypadkowy $\bar{R}$ (lub parę wypadkową) względem O. Podobnie obliczamy $\bar{S}_2$ oraz $\bar{S}_1$, tworząc moment względem punktu przecięcia prętów 1 i 3 oraz 2 i 3.

Gdyby pręty 1 i 3 były równoległe, to siłę $\bar{S}_2$ otrzymalibyśmy, tworząc rzuty sił na prostą prostopadłą do prętów 1 i 3 (rzuty sił $\bar{S}_1$ i $\bar{S}_3$ będą bowiem zerami).

Opisana powyżej metoda obliczania napięć podana została przez J. W. Rittera. Napięcia $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$ można również wyznaczyć graficznie metodą podaną przez K. Culmanna.

Niech pręty 1 i 2 przecinają się w O, niech siły zewnętrzne mają wypadkową $\bar{R}$ i niech $\bar{R}$ i $\bar{S}_3$ przecinają się w punkcie A. Oznaczmy przez $\bar{T}$ wypadkową sił $\bar{S}_1$ i $\bar{S}_2$, a przez $\bar{G}$ wypadkową sił $\bar{R}$ i $\bar{S}_3$.

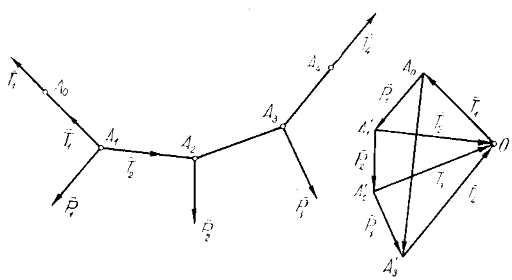
Ponieważ siły $\bar{R}$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$ są w równowadze, więc siły $\bar{T}$ i $\bar{G}$ również są w równowadze. Wynika stąd, że $\bar{T}=-\bar{G}$ i że siły $\bar{T}$ i $\bar{G}$ leżą na jednej prostej. Ponieważ $\bar{T}$ ma początek w O, zaś $\bar{G}$ w A, więc siły $\overline{T}$ i $\overline{G}$ leżą na prostej OA. Znając już kierunek sił $\overline{T}$ i $\overline{G}$, wyznaczamy trójkąt sił $\overline{R}$, $\overline{S}_3$ i $\overline{G}$, skąd otrzymujemy siły $\overline{S}_3$ i $\overline{G}$. Ponieważ $\overline{T}=-\overline{G}$, więc możemy utworzyć trójkąt sił $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ i $\overline{T}$, skąd dostaniemy $\overline{S}_1$ i $\overline{S}_2$.

Gdyby wypadkowa $\overline{R}$ była równoległa do pręta 3, siła $\overline{G}$ byłaby również równoległa do 3 i przechodziłaby przez O. Ponieważ $\overline{R}$ jest wypadkową sił $\overline{G}$ i $-\overline{S}_3$, więc zadanie sprowadziłoby się wówczas do rozłożenia siły $\overline{R}$ na dwie siły $\overline{G}$ i $-\overline{S}_3$, których położenia są dane. Zadanie takie zostało rozwiązane przy pomocy wieloboku sznurowego na str. 257.

Gdyby wreszcie siły zewnętrzne redukowały się do pary $\overline{R}_1$ i $\overline{R}_2$, mielibyśmy $\overline{R}_1=-\overline{R}_2$ i wypadkowa $\overline{G}$ sił $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ i $\overline{S}_3$ równałaby się $\overline{S}_3$ i miałaby początek w O. Zadanie sprowadzałoby się wtedy do rozłożenia układu sił $\overline{R}_1$ i $\overline{R}_2$ na dwie siły $\overline{G}$ i $-\overline{S}_3$, których położenia są dane (por. str. 257).

§ 17. Równowaga lin ciężkich. Łańcuch. Układ prętów sztywnych połączonych przegubowo, nazywamy *łańcuchem*, jeżeli w każdym przegubie stykają się tylko dwa pręty. Pręty łańcucha nazywamy także *ogniwami*.

Załóżmy, że łańcuch złożony z ogniw A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 i A_3A_4, połączonych przegubami A_1, A_2 i A_3, pozostaje w równowadze pod działaniem sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ i $\overline{P}_3$, zaczepionych w przegubach, oraz sił $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_4$, zaczepionych w A_1 i A_4. Siły $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_4$ mają oczywiście kierunki prętów A_1A_2 i A_3A_4 (str. 294).



Łatwo okazać, że *łańcuch w równowadze przybiera postać wieloboku sznurowego* układu sił $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ i $\overline{P}_3$.

Zbudujmy w tym celu wielobok sił $A_0'A_1'A_2'A_3'$ dla układu $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$. Za biegun O obierzmy punkt przecięcia linii wykreślonych z punktu A_0' i A_3' równolegle do skrajnych prętów łańcucha.

Ponieważ łańcuch jest w równowadze, więc suma sił jest zerem:

$$\overline{T}_1+\overline{T}_4+\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3=0.$$

Ponieważ $\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3=\overline{A_0'A_3'}$, zaś OA_0' i $A_3'O$ są równolegle do $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_3$, więc z trójkąta $A_0'A_3'O$ otrzymujemy:

(1) $$\overline{T}_1 = \overline{OA_0'}, \qquad \overline{T}_3 = \overline{A_3'O}.$$

Weźmy teraz pod uwagę przegub A_1. Napięcie ogniwa A_0A_1 w przegubie A_1 jest $\overline{T}_1$; oznaczmy przez $\overline{T}_2$ napięcie ogniwa A_1A_2 w przegubie A_1. Mamy oczywiście

(2) $$\overline{T}_1 + \overline{T}_2 + \overline{P}_1 = 0.$$

Z wieloboku sznurowego otrzymujemy $\overline{OA_0'} + \overline{P}_1 + \overline{A_1'O} = 0$, skąd na mocy (1) $\overline{T}_1 + \overline{P}_1 + \overline{A_1'O} = 0$, a stąd na mocy (2) $\overline{A_1'O} = \overline{T}_2$. Odcinek $A_1'O$ jest więc równoległy do pręta A_1A_2.

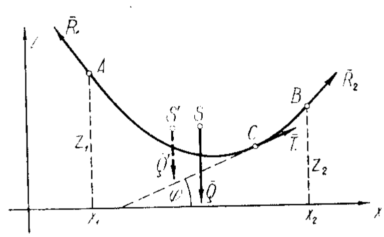
Podobnie przekonywamy się, że odcinki $A_2'O$ i $A_3'O$ są równoległe do prętów A_2A_3 i A_3A_4.

Wynika stąd, że wielobok sznurowy, jaki otrzymamy, rysując go z punktu A_1, przyjmie postać łańcucha.

Lina. *Sznurem* albo *liną (wiotką* i *nierozciągliwą)* nazywamy linię materialną, która daje się dowolnie zginać, nie zmieniając przy tym swojej długości ani długości swoich części.

Sznur może więc przyjąć kształt dowolnej linii krzywej o tej samej długości. Linę możemy uważać w przybliżeniu za łańcuch złożony z bardzo wielu drobnych ogniw.

Niech ciężka lina (wiotka i nierozciągliwa) zawieszona będzie w punktach A i B. Załóżmy, że gęstość liny $\varrho = \text{const}$. Ciężar kawałka liny długości s cm wynosi zatem



(3) $$Q = s\varrho g = s\delta,$$

gdzie $\delta = \varrho g$.

Zajmijmy się wyznaczeniem kształtu, jaki przyjmie lina pod wpływem swego ciężaru.

Obierzmy układ współrzędnych (x, y, z), nadając osi z kierunek pionowy ze zwrotem ku górze; przyjmijmy za płaszczyznę xz płaszczyznę pionową, przechodzącą przez punkty A i B.

Siłami zewnętrznymi działającymi na linę są: ciężar, zaczepiony w środku ciężkości S liny, i reakcje $\overline{R}_1$ i $\overline{R}_2$ w punktach A i B. Gdy lina jest w równowadze, siły te równoważą się. Wynika stąd, że leżą w jednej płaszczyźnie pionowej, mianowicie w płaszczyźnie xz. Zatem:

(4) $$R_{1_y} = 0, \qquad R_{2_y} = 0.$$

Przetnijmy linę w dowolnym punkcie C i odrzućmy część CB. Aby część AC pozostała w równowadze, należy dołączyć w punkcie C siłę $\bar{T}$, z jaką część CB działa na część AC. Siłę $\bar{T}$ nazywamy *napięciem liny*.

Ponieważ linę uważamy w przybliżeniu za łańcuch złożony z drobnych ogniw, więc siła $\bar{T}$ jest styczna do CB.

Oznaczmy przez s długość łuku AC. Siłami zewnętrznymi, działającymi na część AC są: ciężar $\bar{Q}'$ o wielkości $s\delta$, zaczepiony w środku ciężkości S' części AC, reakcja $\bar{R}_1$ i napięcie $\bar{T}$. Ponieważ, suma sił tych jest zerem, gdyż część AC pozostaje w równowadze, więc tworząc rzuty na osie układu współrzędnych, otrzymamy:

$$(5) \qquad T_x + R_{1_x} = 0, \qquad T_z + R_{1_z} - s\delta = 0, \qquad T_y + R_{1_y} = 0.$$

Wobec (4) jest $R_{1_y}=0$, więc $T_y=0$. Ponieważ napięcie $\bar{T}$ jest styczne do krzywej, zaś C jest dowolnym punktem tej krzywej, więc styczna w każdym punkcie jest równoległa do płaszczyzny pionowej xz. Wynika stąd, że krzywa leży w płaszczyźnie pionowej, a mianowicie w płaszczyźnie xz, gdyż ma z nią dwa punkty A i B wspólne. Pierwsze z równań (5) daje

$$(6) \qquad T_x = -R_{1_x} = \text{const}.$$

A więc: *składowa pozioma napięcia liny jest w każdym punkcie liny ta sama.*

Oznaczmy przez φ kąt jaki $\bar{T}$ tworzy z osią x. Mamy zatem $\operatorname{tg}\varphi = T_z / T_x$, skąd na mocy drugiego z równań (5)

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\varphi = (-\delta s / R_{1_x}) + (R_{1_z} / R_{1_x}).$$

Połóżmy:

$$(8) \qquad a = -\delta / R_{1_x}, \qquad a' = R_{1_z} / R_{1_x}.$$

Jeżeli $z = f(x)$ jest równaniem krzywej, to $z' = \operatorname{tg}\varphi$. Na mocy więc (7) i (8)

$$(9) \qquad z' = as + a'.$$

Równanie (9) jest równaniem różniczkowym krzywej, której postać przyjmuje lina. Różniczkując je, otrzymamy $z'' = a\,ds/dx$, a ponieważ $ds = \sqrt{1+z'^2}\,dx$, więc $z'' = a\sqrt{1+z'^2}$. Podstawmy $z' = w$. Zatem $z'' = dw/dx$, skąd $dw/dx = a\sqrt{1+w^2}$ czyli $dw/\sqrt{1+w^2} = a\,dx$. Całkując, otrzymujemy $\int dw/\sqrt{1+w^2} = \int a\,dx$, więc $\log(\sqrt{1+w^2}+w) = ax + c$, gdzie c jest stałą całkowania. Zatem

$$\sqrt{1+w^2}+w=\sqrt{1+z'^2}+z'=e^{ax+c}. \tag{10}$$

Mamy

$$1/(\sqrt{1+z'^2}+z')=\sqrt{1+z'^2}-z'=e^{-ax-c}. \tag{11}$$

Z równań (10) i (11) otrzymujemy:

$$z'=(e^{ax+c}-e^{-ax-c})/2, \tag{12}$$

$$ds/dx=\sqrt{1+z'^2}=(e^{ax+c}+e^{-ax-c})/2. \tag{13}$$

Całkując równania (12) i (13), otrzymamy

$$z=\frac{1}{2a}(e^{ax+c}+e^{-ax-c})+c' \tag{14}$$

$$s=\frac{1}{2a}(e^{ax+c}-e^{-ax-c})+c'', \tag{15}$$

gdzie c' i c'' są pewnymi stałymi.

Krzywą określoną równaniem (14) nazywamy *krzywą łańcuchową*.

A więc: *lina przyjmuje kształt krzywej łańcuchowej.*

Równania (14) i (15) zależą od czterech stałych a, c, c' i c''. Stałe te możemy wyznaczyć, jeżeli znamy np. współrzędne x_1, z_1 i x_2, z_2 punktów A i B oraz długość l liny.

Z warunków bowiem, że dla $x=x_1$ jest $z=z_1$, zaś dla $x=x_2$ jest $z=z_2$, otrzymujemy na mocy (14):

$$z_1=\frac{1}{2a}(e^{ax_1+c}+e^{-ax_1-c})+c', \qquad z_2=\frac{1}{2a}(e^{ax_2+c}+e^{-ax_2-c})+c'. \tag{16}$$

Z warunku zaś, że dla $x=x_1$ jest $s=0$, a dla $x=x_2$ jest $s=l$, dostajemy na mocy (15):

$$0=\frac{1}{2a}(e^{ax_1+c}-e^{-ax_1-c})+c'', \qquad l=\frac{1}{2a}(e^{ax_2+c}+e^{-ax_2-c})+c''. \tag{17}$$

Można okazać, że równania (16) i (17) określają jednoznacznie stałe a, c, c' i c''.

Obliczmy jeszcze napięcie liny $\overline{T}$ w dowolnym jej punkcie C o współrzędnych x, z. Z równań (6) i (8) dostajemy

$$T_x=\delta/a. \tag{18}$$

Ponieważ $T_z/T_x=\operatorname{tg}\varphi=z'$, więc $T_z=T_x z'$, zatem

$$T_z=\delta z'/a. \tag{19}$$

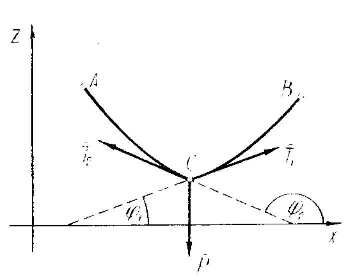
Z równań (18) i (19) otrzymujemy

$$T=\sqrt{T_x^2+T_z^2}=\frac{\delta}{a}\sqrt{1+z'^2}=\frac{\delta}{a}\cdot\frac{ds}{dx}=\frac{\delta}{2a}\left(e^{ax+c}+e^{-ax-c}\right),$$

na mocy więc (14)

$$(20)\qquad T=\delta(z-c').$$

Lina obciążona. Niech w punkcie C liny zaczepiona będzie siła $\overline{P}$, skierowana pionowo w dół. Części CB i AC liny są, jak już wiemy, linami łańcuchowymi. Oznaczmy przez a_1, c_1, c_1', c_1'' i a_2, c_2, c_2', c_2'', odpowiednie stałe dla krzywych BC i CA w równaniach (14) i (15), a przez $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ napięcia części BC i CA w punkcie C.



Uważając linę za łańcuch o drobnych ogniwach, zaś punkt C za przegub, mamy w położeniu równowagi $\overline{T}_1+\overline{T}_2+\overline{P}=0$. Tworząc rzuty na osie x, z i kładąc $P=|\overline{P}|$, otrzymujemy:

$$(21)\qquad T_{1_x}+T_{2_x}=0,\qquad T_{1_z}+T_{2_z}-P=0.$$

Oznaczając pochodne prawostronną i lewostronną w C przez z_1' i z_2', otrzymamy na mocy (18) i (19):

$$T_{1_x}=\delta/a_1,\quad T_{1_z}=\delta z_1'/a_1,\qquad T_{2_x}=-\delta/a_2,\quad T_{2_z}=-\delta z_2'/a_2,$$

skąd na mocy (21)

$$\frac{\delta}{a_1}-\frac{\delta}{a_2}=0,\qquad \frac{\delta z_1'}{a_1}-\frac{\delta z_2'}{a_2}-P=0.$$

Dostajemy więc:

$$(22)\qquad a_1=a_2,\qquad z_1'-z_2'=\frac{Pa_1}{\delta}=\frac{Pa_2}{\delta}.$$

Znając długości l_1 i l_2 łuków BC i CA, możemy otrzymać równania krzywych CB i AC. Należy w tym celu wyznaczyć dziesięć stałych a_1, c_1, c_1', c_1'', a_2, c_2, c_2', c_2'' i x_0, z_0, gdzie x_0 i z_0 są współrzędnymi punktu C. Otóż do wyznaczenia tych stałych dla CB i AC mamy po cztery równania analogiczne do (16) i (17), a nadto dwa równania (22), razem więc dziesięć.