ROZDZIAŁ VII

KINEMATYKA CIAŁA SZTYWNEGO

§ 1. Przesunięcie i obrót ciała około osi. W myśl określenia ciała sztywnego (str. 235) punkty jego nie zmieniają swych wzajemnych odległości podczas ruchu. Gdy punkt A przesunął się do punktu B, wektor $\overline{AB}$ nazwaliśmy *przesunięciem* punktu (str. 34). Przy zmianie położenia ciała sztywnego punkty tego ciała doznają na ogół różnych przesunięć.

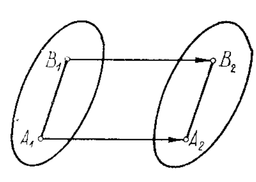
Poznamy najpierw pewne twierdzenia z geometrii, podające rozkład przesunięć punktów ciała. Twierdzenia te będą nam pomocne przy wyznaczaniu prędkości tych punktów.

Przesunięcie równoległe czyli translacja. Jeżeli przy zmianie położenia ciała przesunięcia wszystkich punktów są równe, mówimy, że ciało uległo *przesunięciu (równoległemu)* lub *translacji.*

Przesunięcie wspólne wszystkim punktom ciała nazywamy *wektorem przesunięcia* lub *przesunięciem ciała.*

Położenie ciała po przesunięciu jest więc wyznaczone przez położenie początkowe i wektor przesunięcia.

Przyjmijmy, że punkty A_1, B_1 przeszły po przesunięciu równoległym w punkty A_2, B_2. Ponieważ przesunięcia obu punktów są równe, więc $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}$. Wynika stąd, że $\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}$.



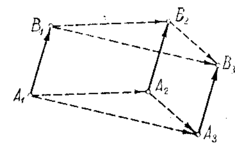
A więc: *przy przesunięciu równoległym wektory związane z ciałem nie zmieniają kierunku ani zwrotu.*

Na odwrót, łatwo dowieść, że *jeżeli przy zmianie położenia ciała wektory w ciele zachowują kierunek i zwrot, to zmiana położenia jest przesunięciem równoległym.*

Załóżmy bowiem, że dwa dowolne punkty A_1, B_1 przeszły w punkty A_2, B_2. Ponieważ w myśl założenia jest $\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}$, więc $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}$. Punkty A_1, B_1 mają zatem równe przesunięcia czyli zmiana położenia ciała jest przesunięciem równoległym.

Łatwo zauważyć, że po przesunięciu równoległym proste i płaszczyzny w ciele pozostają do siebie równoległe.

Przypuśćmy, że ciało wykonało po kolei dwie translacje: najpierw z położenia I do położenia II, a następnie z położenia II do położenia III. Niech A_1, B_1 będą dwoma dowolnymi punktami w położeniu I, zaś A_2, B_2 i A_3, B_3 odpowiadającymi im punktami w położeniach II i III. Z założenia jest $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$ i $\overline{A_2A_3} = \overline{B_2B_3}$. Ponieważ $\overline{A_1A_3} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}$ i $\overline{B_1B_3} = \overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3}$, więc $\overline{A_1A_3} = \overline{B_1B_3}$. Od położenia I możemy zatem przejść wprost do położenia III przy pomocy jednej translacji. Oznaczając przez $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ i $\bar{u}$ przesunięcia przy przejściu z I do II, z II do III i z I do III, otrzymamy oczywiście



$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2.$$

A więc: *jeżeli ciało wykonało kilka translacyj kolejnych, wówczas położenie końcowe otrzymać możemy z położenia początkowego przy pomocy jednej translacji; przesunięcie ciała z położenia początkowego do końcowego równe jest sumie przesunięć przy poszczególnych translacjach.*

Twierdzenie powyższe możemy nazwać *prawem składania przesunięć.*

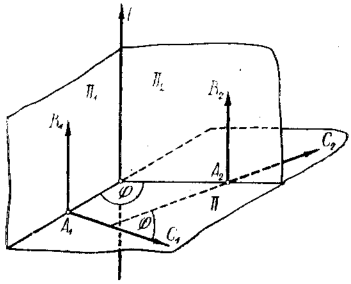
Ponieważ przesunięcie wypadkowe jest sumą przesunięć składowych, więc (na mocy przemienności sumy wektorów) przesunięcie wypadkowe nie zależy od porządku, w jakim ciało wykonywało przesunięcia składowe.

Obrót około osi. Jeżeli przy zmianie położenia ciała dwa punkty, np. K i M, pozostały nieruchome, wówczas oczywiście, wszystkie punkty prostej l, przechodzącej przez K i M, również pozostaną nieruchome. Mówimy wtedy, że ciało wykonało *obrót około prostej* l; prostą tę nazywamy *osią obrotu.*

Jeżeli jakaś płaszczyzna Π_1 przechodzi w położeniu początkowym ciała przez oś obrotu, to odpowiednia płaszczyzna Π_2 w położeniu końcowym również przejdzie przez tę oś.

Nadajmy osi l dowolny zwrot. Kąt φ, o jaki należy obrócić płaszczyznę Π_1 (w kierunku od ręki prawej ku lewej względem osi l), tak aby padła na Π_2 i aby odpowiednie punkty się nakryły, nazywamy *kątem obrotu.*

Obrót ciała około osi wyznaczony jest przez podanie osi i kąta obrotu. Przy obrocie punkty ciała pozostają w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu.



1.

Każdy wektor $\overline{A_1B_1}$, równoległy do osi obrotu, przechodzi przy obrocie w wektor $\overline{A_2B_2}$, równy wektorowi $\overline{A_1B_1}$. Łatwo udowodnić, że tylko wektory równoległe do osi nie zmieniają przy obrocie kierunku ani zwrotu.

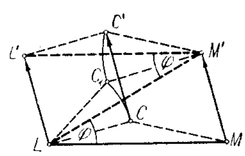
Zauważmy, że jeżeli wektor $\overline{A_1C_1}$ leży w płaszczyźnie Π prostopadłej do osi obrotu, to kąt jaki ten wektor tworzy z odpowiednim wektorem $\overline{A_2C_2}$ jest (przy obranym zwrocie osi obrotu) równy kątowi obrotu (rys. 1).

Jeżeli ciało wykona kilka obrotów około tej samej osi l o kąty $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, wówczas ostateczna zmiana położenia jest oczywiście również obrotem około osi l o kąt $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$ Wynika stąd na mocy przemienności sumy, że położenie ostateczne nie zależy od porządku, w jakim ciało wykonywało obroty częściowe.

Inaczej przedstawia się sprawa, gdy ciało wykonywa kolejne obroty wkoło różnych osi, jak o tym poucza przykład na str. 317.

Przykład. Ciało sztywne wykonało po kolei dwa obroty około dwóch prostych równoległych l i m, sztywnie z ciałem związanych. Obroty miały zwroty przeciwne, kąty zaś równe. Udowodnić, że ciało można przeprowadzić z położenia początkowego w końcowe przy pomocy przesunięcia równoległego (translacji).

Niech C będzie dowolnym punktem ciała. Poprowadźmy przez C płaszczyznę Π, prostopadłą do danych osi obrotu l i m. Niechaj L i M oznaczają odpowiednie punkty przebicia, zaś φ kąt obrotu (rys. 2).



2.

Przy obrocie około osi l o kąt φ oś m przejdzie w prostą m'; oznaczmy przez M' punkt przebicia tej prostej z płaszczyzną Π. Następnie, po obrocie około osi m' o kąt φ oś l przyjmie położenie prostej l'; oznaczmy przez L' jej punkt przebicia z płaszczyzną Π.

Wreszcie, niech C_1 będzie położeniem punktu C po obrocie około prostej l, a C' położeniem punktu C_1 po obrocie około prostej m'.

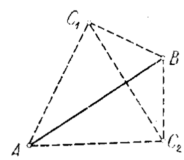
Trójkąt LMC przeszedł ostatecznie w położenie $L'M'C'$, przyczem $\overline{LL'}=\overline{MM'}=\overline{CC'}$ (jak na rysunku). Ponieważ przesunięcia punktów położonych na osi l (lub m) są równe, więc związek powyższy wskazuje, że przesunięcia wszystkich punktów są równe. Łatwo sprawdzić, że

$$LL'=2LM\sin\tfrac{1}{2}\varphi. \tag{1}$$

§ 2. Przesunięcia punktów ciała w ruchu płaskim. Ruch figury płaskiej poruszającej się w płaszczyźnie nazywamy *ruchem płaskim.*

Położenie figury w ruchu płaskim jest wyznaczone przez położenie dowolnych dwóch jej punktów.

Przypuśćmy bowiem, że możliwe są dwa położenia figury, w których dwa punkty A i B zajmowałyby to samo położenie. Weźmy pod uwagę dowolny punkt C figury, który w jednym położeniu jest w C_1, w drugim zaś w C_2. Trójkąty ABC_1 i ABC_2 przystają i są położone symetrycznie względem AB. Nie dadzą się zatem przeprowadzić w siebie bez oderwania od płaszczyzny. To zaś jest sprzeczne z założeniem, że trójkąt ABC zajmował w ruchu płaskim raz położenie ABC_1, a drugi raz położenie ABC_2.



O b r ó t o k o ł o p u n k t u. Jeżeli figurę leżącą w płaszczyźnie Π obrócić około prostej l prostopadłej do tej płaszczyzny, to figura pozostanie nadal w płaszczyźnie Π. Obrót taki nazywamy *obrotem* figury *około punktu* (przebicia prostej l z płaszczyzną Π).

Twierdzenie. *Każdą figurę w ruchu płaskim można przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy jednego przesunięcia równoległego i jednego obrotu.*

Niech bowiem A_1, B_1 będą dwoma punktami tej figury w położeniu pierwszym, zaś A_2, B_2 odpowiednimi punktami w drugim. Przesuńmy najpierw figurę równolegle tak, by punkt A_1 padł na A_2. Punkt B_1 padnie po tym przesunięciu na pewien punkt B_1'. Obróćmy teraz figurę około A_2 tak, by B_1' padł na B_2. Ponieważ po przesunięciu i obrocie dwa punkty A_1, B_1 pokryły się z odpowiednimi punktami A_2, B_2, więc i pozostałe punkty się pokryją. Przeprowadziliśmy zatem figurę z jednego położenia w drugie przy pomocy jednego przesunięcia i jednego obrotu, c. b. d. d.

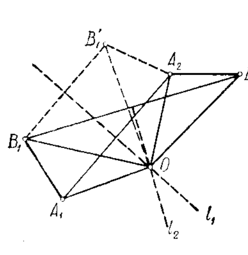
Udowodnimy teraz, że najogólniejsza zmiana położenia figury w ruchu płaskim jest albo przesunięciem albo obrotem.

I Twierdzenie Eulera. *Figurę z jednego położenia w drugie* (jakie zajmuje w ruchu płaskim) *można przeprowadzić bądź przy pomocy przesunięcia równoległego, bądź przy pomocy obrotu.*

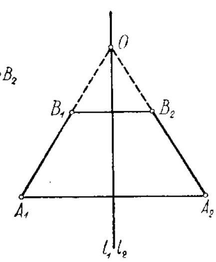
Dowód. Niech A_1B_1 będzie dowolnym odcinkiem figury w położeniu początkowym I, zaś A_2B_2 tymże odcinkiem w położeniu końcowym II.

W przypadku gdy wektory $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$ są równe, mamy $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}$. Przy przesuwaniu więc figury równolegle, tak by punkt A_1 padł na A_2, punkt B_1 padnie na B_2. Ponieważ po tym przesunięciu figura będzie miała z położeniem II punkty A_2 i B_2 wspólne, więc będzie miała wszystkie punkty wspólne. W tym przypadku można zatem przeprowadzić figurę z położenia I w położenie II przy pomocy przesunięcia równoległego.

W przypadku gdy wektory $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$ nie są równe, poprowadźmy symetralne l_1 i l_2 odcinków A_1A_2 i B_1B_2.



1.



2.

Przyjmijmy najpierw, że symetralne te są różne i że przecinają się w punkcie O (rys. 1). Trójkąty OA_1B_1 i OA_2B_2 są przystające. Oznaczmy przez B_1' punkt symetryczny do B_1 względem symetralnej l_1. Oczywiście trójkąty OA_1B_1 i OA_2B_1' są położone symetrycznie względem l_1. Są zatem przystające i nienakładalne na siebie bez odrywania od płaszczyzny. Jeżeli więc figurę obrócimy około O tak, by punkt A_1 padł na A_2, to ponieważ punkt B_1 nie może paść na B_1', punkt B_1 padnie na B_2. Po tym obrocie figura będzie więc miała z położeniem II punkty A_2 i B_2 wspólne, a zatem i wszystkie inne punkty wspólne.

Przyjmijmy następnie, że symetralne odcinków A_1A_2 i B_1B_2 są identyczne (rys. 2). W tym przypadku odcinki A_1B_1 i A_2B_2 są położone symetrycznie względem l_1 (lub l_2); środkiem obrotu będzie punkt przecięcia się prostej A_1B_1 z l_1 (lub A_2B_2 z l_2). W tym przypadku więc przeprowadzimy figurę z położenia I w położenie II przy pomocy obrotu, c. b. d. d.

Ciało płasko prowadzone. Jeżeli ciało może się tylko tak poruszać, że punkty jego pozostają stale w płaszczyznach równoległych do pewnej płaszczyzny stałej Π, powiadamy, że ciało jest *płasko prowadzone*, a płaszczyznę Π nazywamy *płaszczyzną kierowniczą* (por. określenie i przykład na str. 276).

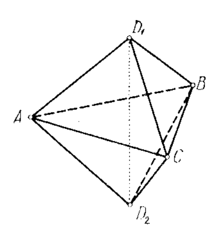
Przetnijmy ciało płasko prowadzone płaszczyzną Π', równoległą do płaszczyzny kierowniczej Π. Niechaj C będzie figurą przekroju. Położenie figury C wyznacza oczywiście położenie całego ciała. Ponieważ figura płaska C musi pozostawać stale w jednej i tej samej płaszczyźnie Π', więc na mocy I tw. Eulera możemy figurę tę przeprowadzić z dowolnego położenia, jakie zajmuje, w dowolne inne bądź przy pomocy przesunięcia, bądź przy pomocy obrotu około punktu leżącego na Π'.

Wynika stąd, że *ciało płasko prowadzone możemy przeprowadzić z jednego położenia w drugie bądź przy pomocy translacji, bądź przy pomocy obrotu około osi prostopadłej do płaszczyzny kierowniczej.*

§ 3. Przesunięcia punktów ciała. Jeżeli ciało sztywne ma jeden punkt unieruchomiony, to może się obracać około tego punktu, jeżeli zaś ma unieruchomione dwa punkty, to może się obracać około osi przechodzącej przez te punkty. Podanie położenia jednego lub dwóch punktów ciała nie wystarcza zatem do wyznaczenia położenia wszystkich innych punktów ciała. Zachodzi jednak następujące

Twierdzenie 1. *Położenie wszystkich punktów ciała sztywnego wyznaczone jest przez położenie trzech jego punktów, nie leżących na jednej prostej.*

Dowód. Przypuśćmy bowiem, że istnieją dwa różne położenia ciała, w których trzy punkty A, B, C, nie leżące na jednej prostej, zajmowałyby położenia jednakowe. Weźmy pod uwagę dowolny punkt D tegoż ciała, który w pierwszym położeniu jest w D_1, w drugim zaś jest w D_2. Czworościany $ABCD_1$ i $ABCD_2$ mają podstawę wspólną i krawędzie odpowiednio równe. Wynika stąd, że są położone symetrycznie względem płaszczyzny ABC.



Nie dadzą się zatem doprowadzić do zupełnego przystawania. To zaś jest sprzeczne z założeniem, że czworościan $ABCD$ raz zajmuje położenie $ABCD_1$, a drugi raz położenie $ABCD_2$.

Obrót około punktu ciała. Jeżeli przy zmianie położenia ciała jeden punkt ciała pozostał nieruchomy, powiadamy, że ciało wykonało *obrót* około tego punktu.

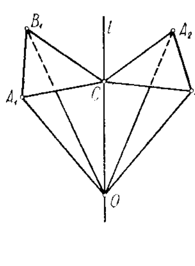
II Twierdzenie Eulera. *Obrót około punktu jest równoważny obrotowi około pewnej prostej, przechodzącej przez ten punkt.*

Dowód. Przypuśćmy, że ciało wykonało obrót około punktu O. Obierzmy w ciele w położeniu początkowym I dowolny odcinek A_1B_1 (nie przechodzący przez O) i niechaj A_2B_2 będzie odpowiednim odcinkiem w położeniu końcowym II. Poprowadźmy płaszczyzny symetralne Π_1 i Π_2 odcinków A_1A_2 i B_1B_2.

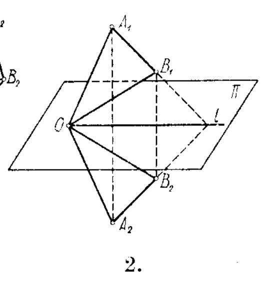
Załóżmy najpierw, że Π_1 i Π_2 są różne i że przecinają się wzdłuż prostej l (rys. 1). Prosta l przechodzi przez O, gdyż l jest zbiorem punktów równoodległych od A_1 i A_2, jako też od B_1 i B_2, zaś $OA_1=OA_2$ i $OB_1=OB_2$. Niech C będzie dowolnym punktem (różnym od O) na prostej l.

Czworościany OCA_1B_1 i OCA_2B_2 są równe. Łatwo wykazać, że są także nakładalne na siebie. Wierzchołki bowiem O,C,A_1 i O,C,A_2 są położone symetrycznie względem Π_1. Gdyby więc czworościany OCA_1B_1 i OCA_2B_2 nie były nakładalne, wówczas wierzchołki B_1 i B_2 musiałyby leżeć symetrycznie względem Π_1, co niemożliwe, skoro B_1 i B_2 leżą symetrycznie względem Π_2, zaś $\Pi_1 \neq \Pi_2$. Udowodniliśmy więc, że czworościany OCA_1B_1 i OCA_2B_2 są równe i nakładalne.

Jeżeli teraz obrócimy ciało około osi l tak, by A_1 padło na A_2, to czworościan OCA_1B_1 padnie na czworościan OCA_2B_2. Po tym obrocie ciało będzie więc miało z ciałem w położeniu II trzy punkty wspólne (mianowicie O, A_2 i B_2), a zatem i wszystkie inne punkty wspólne. Przeprowadziliśmy więc ciało z położenia I w położenie II przy pomocy obrotu około prostej l.



1.



2.

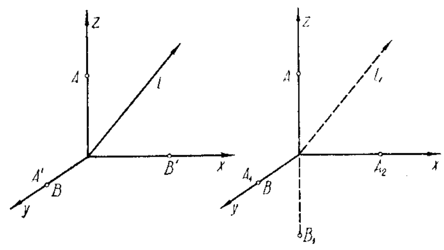
Załóżmy teraz, że odcinki A_1A_2 i B_1B_2 mają wspólną płaszczyznę symetralną Π (rys. 2). Wówczas trójkąty OA_1B_1 i OA_2B_2 są położone symetrycznie względem Π. Osią obrotu będzie w tym przypadku krawędź przecięcia się płaszczyzny OA_1B_1 (lub OA_2B_2) z płaszczyzną Π.

Uwaga 1. Z II tw. Eulera wynika, że przy obrocie ciała około punktu istnieje w ciele pewna prosta o tej własności, że punkty jej nie zmieniają położenia.

Uwaga 2. Jeżeli ciało wykonywa dwa kolejne obroty wkoło dwóch osi, przechodzących przez jeden punkt O, to z położenia początkowego w położenie końcowe możemy przeprowadzić ciało przy pomocy jednego obrotu około osi, przechodzącej przez O, gdyż punkt O nie zmienił położenia. A więc złożenie dwóch obrotów około osi, przechodzących przez jeden punkt, jest obrotem około osi, również przechodzącej przez ten sam punkt.

Przykład. Ciało wykonało kolejno dwa obroty wkoło osi stałego układu współrzędnych: najpierw wkoło osi z, a następnie wkoło osi x, oba obroty o kąt prosty w kierunku od ręki prawej ku lewej.

Ponieważ przy obu obrotach początek układu O pozostał nieruchomy, możemy przeprowadzić ciało z położenia początkowego do położenia końcowego przy pomocy jednego obrotu około pewnej osi l, przechodzącej przez O (rys. 1).



1. 2.

Weźmy pod uwagę w położeniu początkowym punkt $A(0,0,1)$ osi z. Po obrocie około tej osi punkt A nie zmienił położenia, a po obrocie około osi x przeszedł w położenie $A'(0,1,0)$.

Weźmy z kolei pod uwagę w położeniu początkowym punkt $B(0,1,0)$ osi y. Po obrocie około osi z punkt B zajął położenie $B'(1,0,0)$ na osi x, a następnie przy obrocie wkoło tej osi punkt B' nie zmienił już swego położenia. Szukana oś l będzie więc przekrojem płaszczyzn symetralnych odcinków AA' i BB'.

Płaszczyzna symetralna odcinka AA' ma równanie $y=z$, zaś płaszczyzna symetralna odcinka BB' ma równanie $x=y$. Oś l będąca przecięciem obu płaszczyzn ma zatem równanie

$$x = y = z.$$

Przypuśćmy teraz, że ciało wykonywało te same obroty w porządku odwrotnym, t. j. najpierw około osi x, a następnie około osi z (rys. 2). Punkty $A(0,0,1)$ i $B(0,1,0)$ zajmą po obrocie około osi x położenia $A_1(0,1,0)$ i $B_1(0,0,-1)$, a następnie po obrocie około osi z przejdą w położenia $A_2(1,0,0)$ i $B_2(0,0,-1)$. Płaszczyzny symetralne odcinków AA_2 i BB_2 mają równania $x=z$ i $y=-z$. Oś l_1, około której należy obrócić ciało, aby przeszło z położenia początkowego w końcowe, będzie więc miała równanie

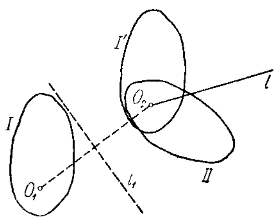
$$x = -y = z.$$

Widzimy stąd, że położenie końcowe zależy od porządku, w jakim ciało wykonywało obroty.

Twierdzenie Chasle'a. *Ciało można przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy jednego przesunięcia i jednego obrotu około osi.*

Na ogół można to zrobić na nieskończenie wiele sposobów, zawsze jednak osie obrotu będą równoległe, a kąty obrotu równe (jeżeli osiom nadany będzie ten sam zwrot).

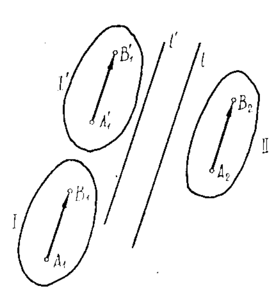
Dowód. Niechaj O_1 będzie dowolnym punktem ciała w położeniu początkowym I, zaś O_2 odpowiednim punktem w położeniu końcowym II. Przesuńmy ciało najpierw równolegle w położenie I', tak by O_1 padło na O_2. Jeżeli położenie I' jest identyczne z II, to ciało przeprowadziliśmy z położenia I w położenie II przy pomocy jednego przesunięcia, zgodnie z wymogami twierdzenia.



Przyjmijmy więc, że położenie I' jest różne od II. Ponieważ w położeniach II i I' ciało ma punkt O_2 wspólny, więc na mocy II tw. Eulera możemy je przeprowadzić z położenia I' w położenie II przy pomocy obrotu około pewnej osi l, przechodzącej przez punkt O_2.

W każdym więc razie przeprowadziliśmy ciało z położenia I w położenie II przy pomocy jednego przesunięcia i jednego obrotu; udowodniliśmy zatem pierwszą część twierdzenia.

Gdybyśmy obrali na początku inny punkt O_1, to na ogół otrzymalibyśmy inne przesunięcie i inny obrót około innej osi. Wykażemy jednak, że we wszystkich przypadkach osie obrotu byłyby równoległe.



Weźmy pod uwagę w ciele dowolny wektor A_1B_1 w położeniu I, równoległy do osi obrotu l. Odpowiedni wektor $\overline{A_2B_2}$ w położeniu II będzie miał ten sam kierunek i zwrot co wektor $\overline{A_1B_1}$. Ani bowiem przesunięcie, ani obrót (około osi równoległej), nie zmienia kierunku ani zwrotu wektora.

Załóżmy teraz, że ciało przeprowadziliśmy z położenia I w położenie II przy pomocy innego przesunięcia oraz obrotu około innej osi l'. Niechaj przy tym przesunięciu wektor $\overline{A_1B_1}$ przejdzie w wektor $\overline{A_1'B_1'}$. Oczywiście wektor $\overline{A_1'B_1'}$ przejdzie po obrocie około nowej osi l' w wektor $\overline{A_2B_2}$. Ponieważ przesunięcie nie zmienia kierunku ani zwrotu wektora, więc $\overline{A_1'B_1'}$ ma ten sam zwrot i kierunek co wektor $\overline{A_1B_1}$. Wynika stąd, że wektor $\overline{A_1'B_1'}$ będzie miał również ten sam zwrot i kierunek co wektor $\overline{A_2B_2}$. Zatem oś obrotu l' musi być równoległa do $\overline{A_2B_2}$ czyli do osi l.

Wykażemy wreszcie, że kąty obrotu około osi l i l' są równe, bylebyśmy nadali osiom l i l' jednakowe zwroty. Obierzmy w ciele w położeniu I dowolny wektor $\bar{a}_1$ prostopadły do l, a zarazem oczywiście do l'. Kąt, jaki tworzy wektor $\bar{a}_1$ z odpowiednim wektorem $\bar{a}_2$ w położeniu II przy obranym zwrocie osi, jest kątem obrotu (str. 312). Kąt obrotu jest więc w obu przypadkach ten sam, c. b. d. d.

Twierdzenie 2. *Ciało można przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy dwóch obrotów kolejnych.*

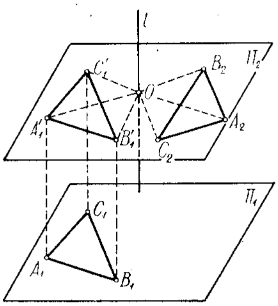
Dowód. Niech O_1 będzie dowolnym punktem ciała w położeniu I, a O_2 odpowiednim punktem ciała w położeniu II. Obróćmy ciało o kąt 180^0 około osi l_1, będącej symetralną odcinka O_1O_2. Przy tym obrocie punkt O_1 padnie na punkt O_2. Ciało przyjmie położenie II', które z położeniem II ma punkt O_2 wspólny. Możemy zatem z położenia II' przejść do położenia II przy pomocy obrotu około pewnej prostej l, przechodzącej przez O_2. Przeprowadziliśmy w ten sposób ciało z położenia I w położenie II przy pomocy dwóch obrotów około prostych l_1 i l, c. b. d. d.

Skręt. Jeżeli ciało wykonało przesunięcie, a następnie obrót około osi równoległej do przesunięcia, to powiadamy, że ciało wykonało *skręt.*

W szczególności przesunięcie lub obrót również nazywamy skrętem.

Twierdzenie 3. *Ciało można zawsze przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy skrętu i to tylko w jeden sposób.*

Dowód. Weźmy pod uwagę w ciele w położeniu I dowolny trójkąt $A_1B_1C_1$, leżący w płaszczyźnie Π_1 prostopadłej do możliwych osi obrotu. Oznaczmy przez $A_2B_2C_2$ odpowiedni trójkąt, zaś przez Π_2 odpowiednią płaszczyznę w położeniu II. Płaszczyzny Π_1 i Π_2 są zatem równoległe. Przeprowadźmy teraz ciało z położenia I w położenie I', nadając ciału takie przesunięcie prostopadłe do Π_1, by płaszczyzna Π_1 przeszła w płaszczyznę Π_2 (p. str. 320, rys. 1). Trójkąt $A_1B_1C_1$ przejdzie przy tym przesunięciu w trójkąt $A_1'B_1'C_1'$ leżący w płaszczyźnie Π_2, w której leży także trójkąt $A_2B_2C_2$.



1.

Z położenia I' możemy przeprowadzić ciało w położenie II najpierw przy pomocy translacji tak, by A_1' padło na A_2, a następnie przy pomocy obrotu około prostej prostopadłej do Π_2 przechodzącej przez A_2. Wynika stąd, że trójkąt $A_1'B_1'C_1'$ przejdzie w $A_2B_2C_2$, pozostając stale w płaszczyźnie Π_2. Na mocy więc II tw. Eulera możemy trójkąt $A_1'B_1'C_1'$ przeprowadzić w $A_2B_2C_2$ przy pomocy translacji lub obrotu (około pewnego punktu O leżącego w Π_2, czyli przy pomocy obrotu około osi l prostopadłej do Π_2 w punkcie O). Przy tej translacji (lub obrocie) ciało przejdzie z położenia I' w położenie II.

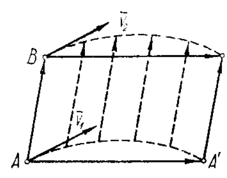
Wynika stąd, że przeprowadzimy ciało z położenia I w położenie II albo przy pomocy przesunięcia (jeżeli przejście z I' do II jest przesunięciem), albo przy pomocy przesunięcia i obrotu około osi l, równoległej do przesunięcia, c. b. d. d.

Oś l nazywamy *osią skrętu.*

Oś skrętu przesuwa się przy skręcie po sobie. Każda inna prosta zmienia przy skręcie swoje położenie. Wynika stąd, że nie możemy przeprowadzić ciała z położenia I w położenie II przy pomocy skrętu około innej osi l'.

§ 4. Ruch postępowy i ruch obrotowy około osi.

Ruch postępowy. Jeżeli każde położenie, jakie ciało przyjmuje w ciągu ruchu, możemy otrzymać z położenia początkowego przy pomocy translacji, to powiadamy, że ciało porusza się *ruchem postępowym.*



2.

Z określenia ruchu postępowego wynika, że każde dwa położenia ciała w ruchu postępowym dają się otrzymać jedno z drugiego przy pomocy przesunięcia równoległego.

Niech A i B będą dwoma dowolnymi punktami ciała. W ruchu postępowym wektor $\overline{AB}$ nie zmienia kierunku ani zwrotu. Jeżeli więc tor punktu A przesuniemy równolegle tak, że wszystkie jego punkty doznają przesunięcia równego wektorowi $\overline{AB}$, wówczas tor punktu A pokryje się z torem punktu B (rys. 2).

A więc: *w ruchu postępowym tory wszystkich punktów są do siebie przystające i przechodzą jeden w drugi przy pomocy translacji.*

Ruch postępowy ciała jest więc wyznaczony przez ruch jednego jego punktu i położenie ciała w chwili początkowej. Jeżeli bowiem znamy ruch np. punktu A, to wektor przesunięcia ciała z położenia początkowego do położenia w chwili t będzie również wiadomy, gdyż równa się znanemu przesunięciu punktu A.

Na odwrót: *jeżeli wektory związane z ciałem sztywnym nie zmieniają kierunku, to ciało porusza się ruchem postępowym.*

Istotnie weźmy pod uwagę stały układ współrzędnych (x, y, z) oraz dwa punkty w ciele $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$. Z założenia wektor $\overline{AB}$ nie zmienia kierunku (ani oczywiście długości); wykażemy, że nie zmienia również zwrotu. Rzuty wektora $\overline{AB}$ na osie układu są podczas ruchu stałe co do wartości bezwzględnej. A więc $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$ i $|z_2 - z_1|$ są pewnymi stałymi. Ponieważ $x_2 - x_1$ jest funkcją ciągłą czasu t, więc z tego, że $|x_2 - x_1| = \text{const.}$ wynika również, że $x_2 - x_1 = \text{const.}$ Podobnie $y_2 - y_1 = \text{const.}$ i $z_2 - z_1 = \text{const.}$ Zatem wektor $\overline{AB}$ nie zmienia zwrotu.

Oznaczając tedy przez A, B i A', B' położenia danych punktów w dowolnych dwóch chwilach t i t', otrzymamy $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, skąd $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Przesunięcia dwóch dowolnych punktów są zatem równe, a więc możemy przeprowadzić ciało z położenia w chwili t do położenia w chwili t' przy pomocy przesunięcia. Ruch ciała jest więc ruchem postępowym.

Weźmy pod uwagę w ciele poruszającym się ruchem postępowym dwa dowolne punkty A_1, A_2 w chwili t i położenia A_1', A_2' tych punktów w chwili $t + \Delta t$. Oznaczając przez $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ prędkości punktów A_1 i A_2, otrzymamy (str. 35):

$$\bar{v}_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{A_1 A_1'}}{\Delta t}, \qquad \bar{v}_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{A_2 A_2'}}{\Delta t}.$$

Ponieważ ciało porusza się ruchem postępowym, więc $\overline{A_1 A_1'} = \overline{A_2 A_2'}$, skąd $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$.

A więc: *w ruchu postępowym w dowolnej chwili t prędkości wszystkich punktów ciała są sobie równe.*

Prędkością ruchu postępowego w chwili t nazywamy wspólną prędkość wszystkich punktów ciała w tej chwili.

Niech teraz ciało porusza się w taki sposób, że w każdej poszczególnej chwili t prędkości wszystkich punktów ciała są sobie równe. Obierzmy dwa dowolne punkty ciała $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$.

Ponieważ w jednej i tej samej chwili prędkość punktu A jest zawsze równa prędkości punktu B, więc:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2, \qquad \dot{y}_1 = \dot{y}_2, \qquad \dot{z}_1 = \dot{z}_2, \qquad \text{skąd} \qquad \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0.$$

Zatem $x_2 - x_1 = c_1$ i podobnie $y_2 - y_1 = c_2$, $z_2 - z_1 = c_3$, gdzie c_1, c_2 i c_3 są pewnymi stałymi. Wynika stąd, że wektor $\overline{AB}$ ma stałe rzuty na osie układu, nie zmienia więc podczas ruchu ani kierunku, ani zwrotu. Ruch jest przeto ruchem postępowym.

A więc: *jeżeli wszystkie punkty ciała mają w każdej poszczególnej chwili prędkości równe, to ciało porusza się ruchem postępowym.*

Ruch obrotowy około osi. Jeżeli ciało porusza się w ten sposób, że wszystkie punkty pewnej prostej l pozostają w spoczynku, to powiadamy, że ciało *obraca się około osi l* (str. 311).

W ruchu obrotowym wszystkie punkty krążą po kołach, leżących w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu; środki tych kół leżą na osi obrotu.

Promienie łączące punkty ciała ze środkami kół, po których punkty te krążą, zakreślają w równych czasach równe kąty. Wynika stąd, że w ruchu obrotowym około osi wszystkie punkty mają w każdej poszczególnej chwili równe prędkości kątowe. Ich wspólną prędkość kątową nazywamy *prędkością kątową* ruchu obrotowego około osi.

Z określenia wektora prędkości kątowej (str. 46) wynika, że w ruchu obrotowym ciała około osi wszystkie punkty mają ten sam wektor prędkości kątowej, leżący na osi obrotu. Wektor ten nazywamy *wektorem prędkości kątowej* obracającego się ciała.

Przykład 1. Jeżeli w równoległoboku $ABCD$ wierzchołki A i D są unieruchomione, wówczas boki AB i DC mogą się obracać około wierzchołków A i D. Przy tych obrotach bok BC pozostaje stale równoległy do AD. Zatem BC porusza się wówczas ruchem postępowym.

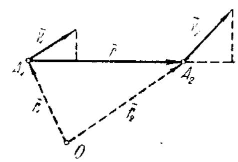
Przykład 2. Koło o środku O' i promieniu r porusza się ruchem postępowym, pozostając stale stycznym do koła K o środku O i promieniu R. Wyznaczyć tor dowolnego punktu A (rys. str. 369).

Środek O' porusza się oczywiście po kole K' o środku O i promieniu $a = R - r$. Tor punktu A (kropkowany na rysunku) będzie zatem kołem o promieniu a. Środek O_1 tego koła otrzymamy, nadając środkowi O przesunięcie $\overline{OO_1}$ równe wektorowi $\overline{O'A}$.

§ 5. Rozmieszczenie prędkości w ciele sztywnym. Gdy ciało sztywne się porusza, punkty jego mogą mieć w danej chwili na ogół prędkości różne.

Związki między prędkościami punktów ciała. Weźmy pod uwagę dwa punkty ciała A_1 i A_2 o prędkościach $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$. Niech O będzie początkiem układu współrzędnych. Połóżmy:

$$\bar{r}_1 = \overline{OA_1}, \qquad \bar{r}_2 = \overline{OA_2}, \qquad \bar{r} = \overline{A_1A_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1.$$



Zatem (str. 35, (III)):

$$(1) \qquad \dot{\bar{r}}_1 = \bar{v}_1, \qquad \dot{\bar{r}}_2 = \bar{v}_2, \qquad \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_2 - \dot{\bar{r}}_1 = \bar{v}_2 - \bar{v}_1.$$

Mamy $\bar{r}^2 = |\bar{r}|^2$. Ponieważ $|\bar{r}| = \text{const.}$, więc tworząc pochodną, otrzymamy $2\bar{r}\dot{\bar{r}} = 0$ czyli $\bar{r}\dot{\bar{r}} = 0$, skąd na mocy (1) $\bar{r}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = 0$ czyli

$$(2) \qquad \bar{r}\bar{v}_2 = \bar{r}\bar{v}_1.$$

Z określenia iloczynu skalarowego wynika, że

$$\bar{r}\bar{v}_1 = |\bar{r}| \operatorname{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \bar{v}_1 \qquad \text{i} \qquad \bar{r}\bar{v}_2 = |\bar{r}| \operatorname{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \bar{v}_2.$$

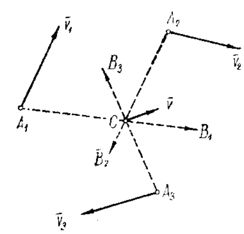
Na mocy więc (2) otrzymamy, dzieląc przez $|\bar{r}|$,

$$(3) \qquad \operatorname{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \bar{v}_1 = \operatorname{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \bar{v}_2.$$

Udowodniliśmy więc, że *w ciele sztywnym rzuty prędkości dwóch punktów na odcinek łączący te punkty są równe.*

Możemy także powiedzieć, że składowe prędkości dwóch punktów względem odcinka łączącego te punkty są równe.

Przykład 1. Niech dane będą prędkości $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ trzech punktów ciała A_1, A_2, A_3, nie leżących na jednej prostej. Obierzmy dowolnie punkt C, nie leżący w płaszczyźnie $A_1A_2A_3$, i oznaczmy jego prędkość przez $\bar{v}$. Wykreślmy z punktu C wektory $\overline{CB_1}$, $\overline{CB_2}$, $\overline{CB_3}$ równe rzutom prędkości $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ na proste A_1C, A_2C, A_3C.



W myśl udowodnionego twierdzenia wektory te będą również rzutami wektora $\bar{v}$ o początku C na proste A_1C, A_2C i A_3C. Jeżeli do tych prostych poprowadzimy płaszczyzny prostopadłe w punktach B_1, B_2 i B_3, to punkt przecięcia tych płaszczyzn będzie końcem wektora $\bar{v}$.

Aby wyznaczyć prędkość punktu D, leżącego w płaszczyźnie $A_1A_2A_3$, wyznaczamy najpierw prędkość dowolnego punktu C, nie leżącego w płaszczyźnie $A_1A_2A_3$, a następnie prędkość punktu D jak poprzednio (biorąc spośród punktów A_1, A_2, A_3 i C trzy punkty nie leżące wraz z D w jednej płaszczyźnie).

A więc: *prędkości wszystkich punktów ciała sztywnego wyznaczone są przez prędkości trzech jego punktów, nie leżących na jednej prostej.*

Przykład 2. Prędkości punktów linii prostej i płaszczyzny. Nadajmy poruszającej się prostej l dowolny zwrot i weźmy na niej punkt O o współrzędnych x_0, y_0, z_0. Oznaczmy przez α, β, γ kąty, jakie oś l tworzy z osiami układu współrzędnych, i połóżmy:

$$a = \cos\alpha, \qquad b = \cos\beta, \qquad c = \cos\gamma.$$

Dla dowolnego punktu $A(x, y, z)$ osi l, o współrzędnej r na tej osi, jest:

$$x = x_0 + ar, \qquad y = y_0 + br, \qquad z = z_0 + cr. \tag{4}$$

Oznaczając przez $\bar{v}$ prędkość punktu A i tworząc pochodną (4) względem czasu, otrzymamy (wobec tego, że $r = \text{const.}$):

$$v_x = \dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{a}r, \qquad v_y = \dot{y} = \dot{y}_0 + \dot{b}r, \qquad v_z = \dot{z} = \dot{z}_0 + \dot{c}r. \tag{5}$$

Wykreślmy z punktu A wektor $\overline{AA'}$, równy prędkości $\bar{v}$ punktu A, i oznaczmy przez ξ, η, ζ współrzędne punktu A'. Z uwagi na to, że $\xi = x + v_x$ it.d., dostaniemy na mocy (4) i (5):

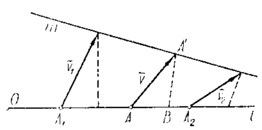
$$\xi = x_0 + \dot{x}_0 + (a + \dot{a})r, \qquad \eta = y_0 + \dot{y}_0 + (b + \dot{b})r, \qquad \zeta = z_0 + \dot{z}_0 + (c + \dot{c})r.$$

Jako równania pierwszego stopnia ze względu na parametr r są to równania prostej.

A więc: *jeżeli z punktów położonych na linii prostej wykreślić wektory prędkości, to końce tych wektorów leżą na linii prostej.*

Opierając się na tym twierdzeniu, można łatwo udowodnić, podobne twierdzenia dla płaszczyzny.

Mianowicie: *jeżeli z punktów położonych na płaszczyźnie wykreślić wektory prędkości, to końce tych wektorów leżą na jednej płaszczyźnie.*



Znając prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ dwóch punktów A_1 i A_2 prostej l, można wyznaczyć prędkość $\bar{v}$ dowolnego punktu A tej prostej, w sposób następujący (p. rysunek):

Prowadzimy prostą m przez końce wektorów prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$, wykreślonych z punktów A_1 i A_2. Na tej prostej leży koniec wektora prędkości $\bar{v}$, wykreślonego z A. Wyznaczamy na prostej l punkt B taki, by wektor $\overline{AB}$ równy był rzutowi $\bar{v}_1$ (lub $\bar{v}_2$) na oś l. Wedle twierdzenia dowiedzionego na str. 323, $\overline{AB}$ jest rzutem $\bar{v}$ na l. Jeżeli przez B przeprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do l, to punkt A', w którym płaszczyzna ta przetnie prostą m, będzie końcem wektora $\bar{v}$, wykreślonego z A.

Ruch chwilowy ciała sztywnego. Weźmy pod uwagę w ciele sztywnym dowolny punkt A o współrzędnych x, y, z w pewnej chwili t i oznaczmy przez $\bar{v}$ jego prędkość. Ponieważ $\bar{v}$ zależy od punktu A, więc $\bar{v}$ jest w chwili t funkcją współrzędnych x, y, z. Możemy zatem przyjąć, że

$$\bar{v} = \bar{F}(x, y, z). \tag{6}$$

Funkcja wektorowa (6) określa prędkość w chwili t w każdym punkcie ciała.

Rozmieszczenie prędkości w ciele w pewnej chwili nazywamy *ruchem chwilowym* ciała.

Ruch chwilowy ciała jest zatem wyznaczony przez podanie funkcji wektorowej (6).

W ruchu postępowym wszystkie punkty mają tę samą prędkość. Funkcja (6) przyjmie więc postać $\bar{v} = \text{const}$.

W ruchu obrotowym około osi l mamy dla punktu A, oznaczając przez $\bar{\omega}$ wektor prędkości kątowej, a przez O dowolny punkt na osi l (por. wzory (2) i (III), str. 46):

$$\bar{v} = \mathrm{Mom}_A\,\bar{\omega} \qquad \text{lub} \qquad \bar{v} = \overline{OA} \times \bar{\omega}. \tag{7}$$

Ruch chwilowy ciała w chwili t nazywamy *ruchem chwilowym postępowym*, jeżeli wszystkie punkty ciała mają tę samą prędkość. Prędkość tę nazywamy *prędkością chwilową ruchu postępowego*.

Ruch chwilowy ciała w chwili t nazywamy *ruchem chwilowym obrotowym* około osi l, jeżeli prędkość punktów ciała wyrażają się wzorem (7), t. zn. jeżeli prędkości punktów ciała w chwili t są takie, jak gdyby ciało obracało się około osi l. Prędkość $\bar{\omega}$ nazywamy wektorem *prędkości kątowej chwilowej*, a oś l *osią obrotu chwilowego*.

Jeżeli w każdej chwili czasu ruch chwilowy jest obrotem około prostej (nieruchomej) l, to jest on ruchem obrotowym około osi l.

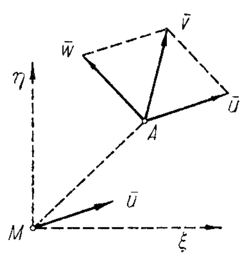
Obierzmy bowiem stały układ współrzędnych $O(x,y,z)$, przyjmując oś l za oś z. Niechaj A będzie dowolnym punktem ciała o współrzędnych x,y,z, a $\overline{\omega}$ wektorem prędkości chwilowej. Wówczas $\omega_x=0$ i $\omega_y=0$. Według wzoru (7) rzuty prędkości $\overline{v}$ punktu A wynoszą:

(8) $$v_x=\dot{x}=y\omega_z, \qquad v_y=\dot{y}=-x\omega_z, \qquad v_z=\dot{z}=0.$$

Ponieważ $\dot{z}=0$, więc $z=\text{const}$. Punkty biegną zatem po płaszczyznach prostopadłych do osi l. Z równań (8) dostajemy $x\dot{x}+y\dot{y}=0$, skąd po scałkowaniu $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=\text{const}$. czyli $x^2+y^2=\text{const}$. Punkty ciała krążą tedy po płaszczyznach prostopadłych do osi l w stałej odległości od l, a więc ciało wykonywa obrót około l.

§ 6. Ruch chwilowy płaski. Niech figura płaska porusza się w płaszczyźnie Π. Obierzmy w tej płaszczyźnie dowolne dwa układy współrzędnych: jeden stały (x,y), a drugi (ξ,η) poruszający się ruchem postępowym i mający początek w dowolnie obranym punkcie M danej figury.

Ruch chwilowy figury względem układu (ξ,η) będzie tedy obrotem około punktu M (czyli około osi l prostopadłej do Π w punkcie M). Prędkości względne punktów w chwili t będą więc takie, jak gdyby figura obracała się około punktu M z pewną prędkością kątową ω. Możemy zatem powiedzieć, że ruch chwilowy względny jest ruchem obrotowym około punktu M. Ponieważ ruch układu (ξ,η) jest postępowy, więc prędkość unoszenia jest jednakowa dla wszystkich punktów figury (str. 58) i równa się prędkości punktu M. Oznaczając przez $\overline{v}$ prędkość (bezwzględną) dowolnego punktu A, przez $\overline{w}$ prędkość względną punktu A, a przez $\overline{u}$ prędkość unoszenia (t. j. prędkość punktu M), otrzymamy zatem (str. 58)



(1) $$\overline{v}=\overline{u}+\overline{w}.$$

Możemy wobec tego powiedzieć, że prędkości punktów figury są takie, jak gdyby figura wykonywała dwa ruchy równocześnie: jeden postępowy z prędkością $\overline{u}$ dowolnego punktu M figury, drugi zaś obrotowy około tegoż punktu M.

A więc: *ruch chwilowy figury w ruchu płaskim składa się z ruchu chwilowego postępowego i ruchu chwilowego obrotowego; ruch postępowy ma prędkość dowolnego punktu figury, zaś ruch obrotowy jest obrotem około tegoż punktu.*

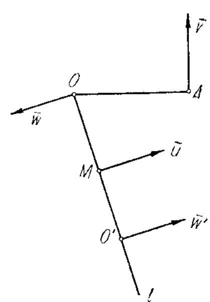
Ruch chwilowy figury można przedstawić na ogół na nieskończenie wiele sposobów jako złożenie ruchu chwilowego postępowego i ruchu chwilowego obrotowego. Zależy to bowiem od wyboru punktu M.

We wszystkich tych przedstawieniach jednak prędkości chwilowe kątowe są równe. Obierzmy bowiem na figurze dowolną oś k w chwili t i niechaj k' oznacza położenie tej osi w chwili $t+\Delta t$. Kąt $\Delta\varphi$, jaki oś k' tworzy z osią k, jest równy kątowi, o jaki figura obróciła się około M w ruchu względnym. Widzimy stąd, że $\Delta\varphi$ nie zależy od wyboru punktu M, a tym samym i ω, bo $\omega = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta\varphi/\Delta t$.

W szczególności ruch chwilowy może być ruchem chwilowym postępowym (jeżeli prędkość chwilowa kątowa ω jest zerem) lub ruchem chwilowym obrotowym (jeżeli punkt M ma prędkość $\bar{u}=0$).

Dla każdego punktu A figury prędkość $\bar{w}$ (obrotu chwilowego) jest prostopadła do odcinka MA, przyczem $|\bar{w}| = MA\cdot\omega$. Znając zwrot obrotu chwilowego, możemy więc wyznaczyć zwrot $\bar{w}$, a następnie otrzymać ze wzoru (1) prędkość $\bar{v}$ punktu A.

Niech teraz $\bar{u}\neq 0$ i $\omega\neq 0$. Weźmy pod uwagę na prostej l, prostopadłej do $\bar{u}$ i przechodzącej przez M, dwa punkty O i O' w odległości r od M, gdzie $r=|\bar{u}|/\omega$.



Prędkości obrotu chwilowego $\bar{w}$ i $\bar{w}'$ punktów O i O' są prostopadłe do l, zatem równoległe do $\bar{u}$. Mamy ponadto $|\bar{w}| = MO\cdot\omega = r\omega = |\bar{u}|$ i podobnie $|\bar{w}'| = |\bar{u}|$. Ponieważ $\bar{w}$ i $\bar{w}'$ mają zwroty przeciwne, więc dla jednego z punktów O i O', np. dla O, mamy $\bar{w}=-\bar{u}$. Zatem prędkość punktu O wynosi $\bar{v}=\bar{w}+\bar{u}=0$. Jeżeli więc początek układu (ξ,η) umieścimy w punkcie O, to prędkość unoszenia będzie zerem, ruch chwilowy będzie zatem obrotem chwilowym około O.

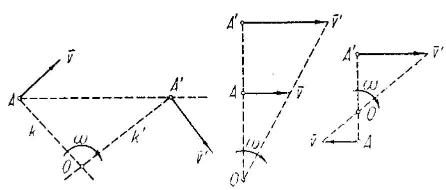
Punkt O nazywamy *środkiem obrotu chwilowego*.

Prędkość $\bar{v}$ dowolnego punktu A jest prostopadła do odcinka OA i ma zwrot zależny od zwrotu obrotu chwilowego. Ponadto

$$|\bar{v}| = OA\cdot\omega. \tag{2}$$

A więc: *ruch chwilowy płaski jest albo ruchem chwilowym postępowym, albo ruchem chwilowym obrotowym około środka obrotu chwilowego.*

Wyznaczanie środka obrotu chwilowego. Środek obrotu chwilowego ma oczywiście prędkość 0. Każdy inny punkt ma według (2) prędkość $\bar{v} \neq 0$ (jeżeli $\omega \neq 0$). Istnieje zatem jeden tylko środek obrotu chwilowego (gdy $\omega \neq 0$).



1. 2. 3.

Jeżeli w dowolnym punkcie A wykreślimy prostopadłą do prędkości $\bar{v}$ tego punktu, to środek obrotu chwilowego znajdzie się na tej prostej (rys. 1).

Środek obrotu chwilowego można na ogół wyznaczyć, znając prędkość $\bar{v}$ jednego punktu, np. A, oraz kierunek prędkości $\bar{v}'$ drugiego punktu A'. Wykreślmy proste k i k' prostopadłe do $\bar{v}$ i $\bar{v}'$ w punktach A i A'. Punkt O przecięcia się tych prostych jest środkiem obrotu chwilowego. Ze wzoru (2) otrzymujemy $\omega = |\bar{v}|/OA$. Zwrot obrotu chwilowego otrzymamy ze zwrotu prędkości $\bar{v}$.

Gdy proste k i k' są równoległe, to ruch chwilowy jest ruchem chwilowym postępowym.

Gdy proste k i k' pokrywają się z sobą, musimy w celu wyznaczenia ruchu chwilowego znać jeszcze prędkość $\bar{v}'$ punktu A'. Znajomość samego tylko kierunku prędkości $\bar{v}'$ wówczas nie wystarcza.

Gdy $\bar{v} = \bar{v}'$, ruch chwilowy jest ruchem postępowym.

Gdy zaś $\bar{v} \neq \bar{v}'$, ruch chwilowy jest ruchem chwilowym obrotowym. Oznaczając wówczas przez O środek obrotu chwilowego (leżący oczywiście na prostych k i k'), mamy na mocy (2) $|\bar{v}| = OA \cdot \omega$ i $|\bar{v}'| = OA' \cdot \omega$. Zatem

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{|\bar{v}|}{|\bar{v}'|}. \tag{3}$$

Jeżeli $\bar{v}$ i $\bar{v}'$ mają zwroty zgodne (rys. 2) i $|\bar{v}| < |\bar{v}'|$, to punkt O leży na przedłużeniu odcinka $A'A$ poza punktem A. Mamy wtedy $OA' - OA = A'A$, skąd na mocy (3)

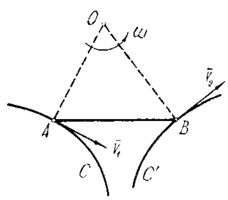
$$OA = A'A \cdot \frac{|\bar{v}|}{|\bar{v}'| - |\bar{v}|}. \tag{4}$$

Jeżeli zaś $\bar{v}$ i $\bar{v}'$ mają zwroty przeciwne (rys. 3), punkt O leży na odcinku AA'. Mamy wtedy $OA + OA' = AA'$, skąd na mocy (3)

$$OA = AA' \cdot \frac{|\bar{v}|}{|\bar{v}| + |\bar{v}'|}. \tag{5}$$

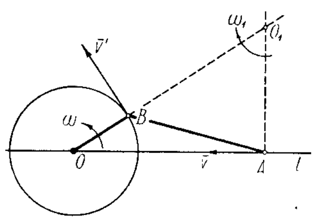
Przykład 1. Pręt AB porusza się w płaszczyźnie w ten sposób, że oba jego końce A i B poruszają się stale po krzywych C i C'. Prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ punktów A i B są styczne do krzywych C i C'.

Rysując w punktach A i B prostopadłe do stycznych, otrzymamy środek O chwilowego obrotu pręta AB, jako punkt przecięcia się tych prostopadłych. Oznaczając przez ω prędkość chwilową kątową, otrzymamy:



$$|\bar{v}_1| = OA\cdot\omega, \quad |\bar{v}_2| = OB\cdot\omega \quad \text{i} \quad |\bar{v}_1|/|\bar{v}_2| = OA/OB.$$

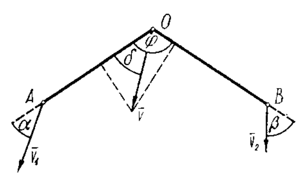
Przykład 2. W mechaniźmie korbowym pręt AB porusza się w ten sposób, że jego koniec B połączony jest przegubowo z prętem OB unieruchomionym w O, drugi zaś koniec A porusza się po prostej l przechodzącej przez O. Pręt OB obraca się około punktu O z prędkością kątową ω. Jaka jest prędkość punktu A?



Prędkość $\bar{v}'$ punktu B jest prostopadła do OB, a prędkość $\bar{v}$ punktu A ma kierunek prostej l. Kreśląc prostopadłe do $\bar{v}'$ i $\bar{v}$, otrzymamy środek O_1 chwilowego obrotu pręta AB. Jest $OB\cdot\omega = |\bar{v}'| = O_1B\cdot\omega_1$, zatem $\omega_1 = OB\cdot\omega/O_1B$, skąd

$$|\bar{v}| = O_1A\cdot\omega_1 = O_1A\cdot OB\cdot\omega/O_1B.$$

Przykład 3. Układ dwóch prętów AO i OB, połączonych przegubowo, porusza się w płaszczyźnie. Dane są prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ punktów A i B. Wyznaczyć prędkość punktu O.



Oznaczmy przez α i β kąty, jakie tworzą prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ z prętami OA i OB, przez δ kąt, jaki prędkość $\bar{v}$ punktu O tworzy z prętem OA, a przez φ kąt AOB.

Ponieważ rzuty prędkości $\bar{v}$ na pręty OA i OB są odpowiednio równe rzutom $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ na te pręty, więc oznaczając przez v, v_1 i v_2, wartości bezwzględne tych prędkości, otrzymamy:

$$(6) \qquad v_1\cos\alpha = v\cos\delta, \qquad v_2\cos\beta = v\cos(\varphi-\delta),$$

skąd

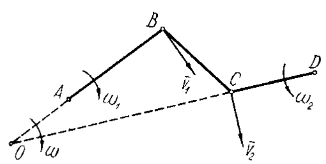
$$\cos(\varphi-\delta)/\cos\delta = v_2\cos\beta/v_1\cos\alpha,$$

więc $\cos\varphi + \operatorname{tg}\delta \sin\varphi = v_2\cos\beta / v_1\cos\alpha$ czyli

$$\operatorname{tg}\delta = (v_2\cos\beta - v_1\cos\alpha\cos\varphi)/v_1\cos\alpha\sin\varphi.$$

Znając δ, wyznaczamy v z równania (6).

Przykład 4. W płaszczyźnie leży układ trzech prętów AB, BC i CD, połączonych przegubowo i unieruchomionych w A i D. Pręt AB obraca się około A z prędkością kątową ω_1. Wyznaczyć prędkość kątową ω_2 pręta CD około D.



Punkty B i C krążą po kołach o środkach A i D; ich prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ są zatem prostopadłe do AB i CD. Środek obrotu chwilowego pręta BC otrzymamy, prowadząc prostopadłe do $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$, czyli przedłużając odcinki AB i DC do przecięcia się w punkcie O. Punkt O jest środkiem obrotu chwilowego pręta BC.

Oznaczmy przez ω prędkość chwilową kątową pręta BC. Kładąc $v_1 = |\bar{v}_1|$ i $v_2 = |\bar{v}_2|$, otrzymamy więc:

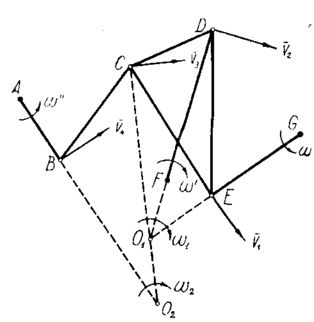
$$v_1 = OB\cdot\omega \quad \text{i} \quad v_2 = OC\cdot\omega. \tag{7}$$

Pręt AB obraca się około A z prędkością kątową ω_1; zatem

$$v_1 = AB\cdot\omega_1 \quad \text{i podobnie} \quad v_2 = CD\cdot\omega_2. \tag{8}$$

Z (7) i (8) otrzymujemy $AB\cdot\omega_1 = OB\cdot\omega$ czyli $\omega = AB\cdot\omega_1/OB$, skąd na mocy (7) $v_2 = AB\cdot OC\cdot\omega_1/OB$, a ponieważ na mocy (8) jest $\omega_2 = v_2/CD$, więc

$$\omega_2 = \frac{AB\cdot OC}{OB\cdot CD}\omega_1.$$



Przykład 5. Dany jest układ prętów połączonych przegubowo w węzłach B, C, D i E. Pręty AB, FD i EG mogą się obracać około punktów A, F i G, które są unieruchomione. Pręt GE obraca się około G z prędkością kątową ω. Wyznaczyć prędkości kątowe ω' i ω'' prętów FD i AB około F i A.

Oznaczmy przez $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ i $\bar{v}_4$ prędkości punktów E, D, C, B, zaś przez v_1, v_2, v_3 i v_4 ich wartości bezwzględne. Punkty E i D krążą po kołach o środkach G i F. Prędkości więc tych punktów są prostopadłe do EG i FD.

Niech O_1 będzie punktem przecięcia prostopadłych do $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ (t. j. przedłużeń prętów GE i DF). Punkt O_1 będzie środkiem obrotu chwilowego pręta ED, a zarazem trójkąta EDC, gdyż pręty ED, DC i CE tworzą układ sztywny.

Oznaczając przez ω_1 prędkość obrotu chwilowego około O_1, której zwrot wyznaczamy ze zwrotu $\bar{v}_1$, mamy:

(9) $$v_1 = O_1E \cdot \omega_1, \qquad v_2 = O_1D \cdot \omega_1.$$

Zwrot $\bar{v}_2$ wyznaczamy ze zwrotu prędkości kątowej ω_1.

Ponieważ $v_1 = GE \cdot \omega$, więc na mocy (9):

(10) $$\omega_1 = \frac{GE}{O_1E}\omega, \qquad v_2 = \frac{O_1D \cdot GE}{O_1E}\omega.$$

Pręt FD obraca się około F z prędkością kątową ω', więc $v_2 = FD \cdot \omega'$ czyli $\omega' = v_2/FD$. Na mocy (10) jest zatem

(11) $$\omega' = \frac{O_1D \cdot GE}{O_1E \cdot FD}\omega.$$

Zwrot ω' wyznaczamy ze zwrotu $\bar{v}_2$.

Prędkość $\bar{v}_3$ punktu C jest prostopadła do O_1C; mamy więc

(12) $$v_3 = O_1C \cdot \omega_1.$$

Zwrot $\bar{v}_3$ wyznaczamy ze zwrotu obrotu około O_1.

Aby wyznaczyć środek O_2 obrotu chwilowego pręta BC, zauważmy, że prędkość $\bar{v}_4$ punktu B jest prostopadła do pręta AB. Kreślimy więc prostopadłe do prędkości $\bar{v}_4$ i $\bar{v}_3$, czyli przedłużamy AB i CO_1 do przecięcia się w O_2.

Oznaczając przez ω_2 prędkość kątową obrotu chwilowego około O_2, mamy:

(13) $$v_3 = O_2C \cdot \omega_2, \qquad v_4 = O_2B \cdot \omega_2.$$

Zwrot obrotu chwilowego otrzymujemy ze zwrotu $\bar{v}_3$.

Z (13) dostajemy:

(14) $$\omega_2 = v_3/O_2C, \qquad v_4 = O_2B \cdot v_3/O_2C.$$

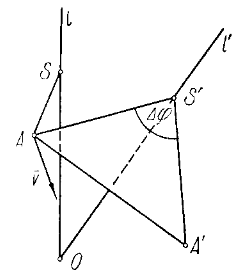
Zwrot $\bar{v}_4$ otrzymujemy ze zwrotu obrotu około O_2.

Ponieważ pręt AB obraca się około A z prędkością kątową ω'', więc $v_4 = AB \cdot \omega''$ czyli $\omega'' = v_4/AB$. Stąd na mocy (14), (12) i (10) dostajemy

$$\omega'' = \frac{O_2B \cdot O_1C \cdot GE}{AB \cdot O_2C \cdot O_1E}\omega.$$

Zwrot prędkości kątowej ω'' otrzymujemy ze zwrotu $\bar{v}_4$.

§ 7. Ruch chwilowy przestrzenny. Zajmiemy się najpierw przypadkiem szczególnym.



Obrót około punktu. Przypuśćmy, że ciało obracające się około punktu stałego O, zajmowało położenie I w chwili t, zaś położenie II w chwili $t+\Delta t$. Z położenia I w położenie II możemy więc przeprowadzić ciało przy pomocy obrotu o kąt $\Delta\varphi$ około pewnej prostej l'. Załóżmy, że gdy Δt dąży do 0, prosta l' dąży do pewnej prostej l. Połóżmy

(1) $$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta\varphi/\Delta t = \omega.$$

Oznaczmy przez A dowolny punkt ciała w położeniu I, a przez A' odpowiedni punkt w położeniu II. Niechaj S' będzie środkiem koła, po którym porusza się A przy obrocie około prostej l', zaś S położeniem granicznym punktu S', gdy $\Delta t\to 0$. Oznaczmy wreszcie przez $\bar{v}$ prędkość punktu A. Mamy

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\overline{AA'}}{\Delta t},$$

zatem

$$|\bar{v}| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\overline{AA'}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\,AS'\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{AS'\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

a ponieważ $\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\left(\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\Big/\frac{\Delta\varphi}{2}\right)=1$, więc na mocy (1)

(2) $$|\bar{v}| = AS\cdot\omega.$$

Zauważmy, że wektor $\overline{AA'}/\Delta t$ jest prostopadły do l' i tworzy z odcinkiem $S'A$ kąt $90^0-\Delta\varphi/2$; wektor $\bar{v}$ jest tedy w granicy prostopadły do l i AS. Prędkość punktu A w chwili t jest zatem taka, jak gdyby ciało obracało się około osi l z prędkością kątową ω. Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Ruch chwilowy ciała, obracającego się wkoło pewnego punktu O, jest obrotem chwilowym wkoło osi, przechodzącej przez O.

Prędkość $\bar{v}$ punktu A jest prostopadła do płaszczyzny Π przechodzącej przez l i A, skąd $\bar{v}\perp OA$, ponieważ OA leży w Π.

A więc: *przy obrocie ciała około punktu O prędkości punktów ciała są prostopadłe do prostych łączących te punkty z punktem O.*

Oś l obrotu chwilowego leży w płaszczyźnie przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prędkości punktu A. Znając więc kierunki prędkości dwóch punktów ciała, otrzymamy oś obrotu chwilowego jako krawędź przecięcia płaszczyzn, przechodzących przez te punkty prostopadle do kierunków prędkości. Prędkość chwilową kątową otrzymamy z równości (2).

Przykład 1. Kula $x^2+y^2+z^2=1$ obraca się około środka O. Dana jest prędkość $\bar{v}$ punktu $A(1,0,0)$ w pewnej chwili t oraz kierunek prędkości $\bar{w}$ punktu $B(0,1,0)$ w tejże chwili. Wyznaczyć oś obrotu chwilowego, prędkość kątową i prędkość $\bar{w}$ (w chwili t).

Ponieważ prędkość $\bar{v}$ jest prostopadła do OA, t. j. do osi x, więc $v_x=0$. Oznaczmy przez a, b, c cosinusy kątów, jakie prędkość $\bar{w}$ tworzy z osiami układu współrzędnych. Mamy oczywiście $b=0$, gdyż $\bar{w}$ jest prostopadłe do OB, t. j. do osi y.

Oś chwilowego obrotu jest przecięciem płaszczyzn przeprowadzonych przez O oraz przez A i B prostopadle do prędkości $\bar{v}$ i $\bar{w}$. Równania tych płaszczyzn są następujące:

$$yv_y + zv_z = 0, \qquad ax + cz = 0, \tag{3}$$

skąd

$$\frac{x}{c/a} = \frac{y}{v_z/v_y} = \frac{z}{-1}. \tag{4}$$

Równania (4) są równaniami osi obrotu chwilowego.

Niech $\bar{\omega}$ oznacza prędkość chwilową kątową. Rzuty $\bar{\omega}$ na osie układu są proporcjonalne do współczynników kierunkowych osi obrotu, t. j. do liczb c/a, v_z/v_y i -1. Oznaczając przez λ współczynnik proporcjonalności, dostaniemy:

$$\omega_x = \lambda c/a, \qquad \omega_y = \lambda v_z/v_y, \qquad \omega_z = -\lambda. \tag{5}$$

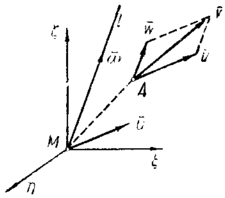
Aby wyznaczyć λ, obliczamy prędkość $\bar{v}$, opierając się na wzorze $\bar{v}=\overline{OA}\times\bar{\omega}$. Otrzymujemy $v_x=0$, $v_y=\lambda$ i $v_z=\lambda v_z/v_y$, skąd $\lambda=v_y$, więc na mocy (5):

$$\omega_x = cv_y/a, \qquad \omega_y = v_z, \qquad \omega_z = -v_y. \tag{6}$$

Ponieważ $\bar{w}=\overline{OB}\times\bar{\omega}$, więc na mocy (6) jest

$$w_x = -v_y, \qquad w_y = 0, \qquad w_z = -cv_y/a.$$

Ruch chwilowy w przypadku ogólnym. Umieśćmy w dowolnym punkcie M danego ciała początek układu współrzędnych (ξ, η, ζ), poruszającego się ruchem postępowym. Ponieważ punkt M jest względem układu (ξ, η, ζ) nieruchomy, więc ruch ciała względem układu (ξ, η, ζ) jest obrotem około punktu M. Ruch chwilowy względny będzie więc obrotem chwilowym około osi obrotu chwilowego l, przechodzącej przez M.



Niechaj A będzie dowolnym punktem ciała. Oznaczmy przez $\bar{v}$ prędkość bezwzględną punktu A, przez $\bar{u}$ prędkość unoszenia, a przez $\bar{w}$ prędkość względną. Zatem

$$(7) \qquad \bar{v} = \bar{u} + \bar{w}.$$

Prędkość unoszenia $\bar{u}$ równa się prędkości punktu M, gdyż układ (ξ, η, ζ) porusza się ruchem postępowym. Prędkości punktów ciała są zatem takie, jak gdyby ciało wykonywało dwa ruchy równocześnie: jeden postępowy z prędkością $\bar{u}$ dowolnego punktu M ciała, drugi zaś obrotowy około pewnej osi przechodzącej przez M.

A więc: *ruch chwilowy ciała składa się z ruchu chwilowego postępowego o prędkości dowolnego punktu M tego ciała i ruchu chwilowego obrotowego około osi obrotu chwilowego, przechodzącej przez punkt M.*

Ruch chwilowy ciała możemy na ogół przedstawić na nieskończenie wiele sposobów jako złożenie ruchu chwilowego postępowego i ruchu chwilowego obrotowego. Zależy to bowiem od wyboru punktu M.

Wykażemy, że *przy wszystkich możliwych przedstawieniach wektory prędkości chwilowych kątowych są równe (t. zn. że osie obrotu chwilowego są równoległe i prędkości chwilowe kątowe są równe).*

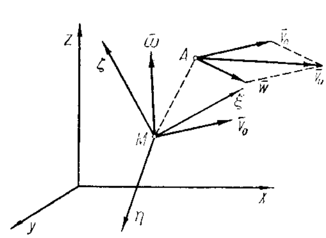
Przypuśćmy, że punkt ciała M w chwili t przeszedł w punkt M' w chwili $t+\Delta t$. Względem układu stałego zmiana położenia ciała w czasie Δt jest złożeniem przesunięcia $\overline{MM'}$ i obrotu o kąt $\Delta\varphi$ około pewnej osi l'. Względem układu (ξ, η, ζ) zmiana położenia jest tylko obrotem o kąt $\Delta\varphi$ około osi l', układ bowiem (ξ, η, ζ) wykonał w czasie Δt przesunięcie $\overline{MM'}$. Zatem położeniem granicznym osi l' jest oś l obrotu chwilowego, zaś prędkością chwilową kątową jest $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi / \Delta t$.

Z twierdzenia podanego na str. 318 wynika, że gdybyśmy w ciele obrali inny punkt M_1, to przy podobnych znakowaniach oś l'_1 byłaby równoległa do l', przyczem $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi$. Zatem oś obrotu chwilowego l_1 przechodząca przez M_1 jest równoległa do l i prędkość chwilowa kątowa ω_1 równa jest ω. Zarówno więc dla M jak dla M_1 wektory prędkości kątowych będą równe.

Uwaga. Oznaczając przez $\overline{\omega}$ wektor prędkości chwilowej kątowej, otrzymamy na mocy (III), str. 46, dla dowolnego punktu A $\overline{w} = \overline{MA} \times \overline{\omega}$, skąd na mocy (7)

(I) $$\overline{v} = \overline{u} + \overline{MA} \times \overline{\omega}.$$

Prędkość unoszenia. Niech układ współrzędnych (ξ, η, ζ) o początku M porusza się w przestrzeni względem stałego układu współrzędnych (x, y, z). Układ (ξ, η, ζ) (wraz z punktami sztywnie z nim związanymi) możemy uważać za ciało sztywne. Ruch chwilowy układu (ξ, η, ζ) będzie więc złożeniem ruchu chwilowego postępowego z prędkością $\overline{v}_0$ początku M układu i ruchu obrotowego z prędkością chwilową kątową $\overline{\omega}$ około osi obrotu chwilowego, przechodzącej przez M. Prędkość unoszenia $\overline{v}_u$ dowolnego punktu A, znajdującego się w ruchu względem układu (ξ, η, ζ), jest to prędkość, jakąby punkt A posiadał, gdyby był związany sztywnie z układem (ξ, η, ζ). Zatem $\overline{v}_u$ jest sumą prędkości $\overline{v}_0$ i prędkości $\overline{w}$ obrotu chwilowego. Wobec powyższego mamy na mocy (I)



(8) $$\overline{v}_u = \overline{v}_0 + \overline{MA} \times \overline{\omega}.$$

A więc: *prędkość unoszenia dowolnego punktu jest taka, jak gdyby punkt ten był związany sztywnie z układem ruchomym współrzędnych, a układ ten wykonywał dwa ruchy równocześnie: jeden postępowy z prędkością początku układu, drugi zaś obrotowy około osi, przechodzącej przez początek układu.*

Twierdzenie powyższe podaliśmy bez dowodu na str. 62.

Skręt chwilowy. Ruch chwilowy ciała nazywamy *skrętem chwilowym* albo *ruchem śrubowym chwilowym*, jeżeli prędkość ruchu chwilowego postępowego jest równoległa do osi obrotu chwilowego.

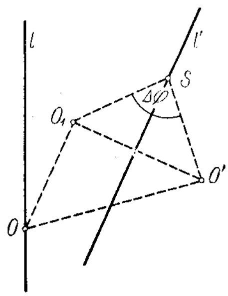
W szczególności ruch chwilowy postępowy lub obrót chwilowy nazywamy również skrętem chwilowym.

Oś skrętu chwilowego nazywamy *osią środkową* obrotu chwilowego.

Przy pomocy twierdzenia, podanego na str. 319, udowodnimy twierdzenie następujące:

Ruch chwilowy ciała sztywnego można przedstawić, i to tylko w jeden sposób, jako skręt chwilowy.

Dowód. Załóżmy, że przeprowadziliśmy ciało z położenia I w chwili t w położenie II w chwili $t+\Delta t$ przy pomocy skrętu około osi l' (str. 319). Niechaj l będzie położeniem granicznym prostej l', gdy $\Delta t \to 0$. Weźmy pod uwagę na l dowolny punkt O w chwili t i oznaczmy przez O' położenie punktu O w chwili $t+\Delta t$. Przy przeprowadzaniu ciała z położenia I w położenie II z pomocą skrętu, punkt O zajmie po przesunięciu położenie O_1, a następnie po obrocie około l' o kąt $\Delta\varphi$ przejdzie w położenie O'. Oznaczając przez $\bar{u}$ prędkość punktu O, mamy więc



$$(9) \qquad \bar{u} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{OO'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{OO_1} + \overline{O_1O'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{OO_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{O_1O'}}{\Delta t}.$$

Niech S będzie środkiem koła, po którym punkt O poruszał się przy obrocie około osi l' o kąt $\Delta\varphi$. Zatem $|\overline{O_1O'}| = 2SO_1 \cdot \sin \Delta\varphi/2$,

$$\text{skąd} \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\overline{O_1O'}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} 2SO_1 \cdot \left|\frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} SO_1 \cdot \left|\frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2}\right| \cdot \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|.$$

Ponieważ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} SO_1 = 0$, a $\lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} \left|\frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2}\right| = 1$, więc $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\overline{O_1O'}}{\Delta t}\right| = 0$.

Na mocy (9) jest więc $\bar{u} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \overline{OO_1}/\Delta t$. Lecz $\overline{OO_1} \| l'$, więc z uwagi na to, że l' dąży do l, gdy $\Delta t \to 0$, prędkość $\bar{u}$ ma kierunek osi l, która jest osią obrotu chwilowego, przechodzącą przez O. Ruch chwilowy jest więc skrętem, bo prędkość $\bar{u}$ ruchu chwilowego postępowego ma kierunek osi l obrotu chwilowego.

Punkty położone na osi skrętu chwilowego mają prędkości równe $\bar{u}$, a przeto równoległe do osi skrętu. Punkty położone poza osią skrętu mają prędkości, które nie są równoległe do osi skrętu. Prędkość takiego punktu jest bowiem sumą prędkości $\bar{u}$ i prędkości $\overline{w}$ obrotowej, prostopadłej do $\overline{u}$. Zatem suma $\overline{u}+\overline{w}$ nie jest nigdy równoległa do $\overline{u}$ (a więc i do l), chyba, że $\overline{w}=0$, t. j. że punkt leży na osi skrętu.

Wynika stąd, że ruch chwilowy daje się przedstawić jako skręt chwilowy tylko w jeden sposób. Gdybyśmy bowiem przedstawili tenże ruch chwilowy jako skręt około innej osi l_1, to na mocy twierdzenia na str. 334, proste l i l_1 byłyby równoległe, a wtedy prędkości punktów położonych na l_1 byłyby równoległe do l_1 i l co jest niemożliwe, ponieważ — jak dowiedliśmy przed chwilą — tylko punkty położone na osi l mają prędkości równoległe do l.

Przykład 2. Niech ciało porusza się w ten sposób, że ruch chwilowy jest skrętem o stałej prędkości postępowej $\overline{u}$ i obrotowej $\overline{\omega}$ około stałej osi l.

Obierzmy oś obrotu chwilowego za oś z. Oznaczmy przez ω i u współrzędne $\overline{\omega}$ i $\overline{u}$ względem osi z. Prędkość $\overline{v}$ punktu A ciała o współrzędnych x,y,z wyraża się na mocy (I), str. 335, wzorem

$$\overline{v}=\overline{u}+\overline{OA}\times\overline{\omega},$$

gdzie O jest początkiem układu. Ponieważ $\omega_x=0$, $\omega_y=0$, $\omega_z=\omega$ i $u_x=0$, $u_y=0$, $u_z=u$, więc:

$$\dot{x}=\omega y,\qquad \dot{y}=-\omega x,\qquad \dot{z}=u. \tag{10}$$

Ostatnie z równań (10) daje po scałkowaniu

$$z=ut+c, \tag{11}$$

gdzie c jest stałą dowolną. Różniczkując pierwsze z równań (10), otrzymamy $\ddot{x}=\omega\dot{y}$. Podstawiając na $\dot{y}$ wartość z równania drugiego, dostaniemy równanie $\ddot{x}+\omega^2x=0$, którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$x=a\sin\omega t+b\cos\omega t, \tag{12}$$

gdzie a i b są stałymi dowolnymi. Ponieważ $y=\dot{x}/\omega$ więc

$$y=a\cos\omega t-b\sin\omega t. \tag{13}$$

Przyjmijmy, że w chwili $t=0$ punkt A miał współrzędne $x_0=r$, $y_0=0$ i $z_0=0$. Podstawiając $t=0$ w (11)-(13), dostaniemy $a=0$, $b=r$ i $c=0$, skąd:

$$x=r\cos\omega t,\qquad y=-r\sin\omega t,\qquad z=ut.$$

Punkt będzie więc poruszał się ruchem śrubowym (str. 55) po powierzchni walca o osi z (gdyż $x^2+y^2=r^2$), zakreślając t. zw. *linię śrubową*. Jeżeli pobocznicę walca rozwiniemy, to linia śrubowa przedstawi się jako prosta. Linia śrubowa przecina zatem wszystkie tworzące pod jednym i tym samym kątem α. Odległość dwóch punktów sąsiednich linii śrubowej na tej samej tworzącej nazywamy *skokiem śruby* i oznaczamy przez h. Mamy więc

$$\operatorname{tg}\alpha = 2r\pi/h, \tag{14}$$

gdzie r jest promieniem podstawy walca. Ponieważ czas obrotu wynosi $2\pi/|\omega|$ lub $h/|\bar{u}|$, więc:

$$h=2\pi|\bar{u}|/|\bar{\omega}|, \qquad \operatorname{tg}\alpha = r|\bar{\omega}|/|\bar{u}|. \tag{15}$$

W y z n a c z a n i e   r u c h u   c i a ł a. Obierzmy w ciele dowolny punkt O o współrzędnych x_0, y_0, z_0 względem pewnego stałego układu współrzędnych (x,y,z). Oznaczmy przez $\bar{\omega}$ prędkość chwilową kątową, a przez $\bar{u}$ prędkość punktu O. Punkt ciała A o współrzędnych x,y,z ma prędkość ((I), str. 335)

$$\bar{v}=\bar{u}+OA\times\bar{\omega}. \tag{16}$$

Ponieważ: $v_x=\dot{x}$, $v_y=\dot{y}$, $v_z=\dot{z}$ i $u_x=\dot{x}_0$, $u_y=\dot{y}_0$, $u_z=\dot{z}_0$, więc dostajemy ze wzoru (16):

$$\begin{gathered}\dot{x}=\dot{x}_0+(y-y_0)\omega_z-(z-z_0)\omega_y, \qquad \dot{y}=\dot{y}_0+(z-z_0)\omega_x-(x-x_0)\omega_z,\\ \dot{z}=\dot{z}_0+(x-x_0)\omega_y-(y-y_0)\omega_x.\end{gathered} \tag{17}$$

Jeżeli ruch punktu O i prędkość kątowa $\bar{\omega}$ dane są przy pomocy funkcyj:

$$x_0=f(t), \quad y_0=\varphi(t), \quad z_0=\psi(t); \qquad \omega_x=\alpha(t), \quad \omega_y=\beta(t), \quad \omega_z=\gamma(t),$$

to (17) jest układem równań różniczkowych, w którym funkcjami niewiadomymi są funkcje $x=F(t)$, $y=\Phi(t)$ i $z=\Psi(t)$, określające ruch punktu A. Z równań (17) możemy wyznaczyć funkcje F, Φ, Ψ, jeżeli znamy położenie początkowe punktu A, prędkość chwilową kątową $\bar{\omega}$ i ruch punktu O.

A więc: *ruch ciała sztywnego jest wyznaczony przez następujące dane:*

a) *położenie początkowe ciała,*

b) *ruch jednego jego punktu,*

c) *prędkość chwilową kątową obrotu $\bar{\omega}$ w każdej chwili.*

§ 8. Toczenie i ślizganie. Niech krzywa płaska C, poruszająca się w swej płaszczyźnie Π, będzie styczną w każdej chwili do pewnej krzywej nieruchomej C', leżącej w Π.

Jeżeli ruch chwilowy krzywej C jest obrotem chwilowym około punktu styczności O, to jej ruch chwilowy nazywamy *toczeniem* się krzywej C po C'.

Wynika stąd, że przy toczeniu punkt styczności ma prędkość zero. Punkt styczności jest środkiem obrotu chwilowego.

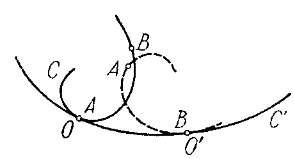
Jeżeli ruch chwilowy krzywej C jest ruchem postępowym, to jej ruch chwilowy nazywamy *ślizganiem* się krzywej C po C'.

Prędkość ruchu postępowego przy ślizganiu równa jest prędkości punktu styczności.

W przypadku ogólnym ruch chwilowy krzywej C możemy uważać za złożenie dwóch ruchów: jednego obrotowego około punktu styczności O, drugiego zaś postępowego z prędkością punktu styczności.

A więc: *ruch chwilowy jest złożeniem toczenia i ślizgania.*

Można udowodnić, że podczas toczenia się krzywej C po krzywej C' punkty styczności tworzą na obu krzywych łuki równej długości (łuki OO' i AB na rysunku). Gdy np. koło toczy się po prostej l, to odległość punktów styczności po całkowitym obrocie równa się obwodowi koła.



Toczenie i ślizganie powierzchni po powierzchni określamy analogicznie.

Niech mianowicie powierzchnia Σ porusza się w ten sposób, że stale jest styczną do pewnej powierzchni nieruchomej Σ'.

Jeżeli punkt styczności ma prędkość zero, powiadamy, że ruch chwilowy powierzchni Σ jest *toczeniem* po powierzchni Σ'.

Przy toczeniu ruch chwilowy jest obrotem około osi, przechodzącej przez punkt styczności. W szczególności, jeżeli powierzchnie Σ i Σ' są powierzchniami walcowymi lub stożkowymi, stykającymi się wzdłuż tworzących, wówczas przy toczeniu osią obrotu chwilowego jest tworząca, wzdłuż której powierzchnie się stykają.

Jeżeli ruch chwilowy powierzchni Σ jest ruchem postępowym, powiadamy, że ruch chwilowy powierzchni Σ jest *ślizganiem* po powierzchni Σ'.

Linia środków chwilowych. Niech figura K porusza się po płaszczyźnie Π. Weźmy pod uwagę w każdej chwili na płaszczyźnie Π środek obrotu chwilowego. Środki te utworzą na Π pewną linię C', zwaną *linią stałą środków chwilowych*.

Weźmy teraz pod uwagę na figurze K w każdej chwili punkt, który w danej chwili schodzi się ze środkiem obrotu chwilowego. Punkty te utworzą na figurze K pewną linię C, poruszającą się wraz z figurą. Linię tę nazywamy *linią ruchomą środków chwilowych*.

Na ogół linie środków chwilowych: ruchoma C i stała C' są styczne do siebie w każdej chwili i w chwili tej punkt ich styczności jest środkiem obrotu chwilowego. Linia ruchoma porusza się zatem wraz z figurą K w taki sposób, że jej ruch chwilowy jest w każdej chwili obrotem około jej punktu styczności z linią stałą C'.

A więc: *w ruchu płaskim linia ruchoma środków chwilowych toczy się po linii stałej środków chwilowych.*

Stożek osi chwilowych. Niech ciało K obraca się około punktu O. Weźmy pod uwagę w przestrzeni oś obrotu chwilowego w każdej chwili. Osie te utworzą pewną powierzchnię stożkową Σ' o wierzchołku O; nazywamy ją *stożkiem stałym osi chwilowych.*

Weźmy następnie pod uwagę w ciele K w każdej chwili tę prostą, która w danej chwili schodzi się z osią obrotu chwilowego. Powierzchnię Σ, jaką utworzą te proste, nazywamy *stożkiem ruchomym osi chwilowych.*

Powierzchnia Σ porusza się wraz z ciałem i jest na ogół styczna do Σ'.

A więc: *przy obrocie ciała około punktu powierzchnia ruchoma osi chwilowych toczy się po powierzchni stałej osi chwilowych.*

Powierzchnia osi środkowych. Niech ciało K wykonywa w przestrzeni ruch dowolny. Weźmy pod uwagę w przestrzeni oś skrętu, t. j. oś środkową w każdej chwili. Osie te tworzą pewną powierzchnię Σ', zwaną *powierzchnią stałą osi środkowych.*

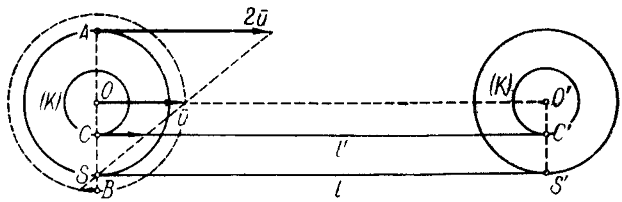
Weźmy także pod uwagę w ciele K w każdej chwili prostą, która w danej chwili schodzi się z osią środkową. Powierzchnię Σ, utworzoną przez te osie w ciele, nazywamy *powierzchnią ruchomą osi środkowych.*

Na ogół powierzchnia ruchoma osi środkowych styka się z powierzchnią stałą w każdej chwili wzdłuż osi środkowej. Ruch chwilowy powierzchni ruchomej jest skrętem około osi styczności.

Przykład 1. Koło K o promieniu r toczy się po prostej l, przyczem środek koła O porusza się ruchem jednostajnym z prędkością $\bar{u}$. Ponieważ punkt styczności S jest środkiem obrotu chwilowego, więc oznaczając przez ω prędkość chwilową kątową, mamy $u=r\omega$ (gdzie $u=|\bar{u}|$) czyli

(1) $$\omega=u/r.$$

Punkt A leżący na średnicy SO ma prędkość równą co do wielkości $2r\omega=2u$; punkt A ma więc prędkość $2\bar{u}$.



Koła wagonu kolejowego mają brzegi wystające od strony wewnętrznej szyn, by zapobiec wykolejeniu się wagonu. Najniższy więc punkt koła wagonu kolejowego (na rysunku punkt B) znajduje się poniżej punktu styczności S. Jego prędkość chwilowa ma zatem zwrot przeciwny niż prędkość pociągu (t. j. środka koła O) i wynosi $SB\cdot\omega=u\cdot SB/r$.

Jeżeli np. pociąg porusza się z prędkością 50 km/godz, to istnieją na kołach pociągu w każdej chwili punkty mające prędkości chwilowe 100 km/godz (na rysunku punkt A), a nawet takie, które biegną w przeciwnym kierunku niż pociąg (np. punkt B).

Weźmy pod uwagę na kole K koło K' o środku O i promieniu $OC=r'$. Koło pozostaje stale stycznym do prostej $l'\parallel l$. Ponieważ punkt C nie jest środkiem obrotu chwilowego, więc koło to nie toczy się po l'. Ruch koła K' jest złożeniem toczenia i ślizgania po prostej l'. Toczenie odbywa się z prędkością kątową ω, zaś ślizganie ma prędkość punktu C, t. j. $SC\cdot\omega$.

Ponieważ całe koło K o promieniu r toczy się po l, więc odcinek SS', utworzony przez punkty styczności przy pełnym obrocie koła, równa się obwodowi koła, t. j. $2\pi r$. Odpowiedni odcinek CC' dla koła K wynosi również $2\pi r$. Nie jest on równy obwodowi $2\pi r'$ koła K', ponieważ ruch koła K po prostej l' nie jest toczeniem, lecz złożeniem toczenia i ślizgania wzdłuż tej prostej.

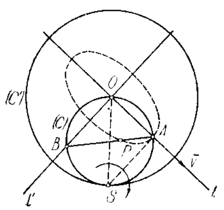
Przykład 2. Koło (C) o promieniu r toczy się po kole stałym (C') o promieniu $2r$. Koło (C) znajduje się wewnątrz koła (C') (p. str. 342, rys. 1). Wyznaczyć tory punktów koła (C).

Niech A będzie dowolnym punktem na obwodzie koła (C). Ponieważ punkt styczności S obu kół jest środkiem obrotu chwilowego, więc prędkość $\bar{v}$ punktu A jest prostopadła do SA. Kierunek prędkości punktu A przechodzi zatem przez punkt O, leżący na kole (C) i na średnicy przechodzącej przez S. Ponieważ $SO=2r$, więc O jest środkiem koła (C'). Prędkość punktu A jest zatem stale skierowana ku punktowi nieruchomemu O. Punkt A porusza się więc po prostej OA. Punkty położone na okręgu koła (C) poruszają się zatem po średnicach koła (C').

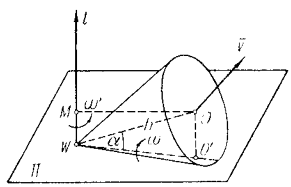
Niech teraz P będzie dowolnym punktem wewnątrz koła (C). Przeprowadźmy przez P dowolną cięciwę AB. Punkty A i B poruszają się po prostych l i l', przechodzących przez O. Ponieważ odcinek AB nie zmienia swej długości, więc na mocy znanego twierdzenia z geometrii analitycznej punkt P zakreśli elipsę.

Przykład 3. Stożek obrotowy toczy się po płaszczyźnie Π (rys. 2). Ruch chwilowy stożka jest więc obrotem chwilowym około tworzącej, wzdłuż której styka się on z płaszczyzną Π.

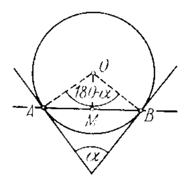
Wierzchołek W stożka leży zawsze na osi obrotu chwilowego, ma zatem stale prędkość zero, czyli pozostaje w spoczynku.



1.



2.



3.

Oznaczmy przez α kąt między tworzącymi a wysokością h stożka, przez O środek podstawy stożka, a przez O' rzut O na płaszczyznę Π. Ponieważ $O'O=h\sin\alpha=\text{const.}$, więc punkt O porusza się po płaszczyźnie równoległej do Π.

Odległość punktu O od prostej l, prostopadłej do Π w punkcie W, wynosi $MO=WO'=h\cos\alpha=\text{const}$. Wynika stąd, że punkt O krąży po kole o środku M, w płaszczyźnie prostopadłej do l, a więc obraca się około prostej l.

Niech ω będzie prędkością kątową toczenia się stożka, a ω' prędkością kątową środka O przy obrocie około osi l. Niech wreszcie $\bar{v}$ będzie prędkością punktu O. Mamy zatem $|\bar{v}|=O'O\cdot\omega$ i $|\bar{v}|=MO\cdot\omega'$, skąd $\omega'=\omega\cdot O'O/MO=\omega\cdot O'O/WO'$, a więc

(2) $$\omega'=\omega\operatorname{tg}\alpha.$$

Przykład 4. Kula toczy się w rynnie utworzonej przez dwie płaszczyzny (rys. 3).

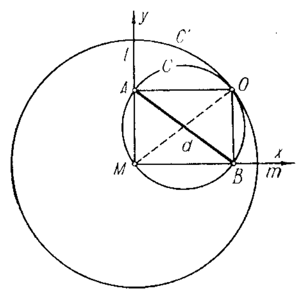
Ponieważ punkty styczności A i B mają prędkość zero, więc osią obrotu chwilowego jest prosta AB.

Oznaczmy przez r promień kuli, przez α kąt między płaszczyznami rynny, przez ω prędkość kątową toczenia, wreszcie przez $\bar{v}$ prędkość środka kuli O.

Odległość środka kuli od osi obrotu jest $OM = r \sin\frac{\alpha}{2}$. Kładąc $v = |\bar{v}|$, otrzymujemy zatem

$$v = r\omega \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

Przykład 5. Odcinek AB o długości d porusza się w ten sposób, że końce jego pozostają stale na prostych l i m, prostopadłych do siebie i przecinających się w punkcie M.



Środek obrotu chwilowego O otrzymamy, prowadząc prostopadłe do l i m w punktach A i B. Ponieważ $MO = AB = d$, więc środki obrotu chwilowego tworzą koło C' o środku M i promieniu d. Koło C' jest więc linią stałą środków chwilowych. Ponieważ w każdym położeniu odcinka AB kąt AOB równa się $\pi/2$, więc linia ruchoma środków chwilowych będzie kołem C o średnicy AB (por. przykład 2).

§ 9. Składanie ruchów ciała. Dwa obroty równoczesne. Niech ruch chwilowy ciała K względem ciała K_1 (t. j. względem układu współrzędnych, związanego sztywnie z ciałem K_1) będzie obrotem około osi l_1 z prędkością kątową $\bar{\omega}_1$, zaś ruch chwilowy ciała K_1 względem ciała K' obrotem około osi l_2 z prędkością kątową $\bar{\omega}_2$. Mówimy wówczas, że ciało K wykonywa względem ciała K' dwa obroty chwilowe równoczesne około osi l_1 i l_2 z prędkościami kątowymi $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$.

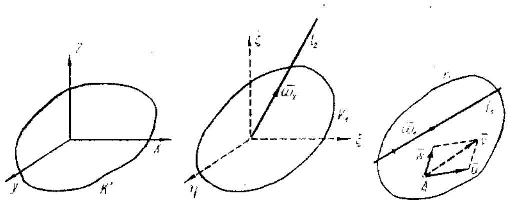
Ruch chwilowy ciała K względem ciała K' nazywamy *ruchem wypadkowym* tych dwóch obrotów chwilowych; mówimy także, że jest on *równoważny układowi obu obrotów.*

Przyjmijmy w ciele K_1 układ współrzędnych (ξ, η, ζ), zaś w ciele K' układ współrzędnych (x, y, z) (rys. str. 344). Niech A będzie dowolnym punktem ciała K. Prędkość $\bar{v}$ punktu A względem układu (x, y, z) jest sumą jego prędkości względnej $\bar{w}$ względem układu (ξ, η, ζ) oraz prędkości unoszenia $\bar{u}$:

(1) $$\bar{v} = \bar{w} + \bar{u}.$$

Ponieważ ruch chwilowy ciała K względem układu (ξ, η, ζ) jest obrotem około osi l_1 z prędkością kątową $\bar{\omega}_1$, więc (str. 325)

(2) $$\bar{w} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_1.$$



Prędkość unoszenia $\bar{u}$ punktu A otrzymamy, zakładając, że punkt A jest związany sztywnie z układem (ξ, η, ζ). Układ (ξ, η, ζ) obraca się około osi l_2 z prędkością kątową $\bar{\omega}_2$, więc

(3) $$\bar{u} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_2.$$

Z (1), (2) i (3) otrzymujemy

(4) $$\bar{v} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_1 + \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_2.$$

Jak widać z tego wzoru, ruch chwilowy ciała K względem K' wyznaczony jest przez prędkości kątowe $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$. Nie potrzeba przy tym podawać, która z nich jest prędkością obrotu ciała K względem K_1, a która prędkością obrotu ciała K_1 względem K'.

Przypuśćmy, że osie l_1 i l_2 przecinają się w punkcie O. Weźmy pod uwagę wektor $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ o początku O. Mamy (str. 17)

(5) $$\mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_1 + \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_2,$$

skąd na mocy (4)

(6) $$\bar{v} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}.$$

Ruch chwilowy ciała K względem K' jest zatem obrotem chwilowym około osi, przechodzącej przez punkt O, z prędkością kątową równą sumie prędkości kątowych $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$ obrotów składowych.

A więc: *układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych około osi, przecinających się w punkcie O, jest równoważny obrotowi około osi, przechodzącej przez O, z prędkością kątową równą sumie prędkości kątowych obrotów składowych.*

Przypuśćmy teraz, że osie l_1 i l_2 są równoległe, przyczem $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 \neq 0$. Wektory $\overline{\omega}_1$ i $\overline{\omega}_2$ mają wówczas wektor wypadkowy $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$, dla którego zachodzą równości (5) i (6).

A więc: *układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych około osi równoległych, o prędkościach kątowych mających sumę różną od zera, jest równoważny obrotowi około osi równoległej do poprzednich; położenie tej osi i prędkość kątowa obrotu naokoło niej wyznaczona jest przez wypadkową prędkości kątowych obrotów składowych.*

Przypuśćmy wreszcie, że osie l_1 i l_2 są równoległe, ale $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 = 0$, t. zn. że zwroty obrotów są przeciwne, a wartości bezwzględne prędkości kątowych są równe. W tym przypadku wektory $\overline{\omega}_1$ i $\overline{\omega}_2$ tworzą parę. Ponieważ moment pary jest wektorem stałym, więc na mocy (4) wszystkie punkty ciała K mają jedną i tę samą prędkość, równą momentowi pary $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$. Ruch chwilowy ciała K względem ciała K' jest zatem ruchem postępowym.

A więc: *układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych około osi równoległych o prędkościach kątowych równych co do wielkości, lecz mających zwroty przeciwne, jest równoważny ruchowi chwilowemu postępowemu.*

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego. Niech O będzie dowolnym punktem ciała K. Układ wektorów $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$ jest na mocy twierdzenia o redukcji (str. 24) równoważny układowi, złożonemu z wektora $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$ o początku O i pary $\overline{\omega}', -\overline{\omega}'$ o momencie równym momentowi układu $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$ względem O. Dla każdego punktu A ciała K mamy więc $\mathrm{Mom}_A \overline{\omega}_1 + \mathrm{Mom}_A \overline{\omega}_2 = \mathrm{Mom}_A \overline{\omega} + \overline{u}$, gdzie $\overline{u}$ jest momentem pary $\overline{\omega}', -\overline{\omega}'$. Na mocy (4) jest tedy

$$\overline{v} = \mathrm{Mom}_A \overline{\omega} + \overline{u}. \tag{7}$$

Zatem ruch chwilowy ciała K względem K' jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości $\overline{u}$ punktu O i obrotowego o prędkości kątowej $\overline{\omega}$ około osi przechodzącej przez O.

A więc: *układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych równoważny jest złożeniu ruchu obrotowego około osi przechodzącej przez dowolny punkt O ciała i ruchu postępowego o prędkości punktu O; wektor prędkości kątowej ruchu wypadkowego równy jest sumie wektorów prędkości kątowych obrotów składowych.*

Składanie kilku obrotów równoczesnych. Otrzymane wyniki można uogólnić na kilka obrotów równoczesnych. Ruch wypadkowy określamy podobnie jak dla dwóch obrotów.

Powiemy więc np., że ciało K wykonywa obroty równoczesne około osi l_1, l_2 i l_3 z prędkościami $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ i $\overline{\omega}_3$ względem pewnego ciała K', jeżeli ciało K obraca się około osi l_1 z prędkością kątową $\overline{\omega}_1$ względem pewnego ciała K_1, to zaś ciało obraca się około osi l_2 z prędkością kątową $\overline{\omega}_2$ względem pewnego ciała K_2, a to ostatnie obraca się około osi l_3 z prędkością kątową $\overline{\omega}_3$ względem ciała K'.

Podobnie ruch chwilowy ciała K względem K' nazywamy ruchem wypadkowym obrotów chwilowych około osi l_1, l_2, l_3 z prędkościami kątowymi $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$.

Niech ciało K wykonywa kilka obrotów równoczesnych z prędkościami kątowymi $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots$. Podobnie jak w przypadku dwóch obrotów, dowodzi się, że prędkość $\overline{v}$ dowolnego punktu A ciała K względem ciała stałego K' wynosi

$$\overline{v} = \mathrm{Mom}_A\,\overline{\omega}_1 + \mathrm{Mom}_A\,\overline{\omega}_2 + \ldots \tag{8}$$

Prędkość $\overline{v}$ punktu A jest momentem ogólnym układu wektorów prędkości kątowych $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots$:

$$\overline{v} = \mathrm{Mom}_A(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots). \tag{9}$$

Jeżeli więc dla dwu układów obrotów równoczesnych układy prędkości kątowych

$$\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots \quad \text{i} \quad \overline{\omega}'_1, \overline{\omega}'_2, \ldots$$

są równoważne (str. 22), to ruchy wypadkowe tych obrotów są te same.

Pozwala nam to interpretować twierdzenia rozdziału I o układach wektorów jako twierdzenia o układach obrotów równoczesnych.

Twierdzeniu o redukcji układów wektorów (str. 26) możemy więc nadać brzmienie następujące:

Układ kilku obrotów równoczesnych o prędkościach kątowych $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots$ jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości dowolnego punktu O ciała i ruchu obrotowego o prędkości kątowej $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots$ około osi przechodzącej przez O.

Twierdzenia 1-4, podane na str. 26, przybiorą w tej interpretacji postać:

1. *Układ obrotów równoczesnych z prędkościami kątowymi $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots$ około osi przechodzących przez jeden punkt O jest równoważny jednemu obrotowi z prędkością kątową $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots$ około osi przechodzącej przez O.*

2. *Układ obrotów równoczesnych z prędkościami $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots$ około osi równoległych (około osi leżących w jednej płaszczyźnie Π) jest równoważny ruchowi obrotowemu około osi równoległej (około osi leżącej w płaszczyźnie Π), gdy $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots \neq 0$, zaś ruchowi postępowemu, gdy $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots = 0$.*

W myśl określenia parametru układu wektorów (str. 21), parametr układu prędkości kątowych $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots$ wyraża się iloczynem skalarowym $K = (\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots) \cdot \mathrm{Mom}_A(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots)$, gdzie A jest dowolnym punktem ciała. Oznaczając przez $\overline{\omega}$ sumę prędkości kątowych, mamy na mocy (9)

$$K = \overline{\omega} \cdot \overline{v}, \tag{10}$$

gdzie $\overline{v}$ jest prędkością wypadkową punktu A.

Z twierdzenia 4, str. 20, wynika, że iloczyn skalarowy $\overline{\omega} \cdot \overline{v}$ ma wartość stałą. W szczególności dla $K = 0$ układ obrotów równoczesnych jest równoważny jednemu obrotowi lub ruchowi postępowemu (por. tabelkę na str. 28).

Jak wiemy, każdy ruch ciała jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości $\overline{u}$ dowolnego punktu O ciała i ruchu obrotowego o prędkości kątowej $\overline{\omega}$ (str. 334). Ruch chwilowy możemy więc przedstawić jako złożenie obrotu $\overline{\omega}$ z parą $\overline{\omega}', -\overline{\omega}'$ o momencie równym $\overline{u}$.

Przypuśćmy, że ruch ciała przedstawiliśmy w inny sposób jako złożenie ruchu obrotowego $\overline{\omega}_1$ i pary obrotów $\overline{\omega}_1', -\overline{\omega}_1'$. Ponieważ układy $\overline{\omega}, \overline{\omega}', -\overline{\omega}'$ i $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_1', -\overline{\omega}_1'$ są równoważne, gdyż przedstawiają ten sam rozkład prędkości w ciele, więc sumy ich są równe, czyli $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1$. Otrzymujemy więc i na tej drodze twierdzenie (udowodnione na str. 334), według którego przy wszelkich przedstawieniach ruchu chwilowego osie obrotu chwilowego są równoległe i prędkości chwilowe kątowe są równe.

Zauważmy przytem, że parametr układu $\overline{\omega}, \overline{\omega}', -\overline{\omega}'$ wynosi $K = \overline{\omega} \cdot \mathrm{Mom}_O(\overline{\omega}', -\overline{\omega}') = \overline{\omega} \cdot \overline{u}$. Jeżeli więc $\overline{\omega} \cdot \overline{u} = 0$, to ruch chwilowy jest obrotem chwilowym.

W szczególności, jeżeli $\overline{\omega} \perp \overline{u}$, a więc *jeżeli oś chwilowego obrotu jest prostopadła do prędkości ruchu postępowego, to ruch chwilowy jest równoważny obrotowi chwilowemu.*

Na str. 27 udowodniliśmy, że każdy układ wektorów jest równoważny skrętnikowi. Z określenia skrętnika wynika, że ruch chwilowy ciała sztywnego jest skrętem. Otrzymaliśmy zatem nowy dowód twierdzenia podanego na str. 336.

Ruch względny ciała. Niech dane będą ruchy chwilowe dwu ciał K_1 i K_2 względem stałego układu współrzędnych (x, y, z). Wyznaczymy ruch chwilowy ciała K_2 względem K_1, t. j. względem układu ruchomego współrzędnych (ξ, η, ζ), związanego sztywnie z ciałem K_1.

Oznaczmy przez $\overline{\omega}_1$ wektor prędkości chwilowej kątowej ciała K_1. Ruch zaś postępowy przedstawmy jako złożenie pary obrotów o prędkościach kątowych $\overline{\omega}_1', -\overline{\omega}_1'$. Podobnie przedstawimy ruch chwilowy ciała K_2, jako złożenie obrotu $\overline{\omega}_2$ z parą obrotów $\overline{\omega}_2', -\overline{\omega}_2'$.

Prędkości bezwzględna $\overline{v}_b$ i unoszenia $\overline{v}_u$ dowolnego punktu A ciała K_2 wynoszą:

$$\overline{v}_b = \mathrm{Mom}_A(\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_2', -\overline{\omega}_2'), \qquad \overline{v}_u = \mathrm{Mom}_A(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_1', -\overline{\omega}_1').$$

Ponieważ $\overline{v}_w = \overline{v}_b - \overline{v}_u$ ((I), str. 58), więc

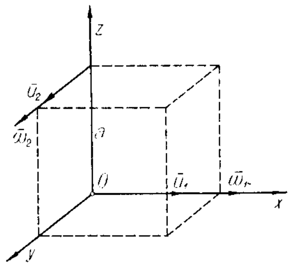
$$\overline{v}_w = \mathrm{Mom}_A(\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_2', -\overline{\omega}_2', -\overline{\omega}_1, -\overline{\omega}_1', \overline{\omega}_1'). \tag{11}$$

Ruch chwilowy ciała K_2 względem ciała K_1 jest złożeniem sześciu obrotów równoczesnych. Na mocy twierdzenia o redukcji (str. 24) odnośny układ wektorów jest równoważny jednemu wektorowi $\overline{\omega}$ i parze $\overline{\omega}', -\overline{\omega}'$. Wektor $\overline{\omega}$ jest prędkością chwilową kątową ruchu względnego, zaś moment pary $\overline{\omega}', -\overline{\omega}'$ równy jest prędkości ruchu chwilowego postępowego.

A więc: *ruch chwilowy względny ciała K_2 względem ciała K_1 otrzymamy, dodając do układu prędkości kątowych, określających ruch chwilowy ciała K_2, układ prędkości kątowych ze zwrotami przeciwnymi, określających ruch chwilowy ciała K_1.*

Twierdzenie to wysławiamy zwykle krócej, mówiąc, że ruch ciała K_2 względem ciała K_1 otrzymujemy, składając ruch chwilowy ciała K_2 z ruchem chwilowym ciała K_1 o zwrocie przeciwnym.

Przykład 1. Sześcian wykonywa dwa równoczesne skręty około dwóch krawędzi wichrowatych. Niechaj $\overline{u}_1, \overline{\omega}_1$ i $\overline{u}_2, \overline{\omega}_2$ oznaczają prędkości chwilowe kątowe ruchu postępowego i obrotowego tych skrętów. Zajmiemy się wyznaczeniem skrętu wypadkowego.



Obierzmy układ współrzędnych w ten sposób, by jedna z krawędzi (około których odbywają się skręty) leżała na osi x, druga zaś na płaszczyźnie yz i była do osi y równoległa.

Ruchy postępowe zastąpić możemy parami obrotów $\bar{\omega}_1', -\bar{\omega}_1'$ i $\bar{\omega}_2', -\bar{\omega}_2'$ o momentach $\bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$. Ruch chwilowy wypadkowy jest zatem równoważny złożeniu sześciu obrotów równoczesnych:

(12) $$\bar{\omega}_1', \; -\bar{\omega}_1', \; \bar{\omega}_1, \qquad \bar{\omega}_2', \; -\bar{\omega}_2', \; \bar{\omega}_2.$$

Suma układu (12) równa jest $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$, zatem:

(13) $$\omega_x = \omega_1, \qquad \omega_y = \omega_2, \qquad \omega_z = 0,$$

gdzie ω_1 i ω_2 oznaczają odpowiednio rzuty wektorów $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$ na oś x i y.

Aby obliczyć moment obrotów (12) względem początku O układu, zauważmy, że momenty par $\bar{\omega}_1', -\bar{\omega}_1'$ i $\bar{\omega}_2', -\bar{\omega}_2'$ wynoszą odpowiednio $\bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$. Moment $\bar{\omega}_1$ jest zerem, gdyż $\bar{\omega}_1$ leży na osi x. Moment $\bar{\omega}_2$ jest prostopadły do płaszczyzny yz i rzut jego na oś x wynosi $a\omega_2$, gdzie a jest długością krawędzi sześcianu. Oznaczając więc przez $\bar{u}$ moment obrotów (12) względem O, otrzymamy:

(14) $$u_x = u_1 + a\omega_2, \qquad u_y = u_2, \qquad u_z = 0,$$

gdzie u_1 oznacza rzut $\bar{u}_1$ na oś x, zaś u_2 rzut $\bar{u}_2$ na oś y. Równania (14) przedstawiają oczywiście rzuty prędkości początku układu.

Ruch chwilowy jest więc złożeniem ruchu postępowego z prędkością $\bar{u}$ i ruchu obrotowego z prędkością $\bar{\omega}$ około osi przechodzącej przez O.

Prędkość dowolnego punktu $A(x, y, z)$ wynosi według wzoru (I), str. 335, $\bar{v} = \bar{u} + \overline{OA} \times \bar{\omega}$, skąd na mocy (13) i (14)

(15) $$v_x = u_1 + a\omega_2 - z\omega_2, \qquad v_y = u_2 + z\omega_1, \qquad v_z = x\omega_2 - y\omega_1.$$

Aby wyznaczyć oś środkową skrętu, musimy znaleźć punkt A taki, by jego prędkość miała kierunek wektora $\bar{\omega}$, t. zn. by $\bar{v} = \lambda\bar{\omega}$ przy odpowiedniej wartości liczbowej spółczynnika λ. Muszą więc być spełnione równania $v_x = \lambda\omega_1$, $v_y = \lambda\omega_2$ i $v_z = 0$ czyli $v_x/\omega_1 = v_y/\omega_2$ i $v_z = 0$. Wobec (15) dostajemy stąd następujące równania osi środkowej:

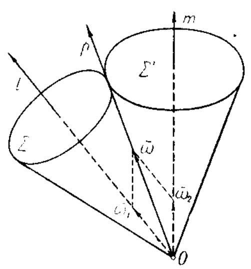
(16) $$(u_1 + a\omega_2 - z\omega_2)/\omega_1 = (u_2 + z\omega_1)/\omega_2, \qquad x\omega_2 - y\omega_1 = 0.$$

Prędkość ruchu postępowego skrętu równa się prędkości dowolnego punktu osi środkowej, np. punktu $A(0,0,z)$; wartość z obliczamy z pierwszego z równań (16), a następnie prędkość punktu A ze wzorów (15). Dostaniemy:

$$v_x = k\omega_1, \qquad v_y = k\omega_2, \qquad v_z = 0,$$

gdzie $k = [(u_1 + a\omega_2)\omega_1 + u_2\omega_2] / (\omega_1^2 + \omega_2^2) = \overline{u}\cdot\overline{\omega} / |\overline{\omega}|^2$.

Przykład 2. Precesja regularna. Jeżeli ciało porusza się w ten sposób, że ruch chwilowy jest w każdej chwili złożeniem dwóch obrotów równoczesnych około dwóch przecinających się osi, z których pierwsza l jest nieruchoma w przestrzeni, druga zaś m ma stałe położenie w ciele, przyczem prędkości kątowe $\overline{\omega}_1$ i $\overline{\omega}_2$ tych obrotów są stałe co do wielkości, to ruch ciała nazywamy *precesją regularną*.



Ponieważ z założenia osie l i m się przecinają, więc ruch chwilowy ciała jest obrotem z prędkością kątową $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$ około osi p przechodzącej przez punkt przecięcia osi l i m. Zauważmy, że ruch chwilowy osi m jest obrotem chwilowym około osi l z prędkością kątową $\overline{\omega}_1$ (obrót bowiem osi m około siebie samej nie wchodzi w rachubę). Zatem oś m obraca się około osi l ze stałą prędkością kątową ω_1. Punkt przecięcia O obu osi jest więc nieruchomy i kąt między osiami l i m jest stały. Wynika stąd, że wektor $\overline{\omega}$, a więc i oś p obrotu chwilowego, tworzy stałe kąty z osiami l i m.

Oś p zakreśla w przestrzeni stożek obrotowy Σ. Ślad osi p w ciele jest również stożkiem obrotowym Σ'.

A więc: *stożki osi obrotów chwilowych, stały i ruchomy, są stożkami obrotowymi o osiach l i m.*

Oś ziemi nie zachowuje stałego kierunku w przestrzeni, lecz opisuje stożek obrotowy około prostej prostopadłej do ekliptyki i przechodzącej przez środek ziemi. Czas obrotu osi ziemskiej trwa około 26.000 lat, zaś kąt między osią ziemską a osią prostopadłą do ekliptyki wynosi $23^1/_2{}^0$.

Przyjmijmy środek ziemi za początek układu współrzędnych, poruszającego się ruchem postępowym, i nadajmy osi z kierunek prostopadły do ekliptyki. Osie x i y będą wówczas leżały w ekliptyce. Względem tego układu współrzędnych ziemia wykonywa ruch precesyjny regularny. Osią stałą w przestrzeni jest oś z, osią stałą w ciele jest oś ziemska.

Przykład 3. Dwa koła K_1 i K_2, leżące w płaszczyźnie Π, obracają się około swoich środków z prędkościami kątowymi ω_1 i ω_2. Wyznaczyć ruch chwilowy względny koła K_2 względem koła K_1 (rys. 1).

Niech $\overline{\omega}_1$ i $\overline{\omega}_2$ oznaczają wektory prędkości kątowych, prostopadłych oczywiście do Π (rys. 2). Ruch chwilowy koła K_2 względem K_1 jest złożeniem dwóch obrotów równoczesnych $\overline{\omega}_2$ i $-\overline{\omega}_1$.

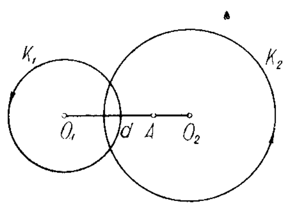
Jeżeli $\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1=0$, to ruch chwilowy względny koła K_2 jest ruchem postępowym z prędkością $\overline{u}$, równą momentowi pary $(\overline{\omega}_2, -\overline{\omega}_1)$. Oznaczając przed d odległość środków, mamy $|\overline{u}|=d\omega_1=d\omega_2$. Prędkość $\overline{u}$ jest prostopadła do prostej O_1O_2, łączącej środki kół K_1 i K_2.

Jeżeli zaś $\omega_2-\overline{\omega}_1\neq 0$, to wektory $\overline{\omega}_2$ i $-\overline{\omega}_1$ mają wypadkową $\overline{\omega}=\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1$ o początku A, który leży na prostej O_1O_2 w punkcie, względem którego moment układu $\overline{\omega}_2$, $-\overline{\omega}_1$ jest zerem. Ruch chwilowy względny koła K_2 jest więc obrotem chwilowym około punktu A z prędkością kątową $\overline{\omega}$.

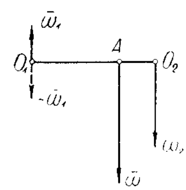
Jeśli $\overline{\omega}_1$ i $\overline{\omega}_2$ mają zwroty przeciwne (jak na rys. 2), to oznaczając przez ω_1, ω_2 i ω wartości bezwzględne prędkości kątowych, otrzymamy:

$$\omega=\omega_1+\omega_2,$$

$$O_1A=O_1O_2\cdot\omega_2/(\omega_1+\omega_2).$$



1.



2.

§10. Przedstawienie analityczne ruchu ciała sztywnego.

Prędkość chwilowa kątowa. Przypuśćmy, że badamy ruch ciała sztywnego względem układu współrzędnych (x,y,z). Obierzmy układ współrzędnych (ξ,η,ζ) o początku M, związany sztywnie z ciałem. Położenie ciała względem układu (x,y,z) będzie wyznaczone, jeżeli podamy położenie układu (ξ,η,ζ), t. zn. współrzędne x_0, y_0, z_0 punktu M i kąty $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, β_1,β_2,β_3 i $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$, jakie osie ξ,η,ζ tworzą z osiami x,y,z.

Niech A będzie dowolnym punktem ciała. Oznaczmy jego współrzędne względem układu ruchomego przez ξ,η,ζ, zaś względem stałego przez x,y,z.

Znając współrzędne ξ,η,ζ i położenie układu ruchomego, możemy wyznaczyć współrzędne x,y,z przy pomocy wzorów (II), str. 54. Jeżeli $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$ i $\cos\gamma_i$ oznaczyć przez a_i, b_i i c_i, (gdzie $i=1,2,3$), to wzory te przyjmą postać:

$$x=x_0+a_1\xi+a_2\eta+a_3\zeta,\qquad y=y_0+b_1\xi+b_2\eta+b_3\zeta,\qquad z=z_0+c_1\xi+c_2\eta+c_3\zeta. \tag{1}$$

Niech $\bar{v}$ będzie prędkością punktu A względem układu (x,y,z). Ponieważ z założenia układ (ξ,η,ζ) jest z ciałem związany sztywnie, więc współrzędne ξ,η,ζ punktu A są stałe (niezależne od czasu). Różniczkując (1) (i pamiętając o tym, że $a_1,a_2,\ldots,c_3$ są funkcjami czasu t), otrzymamy:

$$(2)\qquad \begin{gathered} v_x=\dot{x}=\dot{x}_0+\dot{a}_1\xi+\dot{a}_2\eta+\dot{a}_3\zeta, \qquad v_y=\dot{y}=\dot{y}_0+\dot{b}_1\xi+\dot{b}_2\eta+\dot{b}_3\zeta, \\ v_z=\dot{z}=\dot{z}_0+\dot{c}_1\xi+\dot{c}_2\eta+\dot{c}_3\zeta. \end{gathered}$$

Z geometrii analitycznej wiadomo, że:

$$(3)\qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2=1, \qquad b_1^2+b_2^2+b_3^2=1, \qquad c_1^2+c_2^2+c_3^2=1,$$

$$(4)\qquad a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0, \qquad a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=0, \qquad a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0.$$

Różniczkując równania (3) i (4), otrzymamy:

$$(5)\qquad a_1\dot{a}_1+a_2\dot{a}_2+a_3\dot{a}_3=0, \qquad b_1\dot{b}_1+b_2\dot{b}_2+b_3\dot{b}_3=0, \qquad c_1\dot{c}_1+c_2\dot{c}_2+c_3\dot{c}_3=0,$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_1\dot{a}_2+b_1\dot{b}_2+c_1\dot{c}_2&=-\dot{a}_1a_2-\dot{b}_1b_2-\dot{c}_1c_2, \\ a_1\dot{a}_3+b_1\dot{b}_3+c_1\dot{c}_3&=-\dot{a}_1a_3-\dot{b}_1b_3-\dot{c}_1c_3, \\ a_2\dot{a}_3+b_2\dot{b}_3+c_2\dot{c}_3&=-\dot{a}_2a_3-\dot{b}_2b_3-\dot{c}_2c_3. \end{aligned}$$

Niech $\bar{\omega}$ oznacza wektor, którego rzuty na osie układu (ξ,η,ζ) wyrażają się wzorami:

$$(7)\qquad \omega_\xi=a_2\dot{a}_3+b_2\dot{b}_3+c_2\dot{c}_3, \qquad \omega_\eta=a_3\dot{a}_1+b_3\dot{b}_1+c_3\dot{c}_1, \qquad \omega_\zeta=a_1\dot{a}_2+b_1\dot{b}_2+c_1\dot{c}_2.$$

Utwórzmy rzuty v_ξ,v_η,v_ζ prędkości $\bar{v}$ na osie ξ,η,ζ; dostaniemy $v_\xi=a_1v_x+b_1v_y+c_1v_z$, skąd przez podstawienie wartości v_x, v_y, v_z ze wzorów (2):

$$\begin{aligned} v_\xi=(a_1\dot{x}_0+b_1\dot{y}_0+c_1\dot{z}_0)+(a_1\dot{a}_1+b_1\dot{b}_1+c_1\dot{c}_1)\xi+ \\ +(a_1\dot{a}_2+b_1\dot{b}_2+c_1\dot{c}_2)\eta+(a_1\dot{a}_3+b_1\dot{b}_3+c_1\dot{c}_3)\zeta. \end{aligned}$$

Współczynnik przy ξ jest równy zeru na mocy (5). Współczynniki przy η i ζ są na mocy (6) i (7) równe odpowiednio ω_ζ i $-\omega_\eta$. Zatem

$$(8)\qquad v_\xi=(a_1\dot{x}_0+b_1\dot{y}_0+c_1\dot{z}_0)+\omega_\zeta\eta-\omega_\eta\zeta.$$

Dla rzutów prędkości $\bar{u}$ punktu M na osie x,y,z dostaniemy $u_x=\dot{x}_0$, $u_y=\dot{y}_0$, $u_z=\dot{z}_0$, a dla rzutów tej prędkości na osie ξ,η,ζ

$$u_\xi=a_1u_x+b_1u_y+c_1u_z=a_1\dot{x}_0+b_1\dot{y}_0+c_1\dot{z}_0 \qquad \text{i t. d.}$$

Na mocy więc (8) otrzymamy na v_ξ (i podobnie na v_η,v_ζ) wzory:

$$(9)\qquad v_\xi=u_\xi+\omega_\zeta\eta-\omega_\eta\zeta, \qquad v_\eta=u_\eta+\omega_\xi\zeta-\omega_\zeta\xi, \qquad v_\zeta=u_\zeta+\omega_\eta\xi-\omega_\xi\eta.$$

Ze wzorów (9) wynika, że prędkość $\bar{v}$ jest sumą dwóch prędkości: $\bar{v}=\bar{u}+\bar{w}$, z których pierwsza jest prędkością punktu M, a druga ma rzuty na osie ξ,η,ζ:

$$(10) \qquad w_\xi=\omega_\zeta\eta-\omega_\eta\zeta, \qquad w_\eta=\omega_\xi\zeta-\omega_\zeta\xi, \qquad w_\zeta=\omega_\eta\xi-\omega_\xi\eta.$$

Porównując te wzory ze wzorami (V), str. 46, widzimy, że $\bar{w}$ jest to prędkość, jaką miałby punkt A, gdyby ciało obracało się z prędkością kątową $\bar{\omega}$ około osi przechodzącej przez M. Wynika stąd, że wektor $\bar{\omega}$, określony wzorami (7), jest wektorem prędkości chwilowej kątowej.

Uwaga. Wzory (7) ulegają uproszczeniu, jeżeli założyć, że w danej chwili t układy współrzędnych (x,y,z) i (ξ,η,ζ) schodzą się. Przy tym założeniu mamy $\alpha_1=\beta_2=\gamma_3=0$, pozostałe zaś kąty są równe $\pi/2$. Zatem $a_1=b_2=c_3=1$, a pozostałe cosinusy są zerami. Na mocy (7) i (6) jest wówczas:

$$\omega_\xi=-\dot{c}_2, \qquad \omega_\eta=-\dot{a}_3, \qquad \omega_\zeta=-\dot{b}_1.$$

Ponieważ $c_2=\cos\gamma_2$, więc $\dot{c}_2=-(\sin\gamma_2)\dot{\gamma}_2=-\dot{\gamma}_2$, zatem $\omega_\xi=\dot{\gamma}_2$. Postępując podobnie, otrzymamy:

$$\omega_\xi=\omega_x=\dot{\gamma}_2, \qquad \omega_\eta=\omega_y=\dot{\alpha}_3, \qquad \omega_y=\omega_z=\dot{\beta}_1.$$

A więc: *jeżeli osie układu ruchomego współrzędnych schodzą się w chwili t z osiami układu stałego, to rzuty wektora prędkości chwilowej kątowej na osie układu ruchomego są pochodnymi kątów* $\sphericalangle\eta z$, $\sphericalangle\zeta x$ *i* $\sphericalangle\xi y$.

Oś środkowa. Aby otrzymać oś środkową, należy wyznaczyć punkty, których prędkości mają kierunek wektora $\bar{\omega}$. Jeżeli więc punkt $A(\xi,\eta,\zeta)$ leży na osi środkowej, to jego prędkość równa się $\bar{v}=\lambda\bar{\omega}$, gdzie λ jest pewną liczbą stałą. Przez podstawienie w równania (9), otrzymamy stąd równania osi środkowej:

$$(12) \qquad \begin{gathered} \lambda\omega_\xi=u_\xi+\omega_\zeta\eta-\omega_\eta\zeta, \qquad \lambda\omega_\eta=u_\eta+\omega_\xi\zeta-\omega_\zeta\xi, \\ \lambda\omega_\zeta=u_\zeta+\omega_\eta\xi-\omega_\xi\eta, \end{gathered}$$

skąd

$$(13) \qquad \frac{u_\xi+\omega_\zeta\eta-\omega_\eta\zeta}{\omega_\xi}=\frac{u_\eta+\omega_\xi\zeta-\omega_\zeta\xi}{\omega_\eta}=\frac{u_\zeta+\omega_\eta\xi-\omega_\xi\eta}{\omega_\zeta}.$$

Aby otrzymać prędkość $\bar{v}$ ruchu chwilowego postępowego przy skręcie, pomnóżmy obie strony równań (12) odpowiednio przez $\omega_\xi,\omega_\eta,\omega_\zeta$. Dodając je, otrzymamy

$$(14) \qquad \lambda(\omega_\xi^2+\omega_\eta^2+\omega_\zeta^2)=u_\xi\omega_\xi+u_\eta\omega_\eta+u_\zeta\omega_\zeta=\bar{u}\cdot\bar{\omega}.$$

Ponieważ $\bar{v}=\lambda\bar{\omega}$, więc kładąc $\omega=|\bar{\omega}|=\sqrt{\omega_\xi^2+\omega_\eta^2+\omega_\zeta^2}$, dostaniemy na mocy (14) $\bar{v}=\frac{\bar{u}\cdot\bar{\omega}}{\omega^2}\bar{\omega}$, skąd

$$(15) \qquad |\bar{v}|=|\bar{u}\cdot\bar{\omega}|/\omega.$$

Jeżeli $\bar{u}\perp\bar{\omega}$, to $\bar{u}\cdot\bar{\omega}=0$, skąd na mocy (15) $\bar{v}=0$.

A więc: *jeżeli prędkość ruchu chwilowego postępowego jest prostopadła do osi chwilowej obrotu, to ruch chwilowy jest obrotem chwilowym około osi środkowej.*

Ruch płaski. Przypuśćmy, że badamy ruch figury w płaszczyźnie Π. Obierzmy układ współrzędnych stały (x,y) oraz ruchomy (ξ,η) o początku M, związany sztywnie z figurą. Oznaczmy przez x_0, y_0 współrzędne punktu M, zaś przez φ kąt między osiami ξ a x. Niechaj wreszcie A będzie dowolnym punktem figury o współrzędnych x,y względem układu stałego, zaś ξ,η względem układu ruchomego. Związki między tymi współrzędnymi podają wzory (II), str. 54:

$$(16) \qquad x=x_0+\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi, \qquad y=y_0+\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi.$$

Niech $\bar{v}$ będzie prędkością punktu A. Ponieważ punkt A jest związany sztywnie z układem ruchomym, więc ξ i η są stałe. Różniczkując (16), otrzymamy

$$(17) \qquad v_x=\dot{x}=\dot{x}_0-(\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi)\dot{\varphi}, \qquad v_y=\dot{y}=\dot{y}_0+(\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi)\dot{\varphi}.$$

Porównując (17) ze wzorami (16) i kładąc

$$(18) \qquad \omega=\dot{\varphi},$$

dostaniemy:

$$(19) \qquad v_x=\dot{x}_0-(y-y_0)\omega, \qquad v_y=\dot{y}_0+(x-x_0)\omega.$$

A więc: *prędkość $\bar{v}$ jest sumą dwóch prędkości: $\bar{v}=\bar{u}+\bar{w}$, z których pierwsza jest prędkością punktu M, druga zaś ma rzuty na osie układu stałego*:

$$(20) \qquad w_x=-(y-y_0)\omega, \qquad w_y=(x-x_0)\omega.$$

Widzimy stąd, że $\bar{w}$ jest to prędkość jaką miałby punkt A, gdyby figura obracała się około punktu $M(x_0,y_0)$ z prędkością kątową ω (przyczem zwrot dodatni obrotu jest zgodny ze zwrotem dodatnim kąta). Zatem $\omega=\dot{\varphi}$ jest prędkością chwilową kątową.

Aby otrzymać środek obrotu chwilowego, należy wyznaczyć punkt o prędkości $\bar{v}=0$. Oznaczając współrzędne środka obrotu chwilowego przez $\bar{x}$ i $\bar{y}$, otrzymamy z (4):

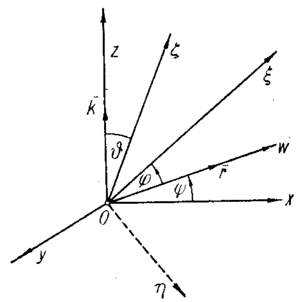
$$0=\dot{x}_0-(\bar{y}-y_0)\omega, \qquad 0=\dot{y}_0+(\bar{x}-x_0)\omega,$$

skąd

$$\bar{x}=x_0-\dot{y}_0/\omega, \qquad \bar{y}=y_0+\dot{x}_0/\omega. \tag{21}$$

Kąty Eulera. Wygodnym jest w niektórych rozważaniach określić położenie ciała przy pomocy t. zw. kątów Eulera.

Niech ciało obraca się około punktu O. Obierzmy dwa układy współrzędnych o wspólnym początku O: stały (x,y,z) i ruchomy (ξ,η,ζ), związany sztywnie z ciałem. Położenie układu ruchomego wyznaczymy, jak następuje.



Niech w oznacza linię przecięcia płaszczyzn xy i $\xi\eta$. Linię tę nazywamy *linią węzłów*.

Linia w jest prostopadła do osi z i ζ. Nadajmy linii w taki zwrot, by układ osi (ζ,z,w) był lewostronny, t. j. zgodny z przyjętymi zwrotami układów (x,y,z) i (ξ,η,ζ).

Oznaczmy przez ϑ kąt, o jaki należy obrócić oś z około osi w w kierunku dodatnim (t. j. od ręki prawej ku lewej), aby kierunek dodatni osi z pokrył kierunek dodatni osi ζ. Podobnie, przez φ oznaczymy kąt, o jaki należy obrócić oś w około osi ζ w kierunku dodatnim, aby kierunek dodatni osi w pokrył kierunek dodatni osi ξ. Wreszcie przez ψ oznaczymy kąt, o jaki należy obrócić oś x około osi z w kierunku dodatnim, aby kierunki dodatnie osi x i w pokryły się z sobą.

Kąty ϑ,φ,ψ nazywamy *kątami Eulera*.

Kąty te wyznaczają położenie osi ξ,η,ζ, z wyjątkiem przypadku, gdy $\vartheta=0$ lub $\vartheta=\pi$, wówczas bowiem położenie osi w, a więc i kąty φ,ψ, są nieokreślone.

Jeżeli zaś $\vartheta\neq 0$ i $\vartheta\neq\pi$, to kąt ψ określa położenie osi w w płaszczyźnie xy. Znając już położenie osi w, otrzymujemy położenie osi ζ, obracając oś z o kąt ϑ (w kierunku dodatnim) około osi w. Wreszcie, oś ξ otrzymamy, obracając oś w około osi ζ w kierunku dodatnim o kąt φ.

Kąty Eulera zmieniają się w następujących granicach:

$$0 < \vartheta < \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi.$$

Ruch chwilowy układu (ξ, η, ζ) jest obrotem około pewnej osi. Niech $\overline{\omega}$ będzie wektorem jego prędkości chwilowej kątowej. Rozłóżmy $\overline{\omega}$ na trzy składowe $\overline{o}_z$, $\overline{o}_w$, i $\overline{o}_\zeta$ w kierunku osi z, w i ζ. Zatem

$$(21) \qquad \overline{\omega} = \overline{o}_z + \overline{o}_w + \overline{o}_\zeta.$$

Oznaczmy przez o_z, o_w i o_ζ współrzędne odpowiednich wektorów względem osi z, w i ζ. Zauważmy, że jeżeli układ (ξ, η, ζ) obraca się około osi z, to kąty ϑ i φ nie zmieniają się, zaś kąt ψ jest kątem obrotu. Zatem przy obrocie około osi z prędkość chwilowa kątowa układu (ξ, η, ζ) ma wielkość $\dot{\psi}$. Ponieważ o_z jest wektorem prędkości kątowej przy obrocie około osi z, więc

$$(22) \qquad o_z = \dot{\psi} \quad \text{i podobnie} \quad o_w = \dot{\vartheta}, \quad o_\zeta = \dot{\varphi}.$$

Pochodne zatem $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ określają wektor chwilowej prędkości kątowej $\overline{\omega}$, jeżeli znamy położenie układu (ξ, η, ζ), t. j. kąty ψ, ϑ i φ.

Wyprowadzimy teraz wzory na rzuty wektora $\overline{\omega}$ na osie układu (ξ, η, ζ).

Obierzmy na osiach z i w wektory jednostkowe $\overline{k}$ i $\overline{r}$. Zatem $\overline{o}_z = o_z \overline{k}$ i $\overline{o}_w = o_w \overline{r}$, więc według (22):

$$(23) \qquad \overline{o}_z = \dot{\psi} \overline{k}, \qquad \overline{o}_w = \dot{\vartheta} \overline{r}.$$

Rzut wektora $\overline{k}$ na oś ζ wynosi $\cos\vartheta$. Wektor $\overline{k}$ tworzy z płaszczyzną $\xi\eta$ kąt $\pi/2 - \vartheta$, więc rzut $\overline{k}$ na płaszczyznę $\xi\eta$ ma długość $\sin\vartheta$ i jest prostopadły do w (ponieważ oś z jest prostopadła do w). Rzut $\overline{k}$ tworzy z osiami ξ i η kąty $\pi/2 - \varphi$ i $\pi - \varphi$, więc:

$$(24) \qquad k_\xi = \sin\vartheta \sin\varphi, \qquad k_\eta = -\sin\vartheta \cos\varphi, \qquad k_\zeta = \cos\vartheta.$$

Rzuty wektora $\overline{r}$ na osie ξ i η wynoszą $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$, zaś rzut na oś ζ jest zerem. Zatem:

$$(25) \qquad r_\xi = \cos\varphi, \qquad r_\eta = \sin\varphi, \qquad r_\zeta = 0.$$

Rzuty wektora $\overline{o}_z$ na osie ξ, η i ζ wynoszą na mocy (23) i (24): $\dot{\psi} \sin\vartheta \sin\varphi$, $-\dot{\psi} \sin\vartheta \cos\varphi$ i $\dot{\psi} \cos\vartheta$, zaś rzuty wektora $\overline{o}_w$ na osie ξ, η i ζ są na mocy (23) i (25) równe odpowiednio $\dot{\vartheta} \cos\varphi$, $\dot{\vartheta} \sin\varphi$ i 0; wreszcie rzuty wektora $\overline{o}_\zeta$ na osie ξ, η i ζ wynoszą oczywiście 0, 0 i $\dot{\varphi}$. Stąd dostajemy na mocy (21):

$$(\mathrm{I}) \quad \omega_\xi = \dot{\vartheta} \cos\varphi + \dot{\psi} \sin\vartheta \sin\varphi, \quad \omega_\eta = \dot{\vartheta} \sin\varphi - \dot{\psi} \sin\vartheta \cos\varphi, \quad \omega_\zeta = \dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\varphi}.$$

Wyznaczając z (I) $\dot\vartheta$, $\dot\psi$ i $\dot\varphi$, otrzymujemy:

$$\text{(II)}\qquad \dot\vartheta=\omega_\xi\cos\varphi+\omega_\eta\sin\varphi,\qquad \dot\psi=(\omega_\xi\sin\varphi-\omega_\eta\cos\varphi)/\sin\vartheta,$$
$$\dot\varphi=\omega_\zeta-(\omega_\xi\sin\varphi-\omega_\eta\cos\varphi)\cot\vartheta.$$

Znając w każdej chwili rzuty ω_ξ, ω_η i ω_ζ prędkości kątowej $\overline{\omega}$ na osie ξ, η i ζ układu ruchomego, możemy więc wyznaczyć ϑ, φ i ψ jako funkcje czasu, rozwiązując układ równań różniczkowych (II).

Postępując podobnie, otrzymujemy wzory następujące na rzuty prędkości kątowej $\overline{\omega}$ na osie x,y,z układu stałego:

$$\text{(I')}\qquad \omega_x=\dot\varphi\sin\vartheta\sin\psi+\dot\vartheta\cos\psi,\qquad \omega_y=\dot\varphi\sin\vartheta\cos\psi-\dot\vartheta\sin\psi,$$
$$\omega_z=\dot\psi+\dot\varphi\cos\vartheta,$$

$$\text{(II')}\qquad \dot\vartheta=\omega_x\cos\psi-\omega_y\sin\psi,\qquad \dot\varphi=\frac{\omega_x\sin\psi+\omega_y\cos\psi}{\sin\vartheta},$$
$$\dot\psi=\omega_z-(\omega_x\sin\psi+\omega_y\cos\psi)\cot\vartheta.$$

Kąty Eulera w precesji regularnej. Załóżmy, że podczas ruchu ciała jest stale:

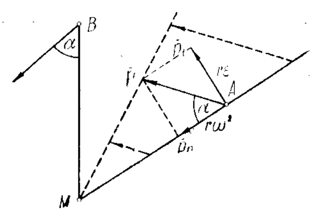
$$\text{(26)}\qquad \dot\vartheta=0,\qquad \dot\psi=\text{const},\qquad \dot\varphi=\text{const}.$$

Ruch chwilowy ciała jest więc w każdej chwili złożeniem dwóch obrotów równoczesnych około osi z i ζ z prędkościami kątowymi $\dot\psi$ i $\dot\varphi$ o stałej wielkości. Oś z ma stałe położenie w przestrzeni, oś ζ zaś jest związana sztywnie z ciałem. W tych warunkach ruch ciała jest precesją regularną (por. str. 350).

§ 11. Rozkład przyśpieszeń. Ruch płaski. Jeżeli figura płaska obraca się około punktu stałego M z prędkością kątową zmienną ω, wówczas każdy punkt figury krąży po okręgu koła. Przyśpieszenie $\overline{p}$ dowolnego punktu A figury jest więc sumą przyśpieszenia normalnego $\overline{p}_n$, skierowanego ku M, oraz przyśpieszenia stycznego $\overline{p}_t$, prostopadłego do MA. Przyśpieszenia normalne i styczne określone są wzorami (I) i (II), str. 45:

$$\text{(1)}\qquad p_n=r\omega^2,\qquad p_t=r\varepsilon,$$

gdzie $r=MA$, zaś $\varepsilon=\dot\omega$ jest przyśpieszeniem kątowym.



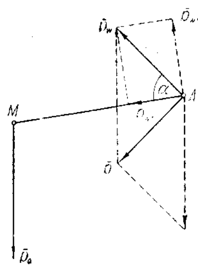
Niech α oznacza kąt, jaki przyśpieszenie $\overline{p}$ punktu A tworzy z prostą MA. Wówczas

$$\text{(2)}\qquad \operatorname{tg}\alpha=p_t/p_n=\varepsilon/\omega^2.$$

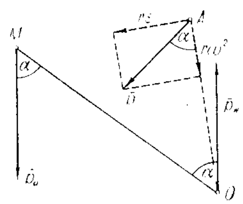
Widzimy stąd, że α jest jednakowe dla wszystkich punktów.

A więc: *w ruchu obrotowym figury około punktu stałego przyśpieszenia punktów figury są proporcjonalne do ich odległości od środka obrotu i tworzą kąty równe z prostą łączącą te punkty ze środkiem obrotu.*

Załóżmy teraz, że figura porusza się w płaszczyźnie zupełnie dowolnie (rys. 1). Przyjmijmy dowolny punkt M figury za początek układu współrzędnych (ξ, η), poruszającego się ruchem postępowym. Przyśpieszenie $\bar{p}$ dowolnego punktu A figury będzie sumą przyśpieszeń: względnego $\bar{p}_w$ i unoszenia $\bar{p}_u$. Przyśpieszenie unoszenia równa się przyśpieszeniu $\bar{p}_0$ punktu M. Ruch względny figury jest obrotem około M



1.



2.

z prędkością kątową zmienną ω. Możemy więc przyśpieszenie względne $\bar{p}_w$ rozłożyć na sumę przyśpieszeń (względnych): normalnego $\bar{p}_{w_n}$ i stycznego $\bar{p}_{w_t}$. Zatem

$$(3) \qquad \bar{p} = \bar{p}_0 + \bar{p}_w = \bar{p}_0 + \bar{p}_{w_n} + \bar{p}_{w_t}.$$

A więc: *w ruchu płaskim przyśpieszenia punktów figury są sumami przyśpieszenia dowolnego punktu M figury i przyśpieszeń, jakie miałyby te punkty przy obrocie figury około punktu M* (jako punktu stałego) *z prędkością kątową* (obrotu chwilowego figury) ω *i z przyśpieszeniem kątowym* $\varepsilon = \dot{\omega}$.

Jeżeli $\omega \neq 0$ lub $\varepsilon \neq 0$, to przyśpieszenie względne $\bar{p}_w$ tworzy z prostą MA kąt α określony wzorem (2) i kąt ten jest stały dla wszystkich punktów figury.

Przeprowadźmy w tym przypadku przez punkt M prostą l, tworzącą kąt α z kierunkiem przyśpieszenia $\bar{p}_0$ punktu M (rys. 2). Przyśpieszenia względne punktów położonych na prostej l będą miały kierunek przyśpieszenia $\bar{p}_0$. Ponieważ przyśpieszenia względne są proporcjonalne do odległości od M, więc na prostej l znajdziemy punkt O, którego przyśpieszenie względne będzie równe $-\bar{p}_0$. Przyśpieszenie punktu O będzie więc zerem.

Punkt O nazywamy *środkiem chwilowym przyśpieszeń.*

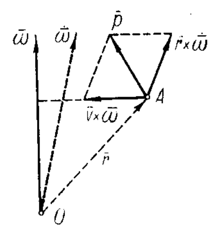
Jeżeli zaś $\omega=0$ i $\varepsilon=0$, to przyśpieszenia wszystkich punktów figury są równe (mianowicie, równe przyśpieszeniu punktu M).

A więc: *jeżeli przyśpieszenia punktów w ruchu płaskim figury nie są równe, to istnieje punkt, którego przyśpieszenie jest równe zeru.*

Przyśpieszenia punktów są zatem takie, jak gdyby figura obracała się około środka chwilowego przyśpieszeń (jako punktu stałego) z prędkością kątową ω i z przyśpieszeniem kątowym $\varepsilon=\dot{\omega}$. Przyśpieszenia punktów figury są proporcjonalne do odległości od środka chwilowego przyśpieszeń i tworzą kąty równe z prostymi, łączącymi te punkty ze środkiem chwilowym przyśpieszeń.

Ruch w przestrzeni. Jeżeli ciało obraca się około punktu stałego O z prędkością chwilową kątową $\bar{\omega}$, wówczas prędkość dowolnego punktu A ciała wynosi

$$\bar{v}=\bar{r}\times\bar{\omega}, \tag{4}$$



gdzie $\bar{r}=\overline{OA}$. Tworząc pochodną i oznaczając przez $\bar{p}$ przyśpieszenie punktu A, otrzymamy

$$\bar{p}=\dot{\bar{r}}\times\bar{\omega}+\bar{r}\times\dot{\bar{\omega}}.$$

Ponieważ O jest z założenia punktem stałym, więc $\dot{\bar{r}}=\bar{v}$; zatem

$$\bar{p}=\bar{v}\times\omega+\bar{r}\times\dot{\bar{\omega}}. \tag{5}$$

Jeżeli ciało obraca się około osi stałej z prędkością kątową stałą ω, to $\dot{\bar{\omega}}=0$, skąd na mocy (5) $\bar{p}=\bar{v}\times\omega$. Z drugiej strony, każdy punkt ma wówczas przyśpieszenie dośrodkowe $\varrho|\bar{\omega}|^2$, gdzie ϱ oznacza odległość tego punktu od osi obrotu. Iloczyn $\bar{v}\times\bar{\omega}$ jest więc przyśpieszeniem, z jakim poruszałyby się punkty ciała, gdyby ciało obracało się około osi stałej z prędkością kątową stałą $\bar{\omega}$. Iloczyn zaś $\bar{r}\times\dot{\bar{\omega}}=\mathrm{Mom}_A\dot{\bar{\omega}}$ przedstawia prędkość, jaką miałby punkt A, gdyby ciało obracało się około osi stałej z prędkością kątową $\dot{\bar{\omega}}$. Pochodna $\dot{\bar{\omega}}$ ma na ogół inny kierunek niż $\bar{\omega}$. Jeżeli $\bar{\omega}$ ma kierunek stały (t. zn. gdy oś obrotu jest stała), to $\dot{\bar{\omega}}$ ma kierunek $\bar{\omega}$, zatem $\bar{r}\times\dot{\bar{\omega}}$ ma kierunek prędkości $\bar{v}$. W tym przypadku $r\times\dot{\bar{\omega}}$ jest przyśpieszeniem stycznym, zaś $\bar{v}\times\bar{\omega}$ przyśpieszeniem normalnym.

Załóżmy teraz, że ciało wykonywa w przestrzeni ruch dowolny. Rozkład przyśpieszeń otrzymamy wówczas, przyjmując dowolny punkt O ciała za początek układu współrzędnych (ξ, η, ζ), poruszającego się ruchem postępowym. Przyśpieszenia punktów będą sumami: przyśpieszenia unoszenia (t. j. przyśpieszenia punktu O) i przyśpieszenia względnego. Ruch względny będzie obrotem około punktu O. Zatem przyśpieszenie względne dowolnego punktu A wyrazi się w myśl (5) wzorem

$$\bar{p}_w = \bar{v}_w \times \bar{\omega} + \bar{r} \times \dot{\bar{\omega}}, \tag{6}$$

gdzie $\bar{r} = \overline{OA}$, zaś $\bar{v}_w$ oznacza prędkość względną punktu A.

Interpretacja iloczynów $\bar{v}_w \times \bar{\omega}$ i $\bar{r} \times \dot{\omega}$ jest podobna jak przy obrocie ciała około punktu stałego. Oznaczając przez $\bar{p}_0$ przyśpieszenie, a przez $\bar{v}_0$ prędkość punktu O, zaś przez $\bar{v}$ prędkość punktu A, otrzymamy $\bar{v}_w = \bar{v} - \bar{v}_0$, a więc przyśpieszenie punktu A wyniesie na mocy (6)

$$p = \bar{p}_0 + (\bar{v} - \bar{v}_0) \times \bar{\omega} + \bar{r} \times \dot{\bar{\omega}}. \tag{7}$$