ROZDZIAŁ VIII

DYNAMIKA CIAŁA SZTYWNEGO

§ 1. Praca i energia kinetyczna. W dynamice, podobnie jak w statyce, będziemy również zakładali często, że ciało sztywne jest układem sztywnym punktów materialnych. Dzięki temu będziemy mogli stosować do ciała sztywnego twierdzenia dynamiki układu punktów materialnych.

Wielkości dynamiczne. Wielkości dynamiczne jak np. pęd, energia kinetyczna, kręt i t. d., które poznaliśmy dla układów punktów materialnych, określamy również dla ciał sztywnych, stosując podobne przejścia graniczne, jak przy określaniu dla nich środka masy, momentów statycznych i bezwładności (p. rozdz. IV, str. 173). Aby określić np. pęd ciała, dzielimy ciało na prostopadłościany o objętościach $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots$ i w każdym z nich bierzemy następnie pod uwagę po jednym punkcie $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2), \ldots$ Niechaj $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ oznaczają gęstości ciała w obranych punktach, zaś $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots$ prędkości tych punktów. Masy prostopadłościanów wynoszą w przybliżeniu $m_1 = \varrho_1\Delta\tau_1$, $m_2 = \varrho_2\Delta\tau_2, \ldots$ Jeżeli ciało zastąpimy układem punktów materialnych umieszczonych w $A_1, A_2, \ldots$ o masach $m_1, m_2, \ldots$ i prędkościach $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots$, wówczas pęd tego układu równy będzie

$$(1) \qquad \bar{H} = \Sigma m_i \bar{v}_i = \Sigma \varrho_i \bar{v}_i \Delta\tau_i.$$

Otóż granicę tej sumy, gdy wymiary prostopadłościanów dążą do zera, nazywamy *pędem ciała*.

Oznaczając przez $\varrho(x,y,z)$ gęstość, przez $\bar{v}(x,y,z)$ prędkość punktu o współrzędnych x,y,z, a przez $\bar{H}$ pęd ciała, dostaniemy:

$$(2) \qquad H_x = \iiint\limits_D \varrho v_x \, d\tau, \qquad H_y = \iiint\limits_D \varrho v_y \, d\tau, \qquad H_z = \iiint\limits_D \varrho v_z \, d\tau,$$

gdzie D oznacza obszar przestrzeni zajęty przez ciało. Wzory powyższe piszemy w postaci wektorowej

$$\bar{H}=\iiint_D \varrho \bar{v}\, d\tau. \tag{3}$$

Podobnie postępując, otrzymamy na energię kinetyczną wzór

$$E=\frac{1}{2}\iiint_D \varrho v^2 d\tau, \tag{4}$$

gdzie $v=|\bar{v}|$.

Kręt ((1'), str. 203) względem początku układu współrzędnych ma rzuty:

$$\begin{gathered} K_x=\iiint_D \varrho(v_y z - v_z y)\, d\tau, \qquad K_y=\iiint_D \varrho(v_z x - v_x z)\, d\tau, \\ K_z=\iiint_D \varrho(v_x y - v_y x)\, d\tau. \end{gathered} \tag{5}$$

Oznaczając przez $\bar{r}$ promień wodzący $\overline{OA}$, gdzie A ma współrzędne x,y,z, możemy napisać wzory (5) w postaci wektorowej:

$$\bar{K}=\iiint_D \varrho(\bar{v}\times\bar{r})\, d\tau. \tag{6}$$

Praca. Niech na ciało sztywne działa siła $\bar{P}$ o początku w punkcie A i niech $\bar{v}$ oznacza prędkość tego punktu.

Praca siły $\bar{P}$ w czasie od t' do t'' wyraża się wzorem (str. 96)

$$L=\int_{t'}^{t''}(\bar{P}\bar{v})\, dt. \tag{7}$$

Weźmy w ciele pod uwagę dowolny punkt O. Ruch chwilowy ciała możemy uważać za złożenie ruchu postępowego z prędkością $\bar{u}$ punktu O i ruchu obrotowego z prędkością kątową $\bar{\omega}$ około osi l przechodzącej przez O. Prędkość punktu A wynosi zatem ((I), str. 335)

$$\bar{v}=\bar{u}+\overline{OA}\times\bar{\omega}, \tag{8}$$

skąd

$$\bar{P}\bar{v}=\bar{P}\bar{u}+\bar{P}(\overline{OA}\times\bar{\omega}). \tag{9}$$

Ze wzoru (II), str. 12, mamy (kładąc $\bar{a}=\bar{P}$, $\bar{b}=\overline{OA}$ i $\bar{c}=\bar{\omega}$)

$$\bar{P}(\overline{OA}\times\bar{\omega})=\bar{\omega}(\bar{P}\times\overline{OA}). \tag{10}$$

Ponieważ $\mathrm{Mom}_O\overline{P}=\overline{P}\times\overline{OA}$ (str. 16), więc na mocy (9) i (10)

$$\overline{P}\overline{v}=\overline{P}\overline{u}+\overline{\omega}\,\mathrm{Mom}_O\,\overline{P},$$

skąd na mocy (7)

$$L=\int_{t'}^{t''}\overline{P}\overline{u}\,dt+\int_{t'}^{t''}\overline{\omega}\,\mathrm{Mom}_O\,\overline{P}\,dt. \tag{11}$$

Jeżeli na ciało działają siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$, to praca ich wynosi według (11)

$$L=\int_{t'}^{t''}\left(\sum\overline{P}_i\right)\overline{u}\,dt+\int_{t'}^{t''}\overline{\omega}\left(\sum\mathrm{Mom}_O\overline{P}_i\right)dt.$$

Oznaczając przez $\overline{P}$ sumę sił, a przez $\overline{M}_O$ moment ogólny względem O, dostaniemy

$$L=\int_{t'}^{t''}(\overline{P}\overline{u})\,dt+\int_{t'}^{t''}(\overline{\omega}\overline{M}_O)\,dt. \tag{I}$$

Z powyższego wzoru wynika, że *równoważne układy sił wykonują równe prace.*

W szczególności *układ sił równoważny zeru* ($\overline{P}=0$, $\overline{M}=0$) *wykonuje pracę zero.*

Oznaczając przez α kąt, jaki $\overline{M}_O$ tworzy z osią l obrotu chwilowego, a przez ω współrzędną wektora $\overline{\omega}$ względem osi l, mamy $\overline{\omega}\overline{M}_O=\omega|\overline{M}_O|\cos\alpha$. Lecz $|\overline{M}_O|\cos\alpha$ jest to rzut momentu $\overline{M}_O$ na oś l. Zatem $|\overline{M}_O|\cos\alpha$ równa się M_l, t. j. momentowi ogólnemu sił względem osi obrotu chwilowego; dostajemy więc z (I)

$$L=\int_{t'}^{t''}(\overline{P}\overline{u})\,dt+\int_{t'}^{t''}\omega M_l\,dt. \tag{I'}$$

Gdy ciało porusza się ruchem postępowym, to $\overline{\omega}=0$, więc na mocy (I)

$$L=\int_{t'}^{t''}(\overline{P}\overline{u})\,dt. \tag{12}$$

Gdy ciało obraca się około punktu O, to $\overline{u}=0$, więc na mocy (I')

$$L=\int_{t'}^{t''}\omega M_l\,dt. \tag{13}$$

Wzór (13) zachodzi również wtedy, gdy ciało obraca się około osi stałej l; otrzymujemy go ze wzoru (I′), obierając punkt O na osi l. Oznaczając w tym przypadku przez φ kąt obrotu, dostaniemy $\omega = d\varphi/dt$ czyli $\omega dt = d\varphi$, więc na mocy (13)

$$L = \int_{\varphi'}^{\varphi''} M_l \, d\varphi, \tag{14}$$

gdzie φ' i φ'' oznaczają kąty w początkowym i końcowym położeniu ciała.

Energia kinetyczna. Jak wiemy (str. 332), ruch chwilowy ciała względem dowolnego punktu O ciała jest obrotem z prędkością chwilową kątową $\bar{\omega}$ około osi przechodzącej przez O. Niech I oznacza moment bezwładności względem osi obrotu chwilowego. Energia kinetyczna ruchu względnego wynosi $\frac{1}{2}I\omega^2$. Na mocy więc twierdzenia Königa (str. 218) energia kinetyczna ciała wyrazi się wzorem

$$E = \tfrac{1}{2}mu^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 + m\bar{u}(\bar{v}_0 - \bar{u}), \tag{II}$$

gdzie u oznacza wartość bezwzględną prędkości $\bar{u}$ punktu O, $\bar{v}_0$ prędkość środka masy, a m masę ciała.

A więc: *energia kinetyczna ciała sztywnego równa się sumie:*

1) *energii kinetycznej ruchu postępowego z prędkością dowolnego punktu O ciała,*

2) *energii kinetycznej obrotu chwilowego względem osi chwilowej, przechodzącej przez punkt O* i

3) *iloczynu skalarowego $m\bar{u}(\bar{v}_0 - \bar{u})$,*

gdzie m oznacza masę ciała, $\bar{u}$ prędkość punktu O, a $\bar{v}_0$ prędkość środka masy.

Jeżeli obierzemy za punkt O środek masy, to $\bar{u} = \bar{v}_0$; kładąc $v_0 = |\bar{v}_0|$, dostaniemy zatem

$$E = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2. \tag{II′}$$

A więc: *energia kinetyczna ciała sztywnego równa się sumie energii kinetycznej ruchu postępowego z prędkością środka masy i energii kinetycznej ruchu chwilowego obrotowego względem osi chwilowej, przechodzącej przez środek masy.*

Jeżeli ruch chwilowy jest skrętem chwilowym około osi środkowej przechodzącej przez O, to wektory $\overline{\omega}$ i $\overline{u}$ są równoległe. Prędkość $\overline{v}_0$ środka masy S wynosi wtedy $\overline{v}_0 = \overline{u} + \overline{OS} \times \overline{\omega}$. Ponieważ $\overline{v}_0 - \overline{u} = \overline{OS} \times \overline{\omega}$, więc wektor $\overline{v}_0 - \overline{u}$ jest prostopadły do $\overline{\omega}$, a przeto również do $\overline{u}$. Wynika stąd, że iloczyn skalarowy $\overline{u}(\overline{v}_0 - \overline{u})$ jest zerem. Na mocy (II) dostaniemy zatem

$$E = \tfrac{1}{2} m u^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2. \tag{15}$$

A więc: *jeżeli ruch chwilowy ciała sztywnego przedstawić jako skręt, to energia kinetyczna jest sumą energii kinetycznej ruchów postępowego i obrotowego.*

Ruch chwilowy płaski jest obrotem chwilowym około środka obrotu chwilowego z prędkością chwilową kątową.

Energia kinetyczna w ruchu płaskim wynosi $E = \tfrac{1}{2} I \omega^2$,

gdzie I jest momentem bezwładności względem środka obrotu chwilowego, zaś ω prędkością chwilową kątową.

§ 2. Równania ruchu. Ruch środka masy. Niech m oznacza masę ciała, $\overline{p}_0$ przyśpieszenie środka masy, a $\overline{P}$ sumę sił zewnętrznych, działających na ciało. Wówczas (str. 200)

$$m \overline{p}_0 = \overline{P}. \tag{I}$$

Znając więc sumę sił zewnętrznych, możemy wyznaczyć ruch środka masy ciała.

Zasada krętu. Niech $\overline{K}$ oznacza kręt, $\overline{M}$ moment ogólny sił zewnętrznych względem punktu stałego lub względem środka masy. Wówczas (str. 205)

$$\dot{\overline{K}} = \overline{M}. \tag{II}$$

Znając więc moment ogólny sił względem punktu stałego lub względem środka masy, możemy wyznaczyć kręt.

Jeżeli z równań (I) i (II) obliczymy przyśpieszenie p_0 środka masy i kręt $\overline{K}$, to ruch ciała będzie wyznaczony. Mając bowiem dane $\overline{p}_0$, możemy wyznaczyć ruch środka masy. Znając zaś kręt $\overline{K}$, możemy (jak okażemy później, str. 396) wyznaczyć prędkość chwilową kątową $\overline{\omega}$. Ponieważ ruch jednego punktu i prędkość chwilowa kątowa określają ruch ciała (str. 338), więc równania (I) i (II) wystarczają do wyznaczenia tego ruchu.

Zasada energii kinetycznej. Uważajmy ciało sztywne za układ sztywny punktów materialnych. Wówczas na mocy twierdzenia podanego na str. 212 siły wewnętrzne nie wykonują pracy. Zatem pracę wykonują tylko siły zewnętrzne. Z twierdzenia o energii kinetycznej (str. 219) wynika, że *przyrost energii kinetycznej ciała sztywnego równa się pracy sił zewnętrznych.*

Jeżeli siły zewnętrzne posiadają potencjał, to (str. 220) *suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała.*

Zasada d'Alemberta. Jak wiemy (str. 192), siły bezwładności równoważą się z siłami działającymi na punkty układu. Ponieważ siły wewnętrzne mają sumę i moment ogólny równe zeru, więc *siły bezwładności równoważą się z siłami zewnętrznymi.*

Zasada ta sprowadza badanie ruchu ciała sztywnego do zagadnień statyki.

Ruch postępowy ciała. Jeżeli ruch chwilowy ciała sztywnego jest ruchem postępowym, to kręt względem środka masy jest zerem (str. 203). Na odwrót:

Jeżeli w pewnej chwili kręt względem środka masy jest zerem, to ruch chwilowy ciała sztywnego jest ruchem postępowym.

Dowód. Załóżmy, że kręt $\bar{K}$ względem środka masy jest zerem. Ruch chwilowy ciała sztywnego możemy uważać za złożenie ruchu postępowego z prędkością środka masy i ruchu obrotowego z prędkością kątową ω około osi l przechodzącej przez środek masy. Ponieważ $\bar{K}$ jest sumą krętów ruchu postępowego i obrotowego, więc $\bar{K}$ równa się krętowi ruchu obrotowego, gdyż kręt ruchu postępowego względem środka masy jest zerem (str. 203).

Oznaczmy przez K kręt względem osi chwilowego obrotu l. Ze wzoru (7), str. 205, mamy $K = I\omega$, gdzie I jest momentem bezwładności względem osi l. Ponieważ K jest rzutem krętu $\bar{K}$ na oś obrotu chwilowego, więc $K=0$. Zatem $I\omega=0$, skąd $\omega=0$, c. b. d. d.

Jeżeli ciało porusza się przez pewien czas ruchem postępowym, to kręt $\bar{K}$ względem środka masy jest przez ten czas stale zerem. Wobec tego pochodna krętu $\dot{\bar{K}}$ też jest zerem. Ze wzoru (II) str. 365, wynika, że $\bar{M}=0$, t. zn. że moment sił względem środka masy jest zerem. Na mocy więc twierdzenia 1, str. 26, siły mają wypadkową, zaczepioną w środku masy.

Na odwrót, jeżeli siły mają wypadkową zaczepioną stale w środku masy, to $\overline{M}=0$, więc stale $\dot{\overline{K}}=0$ czyli $\overline{K}=\text{const}$. Jeżeli założymy, że w chwili początkowej ruch chwilowy był ruchem postępowym czyli że było wówczas $\overline{K}=0$, to będzie stale $\overline{K}=0$, t. zn. ciało będzie się poruszało ruchem postępowym.

A więc: *na to, by ciało poruszało się ruchem postępowym potrzeba i wystarczy, by były spełnione warunki następujące:*

1^0 *w chwili początkowej ruch chwilowy jest ruchem chwilowym postępowym,*

2^0 *w każdej chwili siły mają wypadkową, zaczepioną w środku masy.*

Warunki równowagi. Z warunków 1^0 i 2^0 łatwo wynikają warunki konieczne i wystarczające, jakim musi czynić zadość układ sił w równowadze (por. str. 248).

Jeżeli ciało jest w spoczynku, to przyśpieszenie środka masy $\overline{p}_0$ i kręt $\overline{K}$ są równe zeru, zatem na mocy (I) i (II), str. 365, jest $\overline{P}=0$ i $\overline{M}=0$.

Na odwrót, jeżeli założymy, że w chwili $t=t_0$ ciało było w spoczynku i że stale jest $\overline{P}=0$ i $\overline{M}=0$, to z warunków 1^0 i 2^0 wynika, że ciało będzie się poruszać ruchem postępowym. Środek masy będzie w spoczynku, gdyż $\overline{p}_0=0$ i prędkość początkowa $\overline{v}_0$ jest zerem; całe ciało będzie zatem w spoczynku. Układ sił jest więc w równowadze.

Udowodniliśmy zatem, że *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił jest znikanie sumy i momentu ogólnego sił.*

Reakcje ciał stykających się. Dwa ciała sztywne I i II, stykające się w punkcie A, działają na siebie z pewnymi siłami, podlegającymi prawu akcji i reakcji. Siły, z jakimi ciało II działa na ciało I, możemy zastąpić jedną siłą $\overline{R}$ o początku A i parą sił o momencie $\overline{M}$.

Nie posiadamy dotychczas ogólnej teorii dla momentu $\overline{M}$. W niektórych tylko przypadkach szczególnych stwierdzono pewne prawa, odnoszące się do $\overline{M}$. Dla siły $\overline{R}$ natomiast uzyskano na drodze doświadczalnej prawa dość ogólne (jakkolwiek przybliżone), które w praktyce dają wyniki dostatecznie dokładne.

Załóżmy, że ciała mają w A wspólną płaszczyznę styczną Π. Składową $\overline{N}$ (reakcji $\overline{R}$) prostopadłą do Π nazywamy *reakcją normalną*, składową zaś styczną $\overline{T}$ *tarciem*.

Doświadczenie wykazuje, że między $\bar{N}$ i $\bar{T}$ zachodzą pewne związki. Rozpatrzymy dwa przypadki:

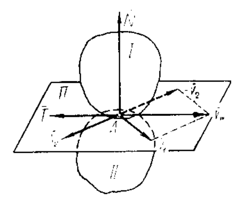
1^0 Punkty, którymi oba ciała się stykają, mają prędkości równe: punkty te mają więc względem siebie prędkość zero. Ruch chwilowy ciała jednego względem drugiego jest obrotem około osi przechodzącej przez punkt styczności, jest więc toczeniem względnym. W tym przypadku (kładąc $T=|\bar{T}|$ i $N=|\bar{N}|$), mamy

$$T \leqslant fN, \tag{1}$$

gdzie f oznacza współczynnik statyczny tarcia (por. str. 271), zależny tylko od natury powierzchni obu ciał w punkcie zetknięcia.

2^0 Prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ punktów, jakimi oba ciała stykają się z sobą, są różne. Prędkość względna $\bar{v}_w$ punktu styczności ciała I względem ciała II wynosi $\bar{v}_w=\bar{v}_1-\bar{v}_2$ i leży w płaszczyźnie stycznej. W tym przypadku tarcie ma kierunek prędkości względnej $\bar{v}_w$, zwrot zaś przeciwny. Mamy ponadto

$$T=\mu N, \tag{2}$$



gdzie μ oznacza t. zw. *współczynnik dynamiczny tarcia*, zależny tylko od natury powierzchni ciał w punkcie zetknięcia, a nie od prędkości punktów. Możemy więc przyjąć, że podczas ruchu $\mu=$ const. dopóki ciała się stykają i dopóki punkty styczności mają prędkości różne.

Na ogół μ jest nieco mniejsze od f.

Prawa podane w 1^0 i 2^0 są przybliżone.

Jeżeli tarcie jest zerem, powiadamy, że powierzchnie ciał są *gładkie*.

Powierzchnie ciał nazywamy *doskonale chropowatymi*, jeżeli ciała mogą poruszać się tylko w taki sposób, że punkty, jakimi się stykają, mają prędkości równe. Ruch względny jednego ciała względem drugiego jest wówczas toczeniem.

Praca tarcia. Niech $\bar{R}$ oznacza reakcję ciała II na ciało I; wówczas $-\bar{R}$ oznacza reakcję ciała I na ciało II. Niech $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ oznaczają prędkości punktów materialnych, którymi ciała się stykają. Praca, jaką reakcje w punkcie styczności wykonują w czasie od t' do t'' wynosi

$$L=\int_{t'}^{t''}\bar{R}\bar{v}_1\,dt-\int_{t'}^{t''}\bar{R}\bar{v}_2\,dt=\int_{t'}^{t''}\bar{R}(\bar{v}_1-\bar{v}_2)\,dt.$$

Ponieważ $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$ leży w płaszczyźnie stycznej (albo jest zerem), więc reakcje normalne nie wykonują pracy, bo $\bar{N}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = 0$. Praca reakcji redukuje się zatem do pracy sił tarcia. A więc

$$L = \int_{t'}^{t''} \bar{T}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)\, dt.$$

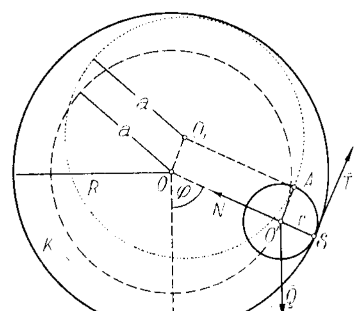
Gdy $\bar{v}_w = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 \neq 0$, tarcie $\bar{T}$ ma na mocy 2^0 kierunek $\bar{v}_w$, lecz zwrot przeciwny, zatem iloczyn skalarowy $\bar{T}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)$ jest ujemny. Gdy $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = 0$, wówczas $\bar{T}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = 0$. W obu więc przypadkach $\bar{T}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \leqslant 0$, skąd $L \leqslant 0$.

Gdy ruch ciał względem siebie jest toczeniem, to praca tarcia jest zerem, gdy zaś ruch ten jest ślizganiem, to praca tarcia jest ujemna i powoduje zmniejszenie energii kinetycznej ciał.

Przykład 1. Tarcza koła spada pod wpływem swego ciężaru w płaszczyźnie pionowej po kole K. Wyznaczyć ruch tarczy.

Niechaj O i O' oznaczają środek koła K i środek tarczy, R i r ich promienie, m masę tarczy, I jej moment bezwładności względem środka masy O', wreszcie φ kąt między pionem a odcinkiem OO'.

Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy tarcza i koło K są gładkie, a następnie, gdy są doskonale chropowate.



1^0 Załóżmy, że tarcza oraz koło są gładkie i że w chwili początkowej $t = 0$ tarcza była w spoczynku. Siłami działającymi na tarczę podczas ruchu są: ciężar $\bar{Q}$ o początku w środku masy O' i reakcja $\bar{N}$, której kierunek przechodzi przez O'. Moment tych sił względem środka masy jest więc stale zerem. Ponieważ w chwili początkowej tarcza była w spoczynku, więc będzie ona się poruszać ruchem postępowym (str. 367), t. j. ślizgać się po kole K (str. 339). Środek O' tarczy będzie się tedy poruszał po kole o środku O i o promieniu $a = R - r$. Zatem wszystkie punkty tarczy będą się poruszały po kołach o promieniu a (por. np. tor punktu A, zaznaczony na rysunku).

Oznaczając przez p_0 przyśpieszenie środka masy tarczy, mamy na mocy twierdzenia o ruchu środka masy (str. 365)

$$(3) \qquad m\bar{p}_0 = \bar{Q} + \bar{N}.$$

Tworząc rzuty na styczną i normalną do toru punktu O', dostaniemy:

$$ma\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi, \qquad ma\dot{\varphi}^2=N, \tag{4}$$

gdzie $N=|\overline{N}|$. Pierwsze z równań (4) możemy napisać w postaci

$$\varphi=-\frac{g}{a}\sin\varphi. \tag{5}$$

Porównując równanie (5) z równaniem wahadła matematycznego $\ddot{\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi$ (str. 132), widzimy, że środek masy tarczy będzie wykonywał ruch wahadłowy, jak wahadło matematyczne o długości $l=a$.

2^0 Załóżmy teraz, że tarcza i koło są doskonale chropowate. Tarcza będzie się zatem (str. 368) toczyć po kole K.

Oznaczmy przez ω prędkość chwilową kątową tarczy. Energia kinetyczna tarczy wynosi ((II'), str. 364)

$$E=\tfrac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2+\tfrac{1}{2}I\omega^2$$

(gdyż $a\dot{\varphi}$ jest prędkością środka masy). Jeżeli dla $t=0$ ciało jest w spoczynku oraz $\varphi=\varphi_0$, wówczas z zasady równowartości pracy i energii kinetycznej (str. 366) dostaniemy

$$\tfrac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2+\tfrac{1}{2}I\omega^2=mga(\cos\varphi-\cos\varphi_0), \tag{6}$$

gdyż tarcie (str. 214) i reakcja $\overline{N}$ pracy nie wykonują.

Prędkość v punktu styczności S jest zerem. Zatem $v=a\dot{\varphi}-r\omega=0$ czyli $\omega=a\dot{\varphi}/r$. Wstawiając w (6), dostaniemy więc

$$\tfrac{1}{2}a^2(m+I/r^2)\dot{\varphi}^2=mga(\cos\varphi-\cos\varphi_0). \tag{7}$$

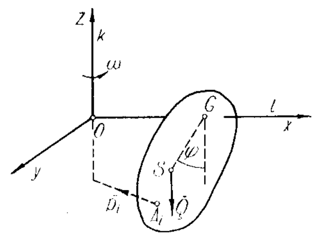
Stąd otrzymujemy $\dot{\varphi}$ w zależności od φ, a następnie ω. Różniczkując równanie (7), dostaniemy $a^2[m+I/r^2]\dot{\varphi}\ddot{\varphi}=-mga\dot{\varphi}\sin\varphi$, skąd po uproszczeniu

$$\ddot{\varphi}=-\frac{mg}{a(m+I/r^2)}\sin\varphi. \tag{8}$$

Porównując równanie (8) z równaniem wahadła matematycznego $\ddot{\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi$ (str. 132), widzimy że środek tarczy będzie poruszał się jak wahadło o długości $l=a(1+I/mr^2)$.

Ponieważ dla koła jednorodnego jest $I=\frac{1}{2}mr^2$, więc $l=3a/2$. Okres wahania będzie więc dłuższy niż dla wahadła o długości a.

Przykład 2. Ciężkie ciało sztywne zawieszone jest na osi poziomej l, około której może się tylko obracać. Położenie ciała wyznaczone jest przez podanie położenia osi l i kąta φ, jaki tworzy z pionem prosta SG, przechodząca przez środek masy S i przecinająca oś l pod kątem prostym w punkcie G. Oś l przecina oś pionową k w punkcie O i obraca się około niej z prędkością kątową stałą ω. Jaki zachodzi związek między ω i φ, jeżeli φ jest stałe?



Zadanie rozwiążemy przy pomocy zasady d'Alemberta (str. 366). Siły bezwładności równoważą się z siłami działającymi. Zatem moment ogólny sił bezwładności i sił działających względem osi l jest zerem.

Obierzmy w pewnej chwili t układ współrzędnych, przyjmując oś l za oś x, a oś k za oś z. Ponieważ $\varphi = \text{const.}$, więc każdy punkt ciała krąży z prędkością kątową ω po kole poziomym (którego środek leży na osi z). Przyśpieszenie każdego punktu ciała jest zatem skierowane ku środkowi koła i wynosi $r\omega^2$, gdzie r oznacza promień koła.

Przyjmijmy, że ciało jest zbiorem punktów materialnych. Jeżeli przez $\bar{p}_i$ oznaczymy przyśpieszenie punktu A_i o masie m_i i współrzędnych x_i, y_i, z_i, to:

$$(9) \qquad p_{i_x} = -x_i\omega^2, \qquad p_{i_y} = -y_i\omega^2, \qquad p_{i_z} = 0.$$

Zatem siły bezwładności punktu A_i mają rzuty:

$$-m_i p_{i_x} = m_i x_i \omega^2, \qquad -m_i p_{i_y} = m_i y_i \omega^2, \qquad -m_i p_{i_z} = 0.$$

Moment sił bezwładności względem osi l (t.j. osi x) wynosi:

$$(10) \qquad B_x = \sum(-m_i p_{i_y}) z_i = \omega^2 \sum m_i y_i z_i = \omega^2 D_x,$$

gdzie D_x oznacza moment zboczenia względem płaszczyzn xy i xz.

Środek ciężkości S ma współrzędne $x_0 = OG$, $y_0 = l_0 \sin\varphi$, $z_0 = -l_0 \cos\varphi$ (gdzie $l_0 = SG$). Moment ciężaru względem osi x wynosi

$$(11) \qquad M_x = mgl_0 \sin\varphi,$$

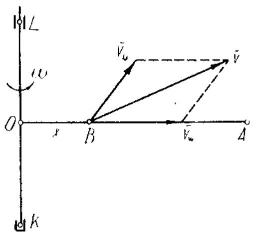
gdzie m oznacza masę ciała.

Moment reakcyj względem osi x jest zerem, gdyż reakcje zaczepione są na osi z. Zatem $B_x + M_x = 0$, więc na mocy (10) i (11)

(12) $$\omega^2 D_x + mgl_0 \sin\varphi = 0.$$

Równanie powyższe jest związkiem szukanym i może być spełnione tylko wtedy, gdy $D_x \leqslant 0$ (a więc np., gdy ciało znajduje się w ćwiartce, w której $y>0$, a $z<0$).

Przykład 3. Pręt poziomy OA osadzony jest sztywnie w punkcie O na osi pionowej, unieruchomionej w punktach K i L. Na pręt nasunięty jest punkt materialny (drobna kulka) B, mogący się swobodnie poruszać po pręcie. W chwili początkowej $t=0$ pręt OA obraca się około KL z prędkością kątową ω_0, punkt zaś B ma względem pręta prędkość równą zeru i znajduje się w odległości x_0 od O. Wyznaczyć ruch pręta OA i punktu materialnego B.



Niechaj I oznacza moment bezwładności pręta względem osi KL, m masę punktu B, ω prędkość kątową pręta, a x długość odcinka OB.

Załóżmy, że nie ma tarcia. Na układ złożony z osi KL, pręta OA i punktu m działają siły zewnętrzne: reakcje w L i K oraz siła ciężkości. Moment tych sił względem KL jest zerem. Kręt układu względem osi KL jest więc stały. Kręt pręta względem KL wynosi $I\omega$ (str. 205).

Prędkość $\bar{v}$ punktu B jest sumą jego prędkości względnej $\bar{v}_w$ względem pręta i prędkości unoszenia $\bar{v}_u$. Prędkość względna ma współrzędną (względem OA) $v_w = \dot{x}$ i kierunek OA; moment jej względem KL jest więc zerem. Prędkość unoszenia jest prostopadła do OA, ma kierunek poziomy i $|\bar{v}_u| = x\omega$. Zatem moment pędu punktu B względem KL równa się $mx^2\omega$. Kręt całego układu wynosi więc $I\omega + mx^2\omega$, skąd

(13) $$(I + mx^2)\omega = k = \text{const.}$$

Z danych początkowych mamy $k = (I + mx_0^2)\omega_0$. Zauważmy, że praca sił działających jest zerem. Zatem energia kinetyczna układu jest stała. Energia kinetyczna pręta wynosi $\frac{1}{2}I\omega^2$ (str. 365), energia zaś punktu B

$$\tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 = \tfrac{1}{2}m(\bar{v}_w^2 + \bar{v}_u^2) = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + x^2\omega^2).$$

Zatem

(14) $$\tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + x^2\omega^2) = h = \text{const.}$$

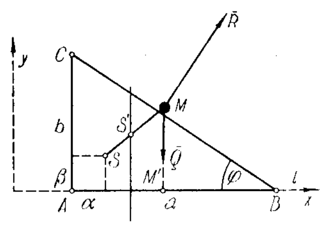
Obliczając ω z (13) i wstawiając w (14), otrzymujemy

$$k^2/(I+mx^2)+m\dot{x}^2=2h. \tag{15}$$

Równanie (15) określa ruch względny punktu po pręcie. Znając x, wyznaczamy ω z (13).

Jeżeli punkt dojdzie do A, a następnie opuści pręt, to pręt będzie się obracał ze stałą prędkością kątową ω', którą otrzymamy z (13), kładąc $x=OA=l$. Prędkość punktu w chwili opuszczania pręta wyniesie $v^2=l^2\omega'^2+\dot{x}^2$, gdzie $\dot{x}^2$ otrzymujemy z (15), kładąc $x=l$.

Przykład 4. Punkt materialny M stacza się po przeciwprostokątnej trójkąta materialnego prostokątnego ABC. Trójkąt leży w płaszczyźnie pionowej i opiera się na prostej poziomej gładkiej l. Wyznaczyć ruch układu złożonego z punktu M i trójkąta ABC.



Przyjmijmy oś l za oś x układu współrzędnych. Niechaj a i b oznaczają długości przyprostokątnych trójkąta, S środek jego masy, α i β rzuty odcinka AS na przyprostokątne, φ kąt o wierzchołku w B, m' masę trójkąta, m'' masę punktu, x_1 i $y_1=\beta$ współrzędne punktu S, zaś x_2 i y_2 współrzędne punktu materialnego M.

Załóżmy, że w chwili początkowej $t=0$ układ złożony z trójkąta i punktu M był w spoczynku.

Siłami zewnętrznymi, działającymi na układ, są reakcja prostej l oraz ciężar trójkąta i punktu M. Siły te mają stale kierunek pionowy. Zatem ich suma ma również stale kierunek pionowy. Z zasady środka masy (str. 365) wynika, że środek masy S' całego układu będzie poruszał się po pionie (ponieważ prędkość początkowa była równa zeru). Współrzędne środka S' masy układu wynoszą:

$$x_0=(m'x_1+m''x_2)/m, \qquad y_0=(m'\beta+m''y_2)/m, \tag{16}$$

gdzie $m=m'+m''$. Zatem

$$m'x_1+m''x_2=c=\text{const}. \tag{17}$$

Środek masy S trójkąta porusza się po prostej $y=\beta$, więc jego prędkość jest $\dot{x}_1$. Energia kinetyczna trójkąta ABC równa się $\frac{1}{2}m'\dot{x}_1^2$, zaś energia kinetyczna punktu M wynosi $\frac{1}{2}m''(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$. Pracę wykonywa tylko ciężar punktu M. Ponieważ ciężar ma potencjał $-m''gy_2$, więc z zasady zachowania energii całkowitej otrzymujemy

$$\tfrac{1}{2}m'\dot{x}_1^2+\tfrac{1}{2}m''(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)+m''gy_2=h=\text{const}. \tag{18}$$

Punkt B ma odciętą $x_1-\alpha+a$. Oznaczając przez M' rzut M na oś x, mamy $\operatorname{tg}\varphi=MM'/M'B$, skąd $\operatorname{tg}\varphi=y_2/(x_1-\alpha+a-x_2)$. Zatem

$$y_2-(x_1-x_2-\alpha+a)\operatorname{tg}\varphi=0. \tag{19}$$

Z równań (17)-(19) możemy otrzymać x_1, x_2 i y_2 jako funkcje czasu.

Równania (17) i (19) są równaniami stopnia pierwszego, możemy więc wyznaczyć z nich x_2 i y_2 liniowo przy pomocy x_1. Otrzymamy:

$$x_2=Ax_1+B, \qquad y_2=A'x_1+B', \tag{20}$$

gdzie A, B i A', B' są pewnymi stałymi. Różniczkując i wstawiając w (18) dostaniemy

$$\tfrac{1}{2}[m'+m''(A^2+A'^2)]\dot{x}_1^2+m''g(A'x_1+B')=h.$$

Tworząc pochodną, otrzymamy

$$[m'+m''(A^2+A'^2)]\dot{x}_1\ddot{x}_1+m''gA'\dot{x}_1=0, \tag{21}$$

skąd po podzieleniu przez $\dot{x}_1$

$$\ddot{x}_1=\text{const}. \tag{22}$$

A więc trójkąt poruszać się będzie ruchem postępowym jednostajnie przyśpieszonym.

Z równań (20) otrzymujemy, znając x_1,

$$A'x_2-Ay_2=A'B-AB'. \tag{23}$$

A więc punkt M będzie się poruszał po linii prostej.

Na mocy (20) mamy $\ddot{x}_2=A\ddot{x}_1$ i $\ddot{y}_2=A'\ddot{x}_1$, więc według (22) $\ddot{x}_2=\text{const}.$ i $\ddot{y}_2=\text{const}.$ Rzuty przyśpieszenia punktu M są stałe, więc i przyśpieszenie punktu M jest stałe. Przyśpieszenie względne punktu M względem trójkąta jest również stałe, gdyż otrzymujemy je, odejmując od przyśpieszenia punktu M przyśpieszenie trójkąta. Punkt M będzie więc staczał się po przeciwprostokątnej ruchem jednostajnie przyśpieszonym (względem przeciwprostokątnej).

Zbadajmy jeszcze, czy M nie oderwie się od trójkąta przed osiągnięciem punktu B.

Oznaczmy przez $\bar{R}$ reakcję trójkąta na punkt M. Ponieważ na punkt M działa ciężar $\bar{Q}$ i siła $\bar{R}$, więc tworząc rzuty na osie x i y, otrzymamy:

$$m''\ddot{x}_2 = R_x \quad \text{i} \quad m''\ddot{y}_2 = -m''g + R_y.$$

Lecz $\ddot{x}_2 = \text{const.}$ i $\ddot{y}_2 = \text{const}$, więc $R_x = \text{const.}$ i $R_y = \text{const.}$ Zatem $\bar{R}$ jest stałe. Siła $\bar{R}$ jest więc skierowana stale ku punktowi M, który zatem nie może odpaść od trójkąta ABC przed osiągnięciem punktu B.

§ 3. Obrót około osi stałej. Jeżeli ciało sztywne ma oś l unieruchomioną, to może się tylko obracać około tej osi. Załóżmy, że na ciało działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ Nadajmy osi l dowolny zwrot i oznaczmy przez I moment bezwładności ciała względem l, przez M moment sił względem l, a przez ω prędkość kątową.

Kręt względem osi l wynosi $K = I\omega$ ((7), str. 205). Ponieważ w myśl twierdzenia o kręcie względem osi (str. 206) mamy $\dot{K} = M$, więc

$$(1) \qquad I\dot{\omega} = M.$$

Przyśpieszenie kątowe jest $\varepsilon = \dot{\omega}$, więc

$$(I) \qquad I\varepsilon = M.$$

Niech Π i Π' będą dwiema płaszczyznami przechodzącymi przez oś l; Π niech będzie nieruchoma, a Π' związana sztywnie z ciałem i obracająca się wraz z nim. Niech wreszcie φ oznacza kąt między płaszczyznami Π a Π'. Wówczas $\dot{\varphi} = \omega$ i $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, skąd na mocy (I)

$$(2) \qquad I\ddot{\varphi} = M.$$

Równanie różniczkowe (2) ma postać taką, jak równanie $m\ddot{x} = P$, określające ruch punktu materialnego po osi x.

Jeżeli siły $\bar{P}_i$ lub moment M dane są jako funkcje zależne od φ, $\dot{\varphi}$ i t (t. j. od położenia ciała, prędkości kątowej i czasu), wówczas równanie (2) jest równaniem różniczkowym rzędu drugiego i pozwala wyznaczyć ruch, gdy znamy φ i $\dot{\varphi}$ (t. j. położenie i prędkość kątową ciała) dla chwili początkowej $t = t_0$.

Energia kinetyczna ciała przy obrocie około osi l wynosi $E = \frac{1}{2} I\omega^2$ (str. 365). Oznaczmy przez ω_0 i ω prędkość kątową w chwilach t_0 i t, a przez $L_{t_0,t}$ pracę sił od chwili t_0 do t. Ponieważ siły reakcyjne, utrzymujące oś w spoczynku, zaczepione są w punktach osi, więc nie wykonują pracy. Z twierdzenia o równowartości pracy i energii kinetycznej (str. 366) dostaniemy zatem

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2} I\omega^2 - \tfrac{1}{2} I\omega_0^2 = L_{t_0,t}.$$

Praca sił wyraża się wzorem (14), str. 364,

$$L_{t_0,t} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M\, d\varphi, \tag{4}$$

gdzie φ_0 i φ oznaczają kąty obrotu w chwilach t_0 i t. Jeżeli M jest funkcją zależną tylko od φ, możemy otrzymać $L_{t_0,t}$ ze wzoru (4) jako funkcję kąta φ. Wstawiając w (3), otrzymamy równanie różniczkowe rzędu pierwszego.

Przykład 1. Maszyna Atwooda[1]). Na końcach nici nierozciągliwej (bez masy), przewiniętej przez krążek materialny doskonale chropowaty, zawieszone są dwa punkty ciężkie o masach m_1 i m_2. Niech r oznacza promień krążka.

Załóżmy, że punkty poruszają się pionowo. Drogi przebywane przez punkty są równe, a więc przyśpieszenia punktów równe są co do wielkości, lecz mają zwroty przeciwne.

Oznaczmy przez p rzut przyśpieszenia punktu m_1 na oś z, skierowaną pionowo w dół (p. rysunek na str. 197). Krążek jest doskonale chropowaty, a zatem nić nie ślizga się po nim. Jeżeli więc krążek obróci się o kąt φ (przyczem przyjmujemy $\varphi > 0$, gdy punkt m_1 spada), to punkt m_1 przebiegnie drogę $s = r\varphi$. Stąd $\ddot{s} = r\ddot{\varphi}$, a zatem

$$p = r\varepsilon. \tag{5}$$

Oznaczmy przez $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ reakcje nici na punkty m_1 i m_2, a przez R_1 i R_2 ich wartości bezwzględne. Reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ nie są równe, gdyż nić nie jest przewinięta przez ciało gładkie.

Na punkty m_1 i m_2 działają reakcje nici i ciężary. Zatem:

$$m_1 p = m_1 g - R_1, \qquad -m_2 p = m_2 g - R_2. \tag{6}$$

Kawałek nici od punktu m_1 do krążka działa na krążek z siłą $-\bar{R}_1$; podobnie kawałek nici od punktu m_2 do krążka działa na krążek z siłą $-\bar{R}_2$. Momenty tych sił względem osi krążka wynoszą $R_1 r$ i $-R_2 r$, przyczem moment siły $-\bar{R}_1$ jest dodatni, gdyż siła $-\bar{R}_1$ stara się obrócić krążek w kierunku przyjętym poprzednio za dodatni dla kąta φ.

Oznaczając więc przez I moment bezwładności krążka względem jego osi, otrzymamy na mocy (I), str. 375,

$$I\varepsilon = (R_1 - R_2)r. \tag{7}$$

---

[1]) por. str. 197, przykład 4.

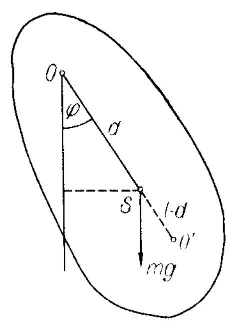
Z równań (5)-(7) możemy wyznaczyć ε, p, R_1 i R_2. Z równań (6) dostajemy $R_1-R_2=(m_1-m_2)g-(m_1+m_2)p$. Wstawiając w (7), otrzymamy $I\varepsilon=(m_1-m_2)rg-(m_1+m_2)rp$, skąd na mocy (5)

$$\varepsilon=\frac{(m_1-m_2)rg}{I+(m_1+m_2)r^2}. \tag{8}$$

Widzimy więc, że $\varepsilon=\text{const}$, zatem wobec (5) $p=\text{const}$. Punkty m_1 i m_2 będą się tedy poruszać ruchem jednostajnie przyśpieszonym. Przyśpieszenie p otrzymamy z (8) i (5). Reakcje R_1 i R_2 obliczyć można z równań (6).

Wahadło fizyczne. *Wahadłem fizycznym* nazywamy ciało sztywne, obracające się około osi poziomej pod wpływem siły ciężkości.

Poprowadźmy przez środek S masy wahadła płaszczyznę pionową, prostopadłą do osi i przecinającą oś w punkcie O. Niech φ oznacza kąt między OS a pionem; zwrot dodatni obrotu obieramy przytem od ręki lewej ku prawej. Oznaczmy wreszcie przez M moment siły ciężkości, przez I moment bezwładności wahadła względem osi obrotu i niech $d=OS$.



Przyśpieszenie kątowe równa się $\varepsilon=\ddot{\varphi}$, zaś moment siły ciężkości

$$M=-mgd\sin\varphi$$

(gdzie m oznacza masę ciała), skąd na mocy (2), str. 375, $I\ddot{\varphi}=-mgd\sin\varphi$ czyli

$$\ddot{\varphi}=-\frac{mgd}{I}\sin\varphi. \tag{9}$$

Porównując równanie (9) z równaniem wahadła matematycznego ((1), str. 132): $\ddot{\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi$, widzimy, że jeżeli długość l wahadła matematycznego spełnia warunek

$$-mgd/I=-g/l, \tag{10}$$

to ruch wahadła fizycznego jest taki jak wahadła matematycznego. Z (10) otrzymujemy

$$l=I/md. \tag{11}$$

A więc: *ruch wahadła fizycznego jest taki jak ruch wahadła matematycznego o długości $l = I/md$*, gdzie I oznacza moment bezwładności względem osi obrotu, m masę wahadła, a d odległość środka masy od osi obrotu.

Oznaczając przez K ramię bezwładności względem osi obrotu, mamy $I = mK^2$, skąd na mocy (11)

$$l = K^2/d. \tag{12}$$

Długość l nazywamy *długością zredukowaną* wahadła fizycznego względem osi obrotu.

Niechaj I_0 oznacza moment, zaś K_0 ramię bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do osi obrotu. Wówczas (str. 161) $I = I_0 + md^2$, skąd $mK^2 = mK_0^2 + md^2$ czyli $K^2 = K_0^2 + d^2$, a więc na mocy (12)

$$l = \frac{K_0^2}{d} + d. \tag{13}$$

Weźmy pod uwagę na prostej OS punkt O' w odległości l od O. Ponieważ $l > d$ na mocy (13), więc O' wypadnie poza punktem S. Obliczmy długość zredukowaną l' względem osi obrotu, przechodzącej przez O' i równoległej do osi l, przechodzącej przez O.

Z uwagi że $O'S = l - d$ mamy na mocy (13)

$$l' = \frac{K_0^2}{l - d} + l - d. \tag{14}$$

Ponieważ wobec (13) jest $l - d = K_0^2/d$, więc po podstawieniu dostaniemy z (14)

$$l' = d + \frac{K_0^2}{d}.$$

Porównując z (13), widzimy, że

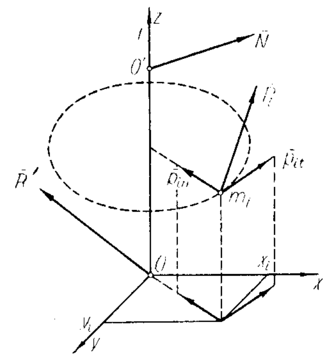
$$l' = l.$$

Długości zredukowane względem osi przechodzących przez O i przez O' są zatem równe.

Jeżeli więc zawiesimy ciało na osi przechodzącej przez O' i równoległej do osi przechodzącej przez O, to czas wahania w obu przypadkach będzie jednakowy (przy tym samym początkowym kącie wychylenia).

Punkt O' nazywamy *środkiem wahań* względem punktu O.

Wyznaczanie reakcji na oś obrotu. Załóżmy, że oś obrotu l jest unieruchomiona przy pomocy reakcyj (bez tarcia), zaczepionych na osi l. Przyjmując za środek redukcji dowolny punkt O na osi l, możemy reakcje zastąpić jedną siłą $\bar{R}$ o początku O, i parą sił o momencie $\bar{H}$. Na ogół $\bar{R}$ i $\bar{H}$ zmieniają się podczas ruchu. Do obliczenia $\bar{R}$ i $\bar{H}$ użyjemy zasady d'Alemberta.



Obierzmy O za początek układu współrzędnych, przyjmując oś l za oś z. Podzielmy ciało na drobne części i zastąpmy każdą z nich punktem materialnym o równej masie. Otrzymamy w ten sposób układ punktów materialnych $m_1, m_2, \ldots$ o współrzędnych x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... Przyśpieszenia punktów układu oznaczymy przez $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots$, a siły działające na te punkty przez $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$

Siły bezwładności $-m_i\bar{p}_i$ równoważą się z reakcjami i z siłami $\bar{P}_i$, więc suma i moment ogólny (względem O) są równe zeru. Zatem:

$$\sum \bar{P}_i + \bar{R} + \sum(-m_i \bar{p}_i) = 0, \tag{15}$$

$$\sum \mathrm{Mom}_O \bar{P}_i + \bar{H} + \sum \mathrm{Mom}_O(-m_i \bar{p}_i) = 0. \tag{16}$$

Niech w chwili t ciało ma prędkość kątową ω i przyśpieszenie kątowe ε. Weźmy pod uwagę dowolny punkt $m_i(x_i, y_i, z_i)$. Przyśpieszenie p_i tego punktu rozłóżmy na przyśpieszenie styczne p_{i_t} i normalne p_{i_n} (str. 40). Mamy oczywiście $\bar{p}_i = \bar{p}_{i_t} + \bar{p}_{i_n}$. Przyśpieszenia składowe wyrażają się wzorami $p_{i_t} = r_i\varepsilon$ i $p_{i_n} = r_i\omega^2$ (str. 45), gdzie r_i oznacza odległość punktu od osi obrotu. Zatem:

$$p_{i_{t_x}} = y_i\varepsilon, \qquad p_{i_{t_y}} = -x_i\varepsilon, \qquad p_{i_{t_z}} = 0; \tag{17}$$

$$p_{i_{n_x}} = -x_i\omega^2, \qquad p_{i_{n_y}} = -y_i\omega^2, \qquad p_{i_{n_z}} = 0. \tag{18}$$

Oznaczając przez m masę ciała, przez x_0, y_0, z_0 współrzędne, a przez p_0 przyśpieszenie środka S jego masy, otrzymamy ze wzoru (III), str. 199,

$$\sum m_i \bar{p}_i = m\bar{p}_0. \tag{19}$$

Równanie (15) przyjmie więc postać

$$\sum \bar{P}_i + \bar{R} - m\bar{p}_0 = 0. \tag{20}$$

Dla przyśpieszenia stycznego $\bar{p}_{0_t}$ i normalnego $\bar{p}_{0_n}$ środka S masy, mamy $\bar{p}_0 = \bar{p}_{0_t} + \bar{p}_{0_n}$. Na mocy więc (17) i (18) otrzymamy (kładąc $i=0$):

$$(21) \qquad p_{0_x} = y_0\varepsilon - x_0\omega^2, \qquad p_{0_y} = -x_0\varepsilon - y_0\omega^2, \qquad p_{0_z} = 0.$$

Przejdźmy teraz do obliczenia momentów sił bezwładności. Siła bezwładności jest

$$(22) \qquad -m_i\bar{p}_i = -m_i\bar{p}_{i_t} - m_i\bar{p}_{i_n}.$$

Oznaczmy przez $\bar{B}$ moment sił bezwładności względem O, przez $\bar{B}_t$ moment sił stycznych bezwładności (t. j. sił $-m_i\bar{p}_{i_t}$), a przez $\bar{B}_n$ moment sił normalnych bezwładności (t. j. sił $-m_i\bar{p}_{i_n}$). Na mocy (22) jest

$$(23) \qquad \bar{B} = \bar{B}_t + \bar{B}_n.$$

Rzut $\bar{B}_t$ na oś x wynosi (por. (2), str. 236)

$$(24) \qquad B_{t_x} = \sum(-m_i p_{i_{t_y}} z_i + m_i p_{i_{t_z}} y_i),$$

skąd na mocy (17)

$$(25) \qquad B_{t_x} = \varepsilon\sum m_i x_i z_i \text{ i podobnie } B_{t_y} = \varepsilon\sum m_i y_i z_i, \quad B_{t_z} = -\varepsilon\sum m_i(x_i^2 + y_i^2).$$

Postępując w ten sam sposób, otrzymamy:

$$(26) \qquad B_{n_x} = \omega^2\sum m_i y_i z_i, \qquad B_{n_y} = \omega^2\sum m_i x_i z_i, \qquad B_{n_z} = 0.$$

Przy dzieleniu ciała na coraz drobniejsze części sumy we wzorach (24) dążą do momentów zboczeń D_y i D_x, oraz momentu bezwładności I_z względem osi z (str. 161). W granicy dostaniemy więc z (25) i (26):

$$(27) \qquad B_{t_x} = \varepsilon D_y, \qquad B_{t_y} = \varepsilon D_x, \qquad B_{t_z} = -\varepsilon I_z;$$

$$(28) \qquad B_{n_x} = \omega^2 D_x, \qquad B_{n_y} = -\omega^2 D_y, \qquad B_{n_z} = 0,$$

skąd na mocy (23):

$$(29) \qquad B_x = \varepsilon D_y + \omega^2 D_x, \qquad B_y = \varepsilon D_x - \omega^2 D_y, \qquad B_z = -\varepsilon I_z.$$

Tworząc rzuty na osie układu, dostaniemy z równań (20) i (21):

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{aligned} &\sum P_{i_x} + R_x - my_0\varepsilon + mx_0\omega^2 = 0, \\ &\sum P_{i_y} + R_y + mx_0\varepsilon + my_0\omega^2 = 0, \\ &\sum P_{i_z} + R_z = 0. \end{aligned}$$

Siły reakcyjne zaczepione są na osi l, zatem $H_z = 0$. Oznaczając przez $\bar{M}$ moment sił $\bar{P}_i$ względem O, otrzymamy więc na mocy (16) i (29) dla rzutów na osie układu:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} &M_x + H_x + \varepsilon D_y + \omega^2 D_x = 0, \\ &M_y + H_y + \varepsilon D_x - \omega^2 D_y = 0, \\ &M_z - \varepsilon I_z = 0. \end{aligned}$$

Ostatnie z równań (III) wyprowadziliśmy poprzednio z zasady krętu (str. 375, wzór (I)). Z równań (II) i (III) możemy obliczyć $\bar{R}$ i $\bar{H}$.

Założmy teraz, że oś jest unieruchomiona w dwóch punktach O i O'. Oznaczmy reakcje w tych punktach przez $\bar{R}'$ i $\bar{N}$, połóżmy $d = OO'$ i nadajmy osi z kierunek OO'. Otrzymamy:

$$\text{(30)} \qquad R_x = R'_x + N_x, \qquad R_y = R'_y + N_y, \qquad R_z = R'_z + N_z;$$

$$\text{(31)} \qquad H_x = N_y d, \qquad H_y = -N_x d, \qquad H_z = 0.$$

Jeżeli wyznaczymy $\bar{R}$ i $\bar{H}$ z (II) i (III), to możemy obliczyć z (30) i (31) tylko składowe N_x, N_y i R'_x, R'_y oraz sumę $N_z + R'_z$.

Założmy, że punkt O' jest w t. zw. łożysku szyjnym, w którym nie ma tarcia (rys. 1, str. 281). Wówczas $\bar{N}$ jest prostopadłe do osi obrotu; zatem $N_z = 0$.

Jeżeli więc punkt O' jest w łożysku szyjnym bez tarcia, reakcje dadzą się wyznaczyć.

Oś obrotu osią środkową bezwładności. Przy założeniu, że środek ciężkości leży na osi obrotu i że oś obrotu jest jedną z osi środkowych bezwładności, mamy (str. 167):

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad D_x = 0, \qquad D_y = 0.$$

Równania (II) i (III) przyjmą więc postać:

$$\text{(32)} \qquad \sum P_{i_x} + R_x = 0, \qquad \sum P_{i_y} + R_y = 0, \qquad \sum P_{i_z} + R_z = 0;$$

$$\text{(33)} \qquad M_x + H_x = 0, \qquad M_y + H_y = 0, \qquad M_z - \varepsilon I_z = 0.$$

Widzimy stąd, że przy tym założeniu reakcje nie zależą od prędkości kątowej ani od przyśpieszenia kątowego, są więc takie, jak gdyby ciało było w spoczynku.

Jeżeli siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ są równe zeru, to z równań (32) i (33) otrzymujemy $\bar{R} = 0$, $\bar{H} = 0$ i $\varepsilon = 0$, więc $\omega = \text{const}$. Ponieważ reakcje są równoważne zeru, więc możemy przyjąć, że oś l nie jest unieruchomiona, czyli że oś obrotu jest swobodna.

Na odwrót, jeżeli założymy, że na ciało nie działają żadne siły, a więc że $\bar{P}_i = 0$, $\bar{R} = 0$ i $\bar{H} = 0$, to równania (II) i (III) przyjmą postać:

$$(34)\qquad \begin{array}{lll} -y_0\varepsilon + x_0\omega^2 = 0, & x_0\varepsilon + y_0\omega^2 = 0, & \\ \varepsilon D_y + \omega^2 D_x = 0, & \varepsilon D_x - \omega^2 D_y = 0, & \varepsilon I_z = 0. \end{array}$$

Na mocy ostatniego z równań (34) jest $\varepsilon = 0$, zatem $\omega = \text{const.}$ Jeżeli $\omega \neq 0$ (t.zn. gdy ciało nie jest w spoczynku), otrzymamy z (34) $x_0 = 0, y_0 = 0$ oraz $D_x = 0$, $D_y = 0$. Oś z (t.j. oś obrotu) jest tedy osią środkową bezwładności.

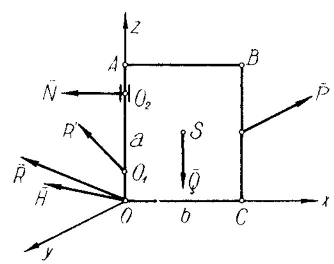
Wyprowadziliśmy więc następującą własność osi środkowych bezwładności:

Jeżeli ciało sztywne swobodne bez działania sił obraca się około stałej osi, to oś ta jest jedną z osi środkowych bezwładności.

Przykład 2. Drzwi ciężkie w kształcie prostokąta $OABC$ (gdzie $\overline{OA}$ i $\overline{CB}$ mają zwrot pionowy w górę) mogą się obracać około osi pionowej OA, unieruchomionej w punktach O_1 i O_2 boku OA, przyczem $OO_1 = O_2A = d$. W chwili $t = 0$ drzwi są w spoczynku i zaczyna działać siła $\bar{P}$ o stałej wartości bezwzględnej P, prostopadła do drzwi i zaczepiona stale w środku D boku BC. Wyznaczyć reakcje w punktach O_1 i O_2 w chwili t.

Oznaczmy przez m masę drzwi, przez I moment bezwładności względem osi OA. Niech $OA = a$ i $OC = b$. Przyjmijmy, że siła $\bar{P}$ obraca drzwi od ręki prawej ku lewej względem osi obrotu, skierowanej w górę.

Moment siły $\bar{P}$ względem osi obrotu jest stały i równa się bP. Zatem $I\varepsilon = bP$ czyli $\varepsilon = bP/I$. Jeżeli drzwi są jednorodne, to na mocy (8), str. 184, jest $I = \frac{1}{3}mb^2$. A więc



$$(35)\qquad \varepsilon = 3P/mb.$$

Przyśpieszenie kątowe $\varepsilon = \text{const.}$, zatem

$$(36)\qquad \omega = \varepsilon t = 3Pt/mb.$$

Drzwi będą się więc obracać ruchem jednostajnie przyśpieszonym.

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem reakcji. Przyjmijmy w chwili t punkt O za początek układu współrzędnych, nadając osiom z i x kierunki OA i OC. Oznaczmy przez $\bar{R}'$ reakcję w O_1, przez $\bar{N}$

reakcję w O_2, wreszcie przez $\bar{R}$ sumę, a przez $\bar{H}$ moment reakcji względem O. Zakładając, że w O_2 jest łożysko szyjne (str. 281), otrzymamy:

$$(37) \qquad R_x = R'_x + N_x, \qquad R_y = R'_y + N_y, \qquad R_z = R'_z;$$

$$(38) \quad H_x = R'_y d + N_y(a-d), \qquad H_y = -R'_x d - N_x(a-d), \qquad H_z = 0.$$

Z równań (II), str. 380, i (III), str. 381, otrzymamy $\bar{R}$ i $\bar{H}$, a następnie obliczymy $\bar{R}'$ i $\bar{N}$ z (37) i (38).

Siłami działającymi są ciężar $\bar{Q}$ i siła $\bar{P}$. Współrzędne środka S masy drzwi są: $x_0 = b/2$, $y_0 = 0$, $z_0 = a/2$, zaś początku siły $\bar{P}$ $x = b$, $y = 0$, $z = a/2$. Ponieważ drzwi leżą w płaszczyźnie zx, więc $D_x = 0$. Moment zboczenia D_y wynosi (str. 178)

$$D_y = \int\limits_0^b \int\limits_0^a \varrho xz \, dx \, dz = \int\limits_0^b \frac{1}{2} \varrho a^2 x \, dx = \frac{1}{4} a^2 b^2 \varrho,$$

gdzie ϱ oznacza gęstość. Ponieważ $ab\varrho = m$, więc $D_y = \frac{1}{4} mab$. Z równań (II), str. 380, i (III), str. 381, otrzymamy:

$$(39) \qquad R_x + \tfrac{1}{2} mb\omega^2 = 0, \qquad -P + R_y + \tfrac{1}{2} mb\varepsilon = 0, \qquad -mg + R_z = 0;$$

$$(40) \qquad -\tfrac{1}{2} aP + H_x + \tfrac{1}{4} mab\varepsilon = 0, \qquad -\tfrac{1}{2} mbg + H_y - \tfrac{1}{4} mab\omega^2 = 0.$$

Z równań (39) i (40) obliczamy $\bar{R}$ i $\bar{H}$ przy pomocy (35) i (36), a następnie wyznaczamy reakcje $\bar{R}'$ i $\bar{N}$ z równań (37) i (38).

Przykład 3. Pręt ciężki OA zawieszony jest na osi poziomej i może się tylko obracać w płaszczyźnie pionowej dokoła swego końca O. Pręt puszczono wolno z położenia poziomego. Jaka jest reakcja w O, gdy pręt tworzy z pionem kąt φ?

Oznaczmy przez $\bar{R}$ reakcję w O, przez $\bar{Q}$ ciężar pręta, przez m masę ciała, a przez $\bar{p}_0$ przyśpieszenie środka S masy pręta.

Z twierdzenia o ruchu środka masy wynika, że

$$(41) \qquad m\bar{p}_0 = \bar{R} + \bar{Q}.$$

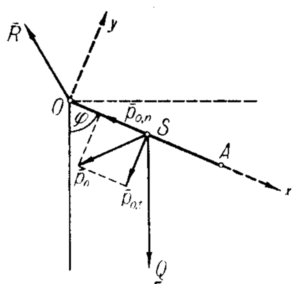
Z równania tego można obliczyć $\bar{R}$, jeżeli znane jest $\bar{p}_0$. Połóżmy $l = OS$ i oznaczmy przez ω i ε prędkość i przyśpieszenie kątowe pręta; wówczas przyśpieszenia: styczne p_{0_t} i normalne p_{0_n} wyniosą:

$$p_{0_t} = l\varepsilon \quad \text{i} \quad p_{0_n} = l\omega^2.$$

Przyśpieszenie kątowe otrzymamy z równania $I\varepsilon = M$. Ponieważ moment siły ciężkości względem O równa się $mgl \sin\varphi$, więc

$$\varepsilon = mgl \sin\varphi / I, \tag{42}$$

gdzie I oznacza moment bezwładności pręta względem O.



Prędkość kątową ω obliczymy, opierając się na zasadzie równowartości pracy i energii kinetycznej (str. 366). Przyrost energii kinetycznej pręta równa się pracy siły ciężkości. Energia kinetyczna pręta jest $E = \frac{1}{2}I\omega^2$, a praca ciężaru $L = mgl\cos\varphi$, bo poziom środka masy obniżył się o $h = l\cos\varphi$. Na początku energia kinetyczna równa była zeru. Więc $\frac{1}{2}I\omega^2 = mgl\cos\varphi$ czyli

$$\omega^2 = 2mgl\cos\varphi / I. \tag{43}$$

Przyjmijmy kierunek OS za kierunek dodatni osi x układu współrzędnych (x, y). Tworząc rzuty na osie x i y, otrzymamy z równania (41):

$$-ml\omega^2 = mg\cos\varphi + R_x, \qquad -ml\varepsilon = -mg\sin\varphi + R_y.$$

Z (42) i (43) dostajemy zatem:

$$R_x = -mg\cos\varphi[2ml^2/I + 1], \qquad R_y = mg\sin\varphi[1 - ml^2/I].$$

Jeżeli pręt jest jednorodny, to długość jego równa się $a = 2l$, zaś moment bezwładności $I = \frac{4}{3}ml^2$ (str. 183). Zatem:

$$R_x = -\frac{5}{2}mg\cos\varphi, \qquad R_y = \frac{1}{4}mg\sin\varphi,$$

skąd

$$|\bar{R}| = \frac{1}{4}mg\sqrt{1 + 99\cos^2\varphi}.$$

Maksymalna wartość $|\bar{R}|$ wypada więc dla $\varphi = 0$ i wynosi

$$|\bar{R}| = \frac{5mg}{2}.$$

Środek uderzeń. Przyjmijmy, że oś obrotu z jest osią główną bezwładności w punkcie O i że w pewnej chwili t_0 środek masy leży w płaszczyźnie yz (przyczem $y_0>0$). Zatem:

$$x_0=0, \quad y_0>0, \qquad D_x=0, \quad D_y=0. \tag{44}$$

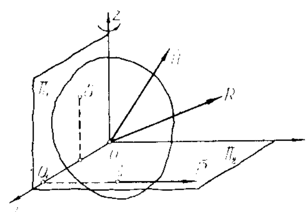
Równania (II), str. 380 i (III), str. 381, przyjmują wówczas postać:

$$\sum P_{i_x}+R_x-my_0\varepsilon=0, \quad \sum P_{i_y}+R_y+my_0\omega^2=0, \quad \sum P_{i_z}+R_z=0, \tag{45}$$

$$M_x+H_x=0, \quad M_y+H_y=0, \quad M_z-\varepsilon I_z=0. \tag{46}$$

Załóżmy, że w chwili t_0 zaczęła nagle działać siła $\bar{P}$, zaczepiona w punkcie A o współrzędnych x, y, z. Wskutek działania siły $\bar{P}$ reakcja $\bar{R}$ i moment $\bar{H}$ zmieniły się na $\bar{R}+\bar{R}'$ i $\bar{H}+\bar{H}'$; przyśpieszenie ε przyjęło wartość $\varepsilon+\varepsilon'$, natomiast prędkość kątowa, równa ω w chwili t_0, nie uległa nagłej zmianie. Od chwili działania siły $\bar{P}$ równania (II) i (III) przyjmą (z uwagi na (44)) postać:

$$\begin{aligned} &P_x+\sum P_{i_x}+R_x+R'_x-my_0(\varepsilon+\varepsilon')=0,\\ &P_y+\sum P_{i_y}+R_y+R'_y+my_0\omega^2=0,\\ &P_z+\sum P_{i_z}+R_z+R'_z=0,\end{aligned} \tag{47}$$



$$\begin{aligned} &M'_x+M_x+H_x+H'_x=0,\\ &M'_y+M_y+H_y+H'_y=0,\\ &M'_z+M_z-(\varepsilon+\varepsilon')I_z=0,\end{aligned} \tag{48}$$

gdzie $\bar{M}'$ oznacza moment siły $\bar{P}$ względem O. Porównując równania (45) i (46) z (47) i (48), dostaniemy:

$$\begin{aligned} &P_x+R'_x-my_0\varepsilon'=0, \qquad P_y+R'_y=0, \qquad P_z+R'_z=0,\\ &M'_x+H'_x=0, \qquad M'_y+H_y=0, \qquad M'_z-\varepsilon' I_z=0.\end{aligned} \tag{49}$$

Z równań (49) możemy wyznaczyć $\bar{R}'$ i $\bar{H}'$.

Załóżmy, że $\bar{P}$ ma kierunek osi x i leży w płaszczyźnie xy. Wówczas:

$$z=0, \quad P_y=0, \quad P_z=0, \quad M'_x=0, \quad M'_y=0, \quad M'_z=P_x y. \tag{50}$$

Z (49) otrzymujemy:

$$\bar{H}=0, \tag{51}$$

$$\varepsilon'=P_x y/I_z. \tag{52}$$

Z (49), (50) i (52) dostajemy:

$$(53)\qquad R'_x = P_x(my y_0/I_z - 1), \qquad R'_y = 0, \qquad R'_z = 0.$$

Weźmy pod uwagę na osi y punkt O_1 o rzędnej l, określonej wzorem

$$(54)\qquad l = I_z/my_0.$$

Jeżeli kierunek siły $\bar{P}$ przechodzi przez O_1, to $y=l$, a zatem na mocy (53) jest $R'_x=0$, $R'_y=0$ i $R'_z=0$, skąd

$$(55)\qquad \bar{R}=0.$$

Punkt O_1 nazywamy *środkiem uderzeń*.

Środek uderzeń leży na krawędzi przecięcia płaszczyzny Π_1, przechodzącej przez oś obrotu i środek masy, z płaszczyzną Π_2, prostopadłą do osi obrotu w punkcie O. Środek uderzeń leży na Π_1 po tej stronie osi obrotu co środek masy. Odległość środka uderzeń od osi obrotu określona jest wzorem (54).

Gdy na ciało nagle zaczyna działać siła, której kierunek przechodzi przez środek uderzeń i jest prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez oś obrotu i środek masy, to reakcje utrzymujące oś obrotu nie zmieniają się nagle (oś nie doznaje wstrząsu).

Na mocy (53) i (54) mamy

$$(56)\qquad R'_x = P_x(y/l - 1).$$

Jeżeli więc $y>l$, to $\bar{R}'$ i $\bar{P}$ mają zwroty zgodne, jeżeli natomiast $y<l$, to $\bar{R}$ i $\bar{P}$ mają zwroty przeciwne.

Przyjmijmy, że w wahadle fizycznym pewna płaszczyzna Π_2, prostopadła do osi, przechodzi przez środek masy S i jest płaszczyzną środkową. Zatem oś obrotu jest osią główną bezwładności względem punktu O, w którym oś przebija płaszczyznę Π_2. Prosta OS jest przekrojem płaszczyzny Π_2 płaszczyzną Π_1, przechodzącą przez oś obrotu i środek masy. Na prostej OS leży zatem środek uderzeń w odległości l od O, określonej wzorem (54), gdzie oczywiście $y_0=OS$. Kładąc więc $OS=d$ i $I_z=I$, dostajemy $l=I/md$. Porównując ze wzorem (11), str. 377, widzimy, że środek uderzeń schodzi się ze środkiem wahań.

Załóżmy, że wahadło jest w spoczynku i że oś wahadła opiera się na dwóch prętach gładkich, poziomych. Płaszczyzna Π_1 (przechodząca przez oś i środek masy) jest tedy pionowa.

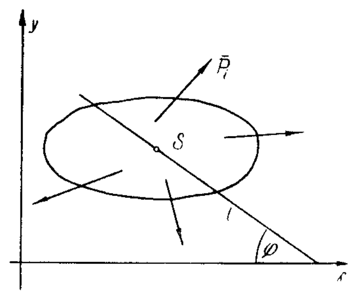
Jeżeli uderzymy wahadło w środku uderzeń w kierunku poziomym prostopadle do Π_1, to oś nie dozna wstrząśnień.

Jeżeli uderzymy je powyżej środka uderzeń, wówczas na mocy (56) potrzebna będzie do utrzymania osi w spoczynku reakcja, mająca zwrot przeciwny niż uderzenie. Ponieważ reakcja ta wystąpić nie może (gdyż pręty, na których oś się opiera, są gładkie i nie mogą przeto wywołać reakcji poziomej), więc oś posunie się w kierunku uderzenia.

Jeżeli zaś uderzymy wahadło poniżej środka uderzeń, to oś posunie się w kierunku przeciwnym do kierunku uderzenia.

§ 4. Ruch płaski. Ruch płaski figury płaskiej. Niech figura materialna porusza się w płaszczyźnie Π i niech siły działające $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ również leżą w tej płaszczyźnie. Oznaczmy przez $\bar{p}_0$ przyśpieszenie środka S masy figury, przez m masę, a przez $\bar{P}$ sumę sił. Wówczas w myśl (I), str. 365,

$$\text{(I)} \qquad m\bar{p}_0 = \bar{P}.$$



Oznaczmy dalej przez ω prędkość chwilową kątową, a przez I_0 moment bezwładności względem środka masy. Ruch chwilowy figury możemy uważać za złożenie ruchu postępowego z prędkością środka masy i ruchu obrotowego z prędkością ω około środka masy. Ponieważ kręt względem środka masy ruchu postępowego jest zerem (str. 203), więc kręt K ruchu chwilowego względem środka masy równy jest krętowi ruchu obrotowego. Na mocy wzoru (7), str. 205, mamy zatem

$$\text{(1)} \qquad K = I\omega,$$

skąd $\dot{K} = I\varepsilon$, gdzie $\varepsilon = \dot{\omega}$. Oznaczając przez M moment sił względem środka masy, otrzymamy z (II), str. 365,

$$\text{(II)} \qquad I\varepsilon = M.$$

Równania (I) i (II) określają ruch figury materialnej w płaszczyźnie.

Weźmy pod uwagę na figurze stałą prostą l i oznaczmy przez φ kąt między l a osią x, mierzony w kierunku wskazówek zegara. Położenie figury określają współrzędne x_0, y_0 środka masy i kąt φ.

Z równania (I), tworząc rzuty na osie układu, otrzymamy:

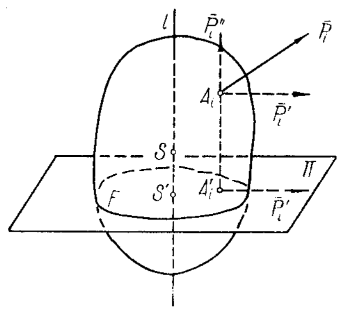
$$(\mathrm{I}') \qquad m\ddot{x}_0 = P_x, \quad m\ddot{y}_0 = P_y.$$

Ponieważ $\dot{\varphi} = \omega$ i $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, więc na mocy (II)

$$(\mathrm{II}') \qquad I\ddot{\varphi} = M.$$

Z równań (I′) i (II′) możemy wyznaczyć x_0, y_0 i φ.

Ruch płaski ciała. Niech ciało porusza się ruchem płaskim, t.zn. niech jego punkty poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej płaszczyzny stałej Π, zwanej płaszczyzną kierowniczą (str. 315). Siły $\{\overline{P}_i\}$, działające na ciało, rozłóżmy na składowe $\{\overline{P}'_i\}$ równoległe do Π i na składowe $\{\overline{P}''_i\}$ prostopadłe do Π. Ponieważ środek ciężkości S porusza się w płaszczyźnie równoległej do Π, więc jego przyśpieszenie $\overline{p}_0$ leży w płaszczyźnie Π. Na mocy zasady ruchu środka masy mamy



$$m\overline{p}_0 = \sum \overline{P}_i = \sum \overline{P}'_i + \sum \overline{P}''_i,$$

a więc po utworzeniu rzutów na płaszczyznę kierowniczą

$$(2) \qquad m\overline{p}_0 = \sum \overline{P}'_i.$$

Oznaczając przez l oś prostopadłą do Π i przechodzącą stale przez środek ciężkości, przez I moment bezwładności, a przez K kręt względem osi l, otrzymamy (str. 365) $\dot{K} = \sum \mathrm{Mom}_l \overline{P}_i$. Lecz moment sił $\overline{P}''_i$ względem l jest zerem, gdyż $\overline{P}''_i \| l$. Zatem

$$(3) \qquad \dot{K} = \sum \mathrm{Mom}_l \overline{P}'_i.$$

Oś obrotu chwilowego w ruchu płaskim jest prostopadła do płaszczyzny kierowniczej; oś l jest zatem osią obrotu chwilowego. Ponieważ przechodzi ona stale przez środek masy, więc ((7), str. 205) $K = I\omega$, skąd $\dot{K} = I\dot{\omega} = I\varepsilon$ i na mocy (3)

$$(4) \qquad I\varepsilon = \sum \mathrm{Mom}_l \overline{P}'_i.$$

Weźmy pod uwagę na płaszczyźnie Π dowolną figurę płaską F, związaną sztywnie z ciałem: może to być np. przekrój ciała płaszczyzną Π lub rzut ciała na tę płaszczyznę. Ruch figury F wyznacza oczywiście ruch ciała. Utwórzmy rzuty sił $\{\overline{P}_i\}$ i środka ciężkości S na płaszczyznę Π. Równania (2) i (4) określają ruch płaski figury F

przy założeniach, że:

1) masa figury F równa się masie całego ciała,

2) środkiem ciężkości figury F jest rzut środka masy ciała,

3) moment bezwładności figury F względem S' równa się momentowi bezwładności I ciała względem osi l.

Wynika stąd, że ruch płaski ciała będzie określony, jeżeli podamy rzuty sił na płaszczyznę kierowniczą, masę ciała, rzut jego środka ciężkości i moment bezwładności ciała względem prostej, przechodzącej przez środek masy prostopadle do płaszczyzny kierowniczej.

Przykład 1. Pręt ciężki AB zsuwa się w płaszczyźnie pionowej, opierając się końcami o płaszczyzny gładkie: poziomą i pionową (podłogę i ścianę). Na pręt działają więc siły: ciężar o początku w środku pręta i reakcje $\bar{N}, \bar{R}$, prostopadłe do ścian. Współrzędne N i R reakcyj względem osi x i y są nieujemne (jak na rysunku).

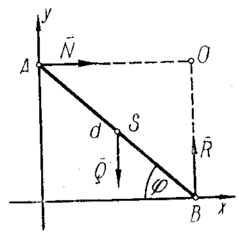
Oznaczmy przez x_0, y_0 współrzędne środka S masy ciała, przez φ kąt, jaki pręt tworzy z osiami układu, przez I_0 moment bezwładności względem środka masy, a przez $2d$ długość pręta.

Z równań (I') i (II'), str. 388, otrzymamy:

$$(5) \qquad m\ddot{x}_0 = N, \qquad m\ddot{y}_0 = -mg + R, \qquad I_0\ddot{\varphi} = d(N\sin\varphi - R\cos\varphi).$$

Do równań powyższych dochodzą jeszcze związki:

$$(5') \qquad x_0 = d\cos\varphi, \qquad y_0 = d\sin\varphi.$$



Z równań (5) i (5') możemy otrzymać równanie różniczkowe wyznaczające φ jako funkcję czasu t. Równanie to otrzymamy, stosując zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej.

Siły $\bar{R}$ i $\bar{N}$ nie wykonują pracy. Pracuje tylko siła ciężkości. Zauważmy, że prędkości punktów A i B mają kierunki osi y i x. Zatem środek O obrotu chwilowego jest punktem przecięcia prostych prostopadłych do osi x i y w punktach B i A (str. 328). Moment bezwładności względem O wynosi (por. (I), str. 161)

$$(6) \qquad I = I_0 + md^2,$$

a więc I ma wartość stałą. Energia kinetyczna E wyrazi się tedy wzorem $E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$.

Jeżeli w chwili początkowej było $\varphi=\varphi_0$, to praca siły ciężkości wynosi $L=mgd(\sin\varphi_0-\sin\varphi)$. Zatem, przy założeniu, że w chwili początkowej prędkość była $\dot\varphi=0$, otrzymamy

$$\tfrac{1}{2}I\dot\varphi^2=mgd(\sin\varphi_0-\sin\varphi). \tag{7}$$

Rozwiązanie równania (7) wymaga znajomości teorii funkcyj eliptycznych. Możemy jednak bez rozwiązania wyznaczyć reakcje $\bar N$ i $\bar R$, jeżeli znamy φ. Różniczkując w tym celu równanie (7), otrzymamy $I\dot\varphi\ddot\varphi=-mgd\dot\varphi\cos\varphi$, skąd

$$I\ddot\varphi=-mgd\cos\varphi. \tag{8}$$

Na mocy (5') będzie po zróżniczkowaniu:

$$\ddot x_0=-d\dot\varphi^2\cos\varphi-d\ddot\varphi\sin\varphi, \qquad \ddot y_0=-d\dot\varphi^2\sin\varphi+d\ddot\varphi\cos\varphi. \tag{9}$$

Z równań (5) otrzymujemy:

$$N=m\ddot x_0, \qquad R=m\ddot y_0+mg. \tag{10}$$

Z równań (7) i (8) możemy obliczyć $\dot\varphi$ i $\ddot\varphi$. Z równań (9) otrzymamy wtedy $\ddot x_0$ i $\ddot y_0$, skąd dostaniemy na mocy (10) reakcje $\bar R$ i $\bar N$.

Obliczmy wartość reakcji $N=|\bar N|$. Na mocy (7), (8) i (9) jest

$$\ddot x_0=-d\cos\varphi\,\frac{2mgd(\sin\varphi_0-\sin\varphi)}{I}+d\sin\varphi\,\frac{mgd\cos\varphi}{I},$$

więc na mocy (10)

$$N=m\ddot x_0=\frac{m^2gd^2\cos\varphi}{I}(3\sin\varphi-2\sin\varphi_0). \tag{11}$$

Ponieważ N musi być liczbą nieujemną, więc

$$3\sin\varphi-2\sin\varphi_0\geqq 0. \tag{12}$$

Punkt A będzie się zatem dopóty zsuwał po ścianie pionowej, póki kąt φ spełniać będzie równanie (12). Z chwilą, gdy kąt φ osiągnie wartość φ_1 spełniającą równanie

$$3\sin\varphi_1-2\sin\varphi_0=0, \tag{13}$$

punkt A przestanie zsuwać się po ścianie pionowej, ponieważ reakcja N musiałaby wówczas stać się ujemną, t. zn. ściana musiałaby przyciągać punkt A ku sobie. Pręt odpadnie więc w owej chwili od ściany pionowej.

Niech h_0 oznacza wysokość początkową punktu A, a h_1 wysokość tego punktu w chwili odpadnięcia pręta od ściany pionowej. Ponieważ $h_0=2d\sin\varphi_0$ i $h_1=2d\sin\varphi_1$, więc na mocy (13)

$$h_1=\tfrac{2}{3}h_0. \tag{14}$$

Punkt A odpadnie zatem na $\frac{2}{3}$ swej wysokości początkowej. Po odpadnięciu od ściany ruch pręta określony będzie równaniami (5) przy założeniu, że $N=0$ i $y_0=d\sin\varphi$.

Przykład 2. Walec obrotowy stacza się po płaszczyźnie pochyłej doskonale chropowatej; będzie się więc toczył. Ruch chwilowy walca będzie zatem obrotem około tworzącej, wzdłuż której walec styka się z płaszczyzną. Załóżmy, że tworząca ta jest pozioma.

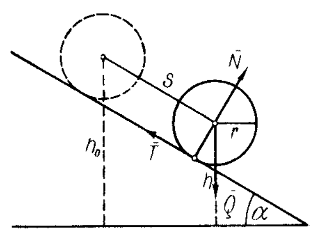
Tarcie nie wykonuje pracy, gdyż punkty zaczepienia tarcia (t.j. punkty styczności walca i płaszczyzny) mają prędkość zero (str. 214). Jedyną siłą wykonującą pracę jest ciężar walca.

Oznaczmy przez I moment bezwładności walca względem tworzącej, a przez ω prędkość kątową toczenia w chwili t. Energia kinetyczna wyniesie zatem

$$E=\tfrac{1}{2}I\omega^2. \tag{15}$$

Niech dalej m oznacza masę walca, h wysokość środka masy w chwili t, zaś h_0 w chwili t_0. Praca siły ciężkości w czasie od t_0 do t wyniesie więc

$$L=mg(h_0-h). \tag{16}$$



Przyjmując, że w chwili t_0 prędkość początkowa kątowa była ω_0, otrzymamy z (15) i (16) na mocy zasady równowartości pracy i energii kinetycznej

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2-\tfrac{1}{2}I\omega_0^2=mg(h_0-h), \tag{17}$$

skąd możemy wyznaczyć ω.

Wreszcie niech s oznacza drogę, jaką przebiegł środek masy od chwili początkowej t_0 do chwili t. Załóżmy, że środek masy leży na osi walca, i niech α będzie kątem nachylenia płaszczyzny pochyłej do poziomu. Wówczas

$$h_0-h=s\sin\alpha. \tag{18}$$

Ponieważ prędkość środka masy S w chwili t wynosi $v=\dot{s}=r\omega$ (gdzie r jest promieniem walca), zaś w chwili początkowej t_0 wynosiła $v_0=\dot{s}_0=r\omega_0$, więc na mocy (17) i (18) otrzymamy

$$I\dot{s}^2/2r^2-I\dot{s}_0^2/2r^2=mgs\sin\alpha, \tag{19}$$

skąd, różniczkując względem t, dostajemy $I\dot{s}\ddot{s}/r^2 = mg\dot{s}\sin\alpha$. Zatem

(20) $$p = \ddot{s} = mgr^2 \sin\alpha / I.$$

Środek masy będzie więc spadał ruchem jednostajnie przyśpieszonym.

Moment bezwładności walca pełnego (o stałej gęstości) względem tworzącej wynosi (str. 187, wzór (23)) $I = \frac{3}{2}mr^2$. Na mocy (20) jest przeto $p = \frac{2}{3}g\sin\alpha$. Środek masy będzie więc spadał z przyśpieszeniem mniejszym niż punkt swobodny, dla którego $p = g\sin\alpha$ (str. 124).

Moment bezwładności walca pustego (np. rury) względem osi wynosi mr^2, a względem tworzącej $I = 2mr^2$. Na mocy (6) jest tedy $p = \frac{1}{2}g\sin\alpha$. Walec pełny będzie więc spadał szybciej, niż pusty.

Jeżeli prędkość początkowa była $\omega_0 = 0$, to środek masy przebiegnie drogę s w czasie

(21) $$t = \sqrt{2s/p} = \sqrt{2sI/mgr^2\sin\alpha}.$$

Wzór (21) może służyć do doświadczalnego wyznaczania momentu bezwładności I.

Oznaczmy przez $\bar{T}$ sumę sił tarcia, przez $\bar{N}$ sumę reakcyj normalnych, przez $\bar{Q}$ ciężar, a przez $\bar{p}$ (jak powyżej) przyśpieszenie środka masy walca. Z twierdzenia o ruchu środka masy mamy $m\bar{p} = \bar{T} + \bar{N} + \bar{Q}$. Ponieważ $\bar{p}$, $\bar{N}$ i $\bar{Q}$ są prostopadłe do osi walca, więc i $\bar{T}$ jest prostopadłe do osi walca. Tworząc rzuty na równię i na normalną do równi (oraz kładąc $T = |\bar{T}|$ i $N = |\bar{N}|$), otrzymamy:

$$mp = -T + mg\sin\alpha, \qquad 0 = N - mg\cos\alpha,$$

skąd na mocy (20):

$$T = mg\sin\alpha(1 - mr^2/I), \qquad N = mg\cos\alpha.$$

Przykład 3. Koło porusza się w płaszczyźnie pionowej Π, pozostając stale stycznym do prostej poziomej l. W chwili początkowej $t = 0$ ruch chwilowy koła był obrotem około środka koła z prędkością kątową ω_0. Wyznaczyć ruch koła, uwzględniając tarcie.

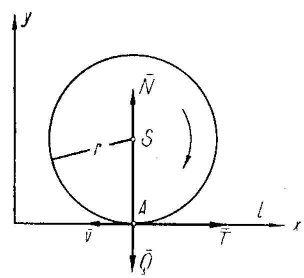
Przyjmijmy prostą l za oś x i nadajmy osi y zwrot pionowy ku górze. Załóżmy, że środek koła S jest zarazem środkiem masy. Oznaczmy przez r, m i I promień, masę i moment bezwładności koła względem S, przez x_0, y_0 współrzędne środka koła, przez

ω i ε prędkość i przyśpieszenie kątowe środka S, wreszcie przez T i N współrzędne (względem osi x i y) tarcia $\overline{T}$ i reakcji normalnej $\overline{N}$, zaczepionych w punkcie styczności A. Z równań (I) i (II), str. 387, dostaniemy:

$$(22) \qquad m\ddot{x}_0 = T, \quad m\ddot{y}_0 = N - mg, \quad I\varepsilon = -Tr.$$

Ponieważ jest stale $y_0 = r$, więc $\ddot{y}_0 = 0$, skąd na mocy (22)

$$(23) \qquad N = mg.$$



Niech v będzie współrzędną (względem osi x) prędkości $\overline{v}$ punktu A. Ponieważ ruch chwilowy koła w czasie t jest złożeniem ruchu postępowego środka masy o prędkości $\dot{x}_0$ oraz ruchu obrotowego około środka masy o prędkości kątowej ω, więc

$$(24) \qquad v = \dot{x}_0 - r\omega,$$

skąd przez zróżniczkowanie

$$(25) \qquad \dot{v} = \ddot{x}_0 - r\varepsilon.$$

Na mocy (22) mamy $\ddot{x}_0 = T/m$ i $\varepsilon = -Tr/I$, skąd przez podstawienie do równania (25)

$$(26) \qquad \dot{v} = (1/m + r^2/I)T.$$

Jeżeli $\overline{v} \neq 0$, wówczas $\overline{T}$ ma zwrot przeciwny niż $\overline{v}$ (str. 368), zatem $vT \leqslant 0$; jeżeli zaś $\overline{v} = 0$, to $vT = 0$. Mamy przeto zawsze $vT \leqslant 0$. Mnożąc więc obie strony równania (26) przez v, otrzymamy $v\dot{v} = (1/m + r^2/I)Tv$, zatem

$$(27) \qquad v\dot{v} \leqslant 0.$$

Lecz $2v\dot{v}$ jest pochodną v^2, na mocy więc (27) pochodna v^2 jest nie dodatnia, a zatem v^2 jest funkcją nie rosnącą. Jeżeli więc v osiągnie w pewnej chwili t_1 po raz pierwszy wartość $v = 0$, to od tej chwili będzie stale $v = 0$, t.zn. że od tej chwili koło będzie się toczyło po prostej l.

Rozpatrzmy najpierw ruch koła w czasie od $t = 0$ do $t = t_1$. W tym czasie jest $v \neq 0$, więc $T = \mu N$, gdzie μ oznacza współczynnik tarcia (str. 368). Przyjmując zwrot obrotu jak na rysunku, mamy $T > 0$, więc wedle (23) jest $T = \mu mg$, skąd przez podstawienie do (22)

$$(28) \qquad \ddot{x}_0 = \mu g, \quad \varepsilon = -\mu mrg/I.$$

Całkując równania (28), otrzymamy z uwagi na to, że dla $t=0$ jest z założenia $\dot{x}_0=0$ i $\omega=\omega_0$:

$$\dot{x}_0=\mu g t, \qquad \omega=\omega_0-\mu m g r t/I. \tag{29}$$

Na mocy (24) mamy

$$v=\mu g t(1+mr^2/I)-r\omega_0, \tag{30}$$

więc $v=0$ nastąpi w chwili

$$t_1=\frac{r\omega_0}{\mu g(1+mr^2/I)}. \tag{31}$$

Ponieważ, jak dowiedliśmy, od chwili t_1 będziemy mieli stale $v=0$, więc $\dot{v}=0$, a zatem dla $t \geqslant t_1$ będzie na mocy (26) stale $T=0$, czyli w myśl (22) $\ddot{x}_0=0$ i $\varepsilon=0$.

A więc dla $t \geqslant t_1$ koło toczyć się będzie z pewną stałą prędkością kątową ω_1 i środek masy poruszać się będzie ruchem jednostajnym z prędkością $v_0=r\omega_1$.

Ze wzorów (29) i (31) dostajemy

$$\omega_1=\omega_0/(1+mr^2/I). \tag{32}$$

Od chwili t_1 energia kinetyczna jest $E_1=\mathrm{const}$. Ponieważ E_1 równa się sumie energii kinetycznych ruchu postępowego o prędkości środka masy $v_0=r\omega_1$ oraz ruchu obrotowego, więc

$$E_1=\tfrac{1}{2}mr^2\omega_1^2+\tfrac{1}{2}I\omega_1^2=\tfrac{1}{2}I\omega_0^2/(1+mr^2/I). \tag{33}$$

W chwili początkowej $t=0$ jest $E_0=\frac{1}{2}I\omega_0^2$, zatem

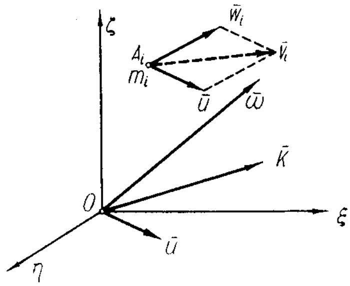
$$E_1=E_0/(1+mr^2/I). \tag{34}$$

§ 5. Kręt. Niech O będzie dowolnym punktem poruszającego się ciała. Ruch chwilowy ciała jest złożeniem ruchu chwilowego postępowego o prędkości $\bar{u}$ punktu O i ruchu obrotowego o prędkości kątowej $\bar{\omega}$ około osi przechodzącej przez O.

Podzielmy ciało na drobne części i zastąpmy każdą z nich punktem materialnym o tej samej masie. Otrzymamy układ punktów $A_1, A_2, \ldots$ o masach $m_1, m_2, \ldots$ Obierzmy w danej chwili t dowolny układ współrzędnych (ξ, η, ζ) o początku w O. Oznaczmy współrzędne punktów $A_1, A_2, \ldots$ przez ξ_1, η_1, ζ_1, $\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \ldots$

Prędkości punktów A_i możemy przedstawić w postaci

(1) $$\bar{v}_i = \bar{u} + \bar{w}_i,$$



gdzie $\bar{w}_i$ jest prędkością ruchu chwilowego obrotowego. Na mocy (V), str. 46, mamy

(2) $$w_{i\xi} = \eta_i \omega_\zeta - \zeta_i \omega_\eta, \quad w_{i\eta} = \zeta_i \omega_\xi - \xi_i \omega_\zeta, \quad w_{i\zeta} = \xi_i \omega_\eta - \eta_i \omega_\xi.$$

Niech $\bar{K}_i$ będzie momentem względem O pędu $m_i \bar{v}_i$ punktu A_i, czyli $\bar{K}_i = \mathrm{Mom}_O(m_i \bar{v}_i)$. Na mocy (II), str. 18, rzut K_i na oś ξ wynosi $K_{i\xi} = m_i(v_{i\eta}\zeta_i - v_{i\zeta}\eta_i)$, skąd na mocy (1) i (2)

$$K_{i\xi} = m_i[(u_\eta + \zeta_i \omega_\xi - \xi_i \omega_\zeta)\zeta_i - (u_\zeta + \xi_i \omega_\eta - \eta_i \omega_\xi)\eta_i],$$

czyli

$$K_{i\xi} = \omega_\xi m_i(\zeta_i^2 + \eta_i^2) - \omega_\eta m_i \xi_i \eta_i - \omega_\zeta m_i \xi_i \zeta_i + u_\eta m_i \zeta_i - u_\zeta m_i \eta_i.$$

Ponieważ kręt względem punktu O wynosi $\bar{K} = \sum \bar{K}_i$, więc

$$K_\xi = \omega_\xi \sum m_i(\zeta_i^2 + \eta_i^2) - \omega_\eta \sum m_i \xi_i \eta_i - \omega_\zeta \sum m_i \xi_i \zeta_i + u_\eta \sum m_i \zeta_i - u_\zeta \sum m_i \eta_i.$$

Przy podziale ciała na coraz drobniejsze części, sumy występujące w ostatnim wzorze będą dążyły odpowiednio do:

$$I_\xi, \quad D_\zeta, \quad D_\eta, \quad m\zeta_0, \quad m\eta_0,$$

gdzie m oznacza masę ciała, zaś ξ_0, η_0, ζ_0 współrzędne środka masy. Otrzymamy zatem (przeprowadzając podobny rachunek również dla rzutów K_η i K_ζ):

(I) $$\begin{aligned} K_\xi &= \omega_\xi I_\xi - \omega_\eta D_\zeta - \omega_\zeta D_\eta + m(\zeta_0 u_\eta - \eta_0 u_\zeta), \\ K_\eta &= \omega_\eta I_\eta - \omega_\zeta D_\xi - \omega_\xi D_\zeta + m(\xi_0 u_\zeta - \zeta_0 u_\xi), \\ K_\zeta &= \omega_\zeta I_\zeta - \omega_\xi D_\eta - \omega_\eta D_\xi + m(\eta_0 u_\xi - \xi_0 u_\eta). \end{aligned}$$

K r ę t w z g l ę d e m ś r o d k a m a s y c i a ł a l u b w z g l ę d e m j e g o p u n k t u n i e r u c h o m e g o. Jeżeli O jest środkiem masy, to $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$. Jeżeli zaś punkt O jest nieruchomy, to $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$, $u_\zeta = 0$. W obu przypadkach mamy na mocy (I):

(II) $$\begin{aligned} K_\xi &= \omega_\xi I_\xi - \omega_\eta D_\zeta - \omega_\zeta D_\eta, \\ K_\eta &= \omega_\eta I_\eta - \omega_\zeta D_\xi - \omega_\xi D_\zeta, \\ K_\zeta &= \omega_\zeta I_\zeta - \omega_\xi D_\eta - \omega_\eta D_\xi. \end{aligned}$$

W szczególności, gdy osie układu współrzędnych są osiami głównymi bezwładności w punkcie O, wówczas $D_\xi=0$, $D_\eta=0$, $D_\zeta=0$, a zatem:

$$\text{(III)} \qquad K_\xi=\omega_\xi I_\xi, \qquad K_\eta=\omega_\eta I_\eta, \qquad K_\zeta=\omega_\zeta I_\zeta.$$

Ze wzorów (III) wynika, że *znając prędkość chwilową kątową, możemy wyznaczyć kręt i na odwrót.*

Kierunki krętu i prędkości kątowej są na ogół różne. Iloczyn skalarowy $\overline{K}\cdot\overline{\omega}$ wynosi na mocy (III)

$$\overline{K}\cdot\overline{\omega}=K_\xi\omega_\xi+K_\eta\omega_\eta+K_\zeta\omega_\zeta=\omega_\xi^2 I_\xi+\omega_\eta^2 I_\eta+\omega_\zeta^2 I_\zeta,$$

zatem jeżeli $\overline{\omega}\neq 0$, to $\overline{K}\overline{\omega}>0$.

A więc: *kręt tworzy z wektorem prędkości kątowej kąt ostry.*

Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie. *Jeżeli kręt $\overline{K}$ lub wektor prędkości kątowej $\overline{\omega}$ ma kierunek jednej z osi głównych bezwładności, to kręt i prędkość kątowa mają kierunek jednakowy i na odwrót.*

Dowód. Przyjmijmy za oś ξ tę oś główną bezwładności, której kierunek jest kierunkiem krętu $\overline{K}$. Wówczas $K_\eta=0$ i $K_\zeta=0$, skąd na mocy (III) $\omega_\eta=0$ i $\omega_\zeta=0$. Wektor $\overline{\omega}$ ma więc wtedy kierunek osi ξ, t.j. krętu.

Podobnie przeprowadza się dowód, jeżeli $\overline{\omega}$ ma kierunek jednej z osi głównych bezwładności.

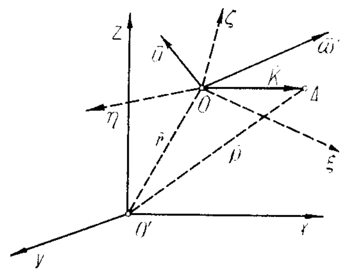
Na odwrót, jeżeli $\overline{K}$ i ω mają kierunek jednakowy, przyjmujemy kierunek ten za kierunek osi ξ. Wówczas $\omega_\eta=0$ i $\omega_\zeta=0$, oraz $K_\eta=0$ i $K_\zeta=0$, skąd na mocy (II) $K_\xi=I_\xi\omega_\xi$, $0=-\omega_\xi D_\zeta$ i $0=-\omega_\xi D_\eta$, a więc $D_\zeta=0$ i $D_\eta=0$. Oś ξ jest więc wtedy osią główną bezwładności, c. b. d. d.

Jeżeli punkt O jest punktem kulistym, t.zn. jeżeli $I_\xi=I_\eta=I_\zeta$, wówczas, oznaczając momenty bezwładności przez I, mamy na mocy (III) $K_\xi=I\omega_\xi$ $K_\eta=I\omega_\eta$, $K_\zeta=I\omega_\zeta$, skąd

$$\text{(3)} \qquad K=I\overline{\omega}.$$

A więc: *jeżeli środek masy (lub punkt nieruchomy ciała) jest punktem kulistym, to kręt ma stale kierunek i zwrot prędkości kątowej.*

Pochodna krętu. Niech $\bar{K}$ będzie krętem ciała względem dowolnego punktu O tegoż ciała i niech (x, y, z) będzie stałym układem współrzędnych o początku O', zaś (ξ, η, ζ) dowolnie poruszającym się układem współrzędnych o początku w O. Oznaczmy przez $\bar{u}$ prędkość punktu O, a przez $\bar{\omega}'$ prędkość chwilową kątową układu (ξ, η, ζ). Wykreślmy z punktu O wektor $\overline{OA} = \bar{K}$. Kładąc $\overline{O'O} = \bar{r}$ i $\overline{O'A} = \bar{\varrho}$, otrzymujemy $\bar{\varrho} = \bar{r} + \bar{K}$ czyli $\bar{K} = \bar{\varrho} - \bar{r}$. Tworząc pochodną, otrzymamy $\dot{\bar{K}} = \dot{\bar{\varrho}} - \dot{\bar{r}}$.



Lecz $\dot{\bar{r}} = \bar{u}$, zaś $\dot{\bar{\varrho}}$ równa się prędkości bezwzględnej $\bar{v}_b$ punktu A względem układu stałego $O'(x, y, z)$. Zatem

$$\dot{\bar{K}} = \bar{v}_b - \bar{u}. \tag{4}$$

Niech $\bar{v}_w$ będzie prędkością względną punktu A względem układu (ξ, η, ζ), a $\bar{v}_u$ prędkością unoszenia. Zatem (str. 58)

$$\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{v}_u, \tag{5}$$

skąd na mocy (4)

$$\dot{\bar{K}} = \bar{v}_w + (\bar{v}_u - \bar{u}). \tag{6}$$

Punkt A ma w układzie (ξ, η, ζ) współrzędne K_ξ, K_η, K_ζ. Zatem

$$v_{w_\xi} = \dot{K}_\xi, \qquad v_{w_\eta} = \dot{K}_\eta, \qquad v_{w_\zeta} = \dot{K}_\zeta. \tag{7}$$

Ruch chwilowy układu (ξ, η, ζ) jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości $\bar{u}$ punktu O i ruchu obrotowego o chwilowej prędkości kątowej $\bar{\omega}'$ około osi przechodzącej przez O. Zatem (str. 63)

$$\bar{v}_u = \bar{u} + \overline{OA} \times \bar{\omega}' = \bar{u} + \bar{K} \times \bar{\omega}'. \tag{8}$$

Przyjmując

$$\bar{w} = \bar{K} \times \bar{\omega}' \tag{9}$$

otrzymamy więc na mocy (8) i (6)

$$\dot{\bar{K}} = \bar{v}_w + \bar{w}. \tag{10}$$

Z (9) dostajemy:

$$w_\xi = K_\eta \omega'_\zeta - K_\zeta \omega'_\eta, \quad w_\eta = K_\zeta \omega'_\xi - K_\xi \omega_\zeta, \quad w_\zeta = K_\xi \omega'_\eta - K_\eta \omega'_\xi. \tag{11}$$

Oznaczmy rzuty wektora $\dot{\bar{K}}$ na osie ξ, η i ζ przez $(\dot{\bar{K}})_\xi, (\dot{\bar{K}})_\eta$ i $(\dot{\bar{K}})_\zeta$. Z (10) na mocy (7) i (11) otrzymamy:

$$\text{(IV)} \qquad (\dot{\bar{K}})_\xi = \dot{K}_\xi + K_\eta \omega'_\zeta - K_\zeta \omega'_\eta, \qquad (\dot{\bar{K}})_\eta = \dot{K}_\eta + K_\zeta \omega'_\xi - K_\xi \omega'_\zeta,$$
$$(\dot{\bar{K}})_\zeta = \dot{K}_\zeta + K_\xi \omega'_\eta - K_\eta \omega'_\xi.$$

Wzory (IV) wyznaczają rzuty pochodnej krętu $\dot{\bar{K}}$ względem O na osie ξ, η i ζ układu ruchomego przy pomocy rzutów K_ξ, K_η, K_ζ krętu $\bar{K}$ na te osie, pochodnych $\dot{K}_\xi$, $\dot{K}_\eta$, $\dot{K}_\zeta$ rzutów K_ξ, K_η, K_ζ oraz rzutów ω'_ξ, ω'_η, ω'_ζ prędkości chwilowej układu (ξ, η, ζ) — a nie ciała! — na osie tegoż układu.

Należy zwrócić uwagę na różnicę, jaka zachodzi między symbolami $(\dot{\bar{K}})_\xi$ a $\dot{K}_\xi$. Wartość pierwszego symbolu otrzymujemy, tworząc najpierw pochodną $\dot{\bar{K}}$, a następnie rzut na oś ξ; wartość zaś drugiego symbolu otrzymujemy, postępując odwrotnie, a więc najpierw rzutując wektor $\bar{K}$ na oś ξ, a następnie tworząc pochodną rzutu. Jak wskazuje wzór (IV), na ogół $(\dot{\bar{K}})_\xi \neq \dot{K}_\xi$.

Przyjmijmy, że O jest punktem nieruchomym lub środkiem masy i że osie ξ, η, ζ, mają stale kierunki osi głównych bezwładności ciała w punkcie O. W tym przypadku prędkość chwilowa kątowa ciała $\bar{\omega}$, równa się prędkości chwilowej kątowej układu współrzędnych (ξ, η, ζ):

$$\text{(12)} \qquad \bar{\omega} = \bar{\omega}'.$$

Ponieważ na mocy (III), str. 396, jest

$$\text{(13)} \qquad K_\xi = I_\xi \omega_\xi, \qquad K_\eta = I_\eta \omega_\eta, \qquad K_\zeta = I_\zeta \omega_\zeta,$$

więc z uwagi na to, że I_ξ, I_η, I_ζ są stałe, dostajemy:

$$\text{(14)} \qquad \dot{K}_\xi = I_\xi \dot{\omega}_\xi, \qquad \dot{K}_\eta = I_\eta \dot{\omega}_\eta, \qquad \dot{K}_\zeta = I_\zeta \dot{\omega}_\zeta.$$

Podstawiając w (IV) wartości z (12)-(14), otrzymamy:

$$\text{(V)} \qquad (\dot{\bar{K}})_\xi = I_\xi \dot{\omega}_\xi + (I_\eta - I_\zeta)\omega_\eta \omega_\zeta, \qquad (\dot{\bar{K}})_\eta = I_\eta \dot{\omega}_\eta + (I_\zeta - I_\xi)\omega_\zeta \omega_\xi,$$
$$(\dot{\bar{K}})_\zeta = I_\zeta \dot{\omega}_\zeta + (I_\xi - I_\eta)\omega_\xi \omega_\eta.$$

Wzory (V) odnoszą się do układu współrzędnych, którego początek jest środkiem masy lub punktem nieruchomym ciała i którego osie mają stale kierunki osi głównych bezwładności.

§ 6. Równania Eulera. Zajmiemy się teraz ruchem, jaki pod działaniem sił wykonywa ciało, mające unieruchomiony jeden punkt O, a więc mogące się tylko obracać około tego punktu. Do tego bowiem przypadku można sprowadzić badanie ruchu ciała sztywnego pod wpływem sił w przypadku najogólniejszym.

Niech $\bar{K}$ będzie krętem, zaś $\bar{M}$ momentem ogólnym sił względem O. Wówczas w myśl zasady krętu (II), str. 365, jest

$$(1) \qquad \dot{\bar{K}}=\bar{M}.$$

Zauważmy, że $\bar{M}$ nie zależy od siły zaczepionej w O, gdyż jej moment względem O jest zerem.

Obierzmy dwa układy współrzędnych o początku O: jeden stały (x,y,z), a drugi ruchomy (ξ,η,ζ), którego osie są osiami głównymi bezwładności ciała względem O. Niech A, B, C oznaczają momenty bezwładności ciała względem osi głównych bezwładności (t.j. osi ξ, η i ζ), a $\bar{\omega}$ niech oznacza prędkość chwilową kątową ciała. Na mocy (1) i (V), str. 398, dostaniemy:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} A\dot{\omega}_\xi+(B-C)\omega_\eta\omega_\zeta&=M_\xi,\\ B\dot{\omega}_\eta+(C-A)\omega_\zeta\omega_\xi&=M_\eta,\\ C\dot{\omega}_\zeta+(A-B)\omega_\xi\omega_\eta&=M_\zeta. \end{aligned}$$

Równania (I) noszą nazwę *równań Eulera*.

Równania (I) służą do wyznaczenia ω_ξ, ω_η, ω_ζ jako funkcji czasu t. Znając ω_ξ, ω_η, ω_ζ, możemy określić położenie układu ruchomego (ξ,η,ζ), a więc i położenie ciała, przy pomocy kątów Eulera ϑ, φ, ψ (str. 355), obliczonych z równań różniczkowych (II), str. 357. W ten sposób przy pomocy równań Eulera (I) i równań (II), str. 357, możemy wyznaczyć ruch ciała. Rozwiązanie tych równań nastręcza wiele trudności i nie zawsze da się wykonać. Poznamy jednak niektóre przypadki, w których rozwiązania te dają się otrzymać. Najważniejszym z nich jest przypadek, gdy prócz reakcji w punkcie O nie działają na ciało żadne siły.

Jeżeli znamy ruch ciała, to możemy obliczyć reakcję $\bar{R}$ zaczepioną w O. Oznaczmy bowiem przez $\bar{P}$ sumę sił działających, przez m masę ciała, a przez $\bar{p}_0$ przyśpieszenie środka masy. Na mocy twierdzenia o ruchu środka masy (I), str. 365, mamy więc $m\bar{p}_0=\bar{P}+\bar{R}$ czyli

$$(2) \qquad \bar{R}=m\bar{p}_0-\bar{P}.$$

Uwaga 1. Równania Eulera (I) zachodzą również, gdy punkt O nie jest punktem nieruchomym, lecz środkiem masy ciała. Zachodzi bowiem wówczas twierdzenie o kręcie $\dot{\bar{K}}=\bar{M}$ (str. 365), zaś wzory (II) str. 357, słuszne są dla każdego punktu O.

Uwaga 2. Opierając się na wzorach (IV), str. 398, możemy podać równania ogólniejsze od równań Eulera.

Niech O będzie punktem nieruchomym lub środkiem masy, zaś (ξ,η,ζ) dowolnym układem współrzędnych o początku O, mającym prędkość chwilową kątową $\bar{\omega}'$. Ponieważ $\dot{\bar{K}}=\bar{M}$, więc na mocy wzorów (IV), str. 398, otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
&\dot{K}_\xi+K_\eta\omega'_\zeta-K_\zeta\omega'_\eta=M_\xi,\\
\text{(II)}\qquad &\dot{K}_\eta+K_\zeta\omega'_\xi-K_\xi\omega'_\zeta=M_\eta,\\
&\dot{K}_\zeta+K_\xi\omega'_\eta-K_\eta\omega'_\xi=M_\zeta.
\end{aligned}
$$

Ruch ciała sztywnego swobodnego. Przyjmijmy środek S masy ciała za początek układu współrzędnych (x,y,z), poruszającego się ruchem postępowym względem układu inercjalnego. Ruch ciała w przestrzeni będzie określony, jeżeli wyznaczymy ruch środka masy S i ruch ciała względem S, t. j. względem układu (x,y,z).

Ruch środka masy otrzymać możemy z równań (I), str. 365.

Aby zaś wyznaczyć ruch ciała względem układu (x,y,z), możemy przyjąć, że układ ten jest w spoczynku (str. 137) i że oprócz sił działających na ciało działają nań tylko siły unoszenia (gdyż siły Coriolisa są zerem (str. 138). Przyśpieszenie unoszenia równa się przyśpieszeniu $\bar{p}_0$ środka masy i jest wspólne wszystkim punktom ciała (str. 60). Jeżeli ciało uważać będziemy za układ punktów materialnych $m_1, m_2, \ldots$, to siły unoszenia wyniosą $-m_1\bar{p}_0$, $-m_2\bar{p}_0$, ... Siły unoszenia są więc proporcjonalne do mas i mają jednakowe kierunki oraz zwroty. Zatem (str. 243) siły unoszenia mają wypadkową $\bar{R}$ o początku w środku masy:

$$\bar{R}=-m_1\bar{p}_0-m_2\bar{p}_0-\ldots=-m\bar{p}_0,$$

gdzie m oznacza masę ciała. Oznaczając sumę sił działających przez $\bar{P}$, otrzymujemy z twierdzenia o ruchu środka masy $m\bar{p}_0=\bar{P}$, skąd $\bar{R}=-\bar{P}$.

Ponieważ środek masy S jest nieruchomy względem układu (x,y,z), zaś siła unoszenia ma początek w S, więc *ruch ciała względem środka masy* (a zatem i względem układu (x,y,z)) *jest taki, jak gdyby środek masy był unieruchomiony, a na ciało działały te same siły.*

Ruch ciała względem środka masy jest zatem niezależny od ruchu samego środka masy i możemy go wyznaczyć przy pomocy równań Eulera.

Widzimy stąd, że badanie ruchu ciała w przypadku najogólniejszym istotnie sprowadza się do badania ruchu środka masy i obrotu ciała około punktu nieruchomego.

§ 7. Obrót ciała około punktu bez działania sił. Załóżmy, że na ciało sztywne, mające unieruchomiony punkt O, nie działają żadne siły. W tym przypadku moment sił jest $\overline{M}=0$, więc równania Eulera (I), str. 399, przyjmą postać:

$$(\mathrm{I}') \qquad A\dot{\omega}_\xi+(B-C)\omega_\eta\omega_\zeta=0, \qquad B\dot{\omega}_\eta+(C-A)\omega_\zeta\omega_\xi=0,$$
$$C\dot{\omega}_\zeta+(A-B)\omega_\xi\omega_\eta=0.$$

Równania (I′) zachodzą również przy samym tylko założeniu, że jest stale $\overline{M}=0$, t. zn. że siły działające na ciało mają wypadkową, której kierunek przechodzi stale przez punkt O. Wynika stąd, że równania (I′) stosują się także do ruchu ciała sztywnego ciężkiego o unieruchomionym środku ciężkości, gdy oprócz ciężkości na ciało to nie działają żadne inne siły.

Rozwiązanie równań (I′) w przypadku ogólnym wymaga znajomości teorii funkcyj eliptycznych. Podamy tu rozwiązania tych równań tylko w przypadkach, gdy elipsoida bezwładności względem O jest kulą lub elipsoidą obrotową, t. zn. gdy wszystkie trzy lub przynajmniej dwie z liczb A, B, C są równe.

Na razie wyprowadzimy z równań (I′) pewne wnioski ogólne.

Kręt i energia kinetyczna. Ponieważ $\overline{M}=0$, więc z twierdzenia o kręcie wynika, że *kręt $\overline{K}$ jest wektorem stałym.*

Ponieważ $|\overline{K}|^2=K_\xi^2+K_\eta^2+K_\zeta^2$, więc na mocy (III), str. 396, dostaniemy, kładąc $I_\xi=A$, $I_\eta=B$ i $I_\zeta=C$,

$$(1) \qquad |\overline{K}|^2=A^2\omega_\xi^2+B^2\omega_\eta^2+C^2\omega_\zeta^2=\text{const}.$$

Pomnóżmy równania Eulera (I′) obustronnie przez $\omega_\xi,\omega_\eta,\omega_\zeta$ i dodajmy je stronami. Otrzymamy $A\dot{\omega}_\xi\omega_\xi+B\dot{\omega}_\eta\omega_\eta+C\dot{\omega}_\zeta\omega_\zeta=0$, co możemy napisać w postaci $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(A\omega_\xi^2+B\omega_\eta^2+C\omega_\zeta^2)=0$ czyli

$$(2) \qquad A\omega_\xi^2+B\omega_\eta^2+C\omega_\zeta^2=\text{const}.$$

Aby podać znaczenie równania (2), weźmy pod uwagę kąty α, β, γ, jakie $\overline{\omega}$ tworzy z osiami ξ, η, ζ. Mamy więc $\omega_\xi = |\omega| \cos\alpha$, $\omega_\eta = |\overline{\omega}| \cos\beta$, $\omega_\zeta = |\overline{\omega}| \cos\gamma$, skąd

$$(3) \qquad A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2 = (A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma)|\overline{\omega}|^2.$$

Niech I będzie momentem bezwładności ciała względem osi obrotu chwilowego. Na mocy wzoru (I), str. 164, jest więc $I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$, a zatem na mocy (3) lewa strona (2) równa się $I|\overline{\omega}|^2$. Ponieważ zaś energia kinetyczna ciała jest $E = \frac{1}{2}I|\overline{\omega}|^2$ (str. 365), więc

$$(4) \qquad 2E = A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2 = \text{const.}$$

Jak widzimy stąd, równanie (2) wyraża, że *energia kinetyczna ciała jest stała.*

Na mocy (III), str. 396, mamy dalej $\overline{K}\overline{\omega} = A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2$, skąd na mocy (4) $\overline{K}\overline{\omega} = \text{const}$. Ponieważ $\overline{K}\omega = |\overline{K}|\ \text{Rzut}_{\overline{K}}\,\overline{\omega}$, zaś według (1) jest $|\overline{K}| = \text{const.}$, zatem $\text{Rzut}_K\,\overline{\omega} = \text{const.}$

A więc: *rzut prędkości chwilowej kątowej na kierunek krętu jest stały.*

Przypuśćmy, że w chwili początkowej $t=0$ kierunek krętu był ten sam, co kierunek prędkości chwilowej kątowej. $\overline{K}$ i $\overline{\omega}$ miały więc (str. 396) kierunek jednej z osi głównych bezwładności, np. osi ζ. W chwili $t=0$ było zatem:

$$(5) \qquad \omega_\xi = 0, \qquad \omega_\eta = 0 \quad \text{i} \quad \omega_\zeta = \omega_\zeta^0,$$

gdzie ω_ζ^0 oznacza rzut $\overline{\omega}$ na oś ζ w chwili $t=0$.

Równania Eulera (I′) są równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu. Z teorii równań różniczkowych wiadomo, że istnieje jedno tylko rozwiązanie, spełniające w chwili $t=0$ warunki (5). Tym jedynym rozwiązaniem jest

$$\omega_\xi = \text{const.} = 0, \qquad \omega_\eta = \text{const.} = 0, \qquad \omega_\zeta = \text{const.} = \omega_\zeta^0,$$

gdyż spełnia ono dla $t=0$ warunki (5) i, jak łatwo stwierdzić, równania Eulera (I′). Wektor $\overline{\omega}$ ma tedy wielkość stałą i stale kierunek osi bezwładności ζ, zatem (str. 396) $\overline{\omega}$ ma również kierunek krętu $\overline{K}$. Ponieważ zaś kręt $\overline{K}$ zachowuje kierunek niezmienny w przestrzeni, więc i kierunek wektora $\overline{\omega}$ jest stały.

A zatem: *jeżeli w chwili początkowej prędkość chwilowa kątowa ma kierunek osi głównej bezwładności, to* (przy założeniu, że moment sił względem punktu unieruchomionego jest zerem) *ruch ciała jest obrotem około osi stałej z prędkością kątową stałą.*

Obrót około punktu kulistego. Załóżmy, że punkt O jest punktem kulistym, t. zn. że $A=B=C$. Równania Eulera (I′) przyjmą wtedy postać $\dot{\omega}_\xi=0$, $\dot{\omega}_\eta=0$, $\dot{\omega}_\zeta=0$ czyli:

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \omega_\xi=c_1, \qquad \omega_\eta=c_2, \qquad \omega_\zeta=c_3.$$

Wynika stąd, że prędkość kątowa jest stała co do wielkości. Ponieważ punkt O jest z założenia punktem kulistym, więc na mocy (3), str. 396 (kładąc $I=A$), mamy $\overline{K}=A\omega$, a zatem oś obrotu chwilowego ma kierunek krętu; że zaś kręt $\overline{K}$ jest wektorem stałym, więc oś obrotu chwilowego ma stały kierunek w przestrzeni. Wobec tego ciało obraca się około osi stałej ze stałą prędkością kątową.

A więc: *jeżeli punkt O jest punktem kulistym* (t. zn. jeżeli $A=B=C$), *wówczas ruch ciała pod działaniem sił, których moment względem O jest zerem, jest obrotem około osi stałej ze stałą prędkością kątową.*

Obrót około punktu, którego elipsoida bezwładności jest elipsoidą obrotową. Załóżmy, że $A=B$, t. j. że elipsoida bezwładności względem punktu O jest obrotowa. Przypadek ten zachodzi, jeżeli ciało posiada np. oś symetrii przechodzącą przez O. Równania Eulera (I′) przyjmą wtedy postać:

$$\text{(II}''\text{)} \quad \dot{\omega}_\xi+\frac{A-C}{A}\omega_\zeta\omega_\eta=0, \qquad \dot{\omega}_\eta-\frac{A-C}{A}\omega_\zeta\omega_\xi=0, \qquad \dot{\omega}_\zeta=0.$$

Trzecie z równań (II″) daje

$$\text{(6)} \qquad \omega_\zeta=c=\text{const}.$$

Z równania (4), kładąc $A=B$, otrzymujemy

$$A(\omega_\xi^2+\omega_\eta^2)+C\omega_\zeta^2=\text{const}.,$$

na mocy więc (6) mamy

$$\text{(7)} \qquad \omega_\xi^2+\omega_\eta^2=c_1^2=\text{const}.$$

Ponieważ $|\overline{\omega}|^2=\omega_\xi^2+\omega_\eta^2+\omega_\zeta^2$, zatem na mocy (6) i (7)

$$\text{(8)} \qquad |\overline{\omega}|^2=c^2+c_1^2=\text{const}.$$

A więc: *prędkość chwilowa kątowa jest stała co do wielkości.*

Połóżmy

$$(9) \qquad \frac{A-C}{A}\omega_\zeta = h.$$

Ponieważ wobec (6) jest $\omega_\zeta = \text{const.}$, więc $h = \text{const.}$ i dwa pierwsze z równań (II′) przyjmą postać:

$$(10) \qquad \dot{\omega}_\xi + h\omega_\eta = 0, \qquad \dot{\omega}_\eta - h\omega_\xi = 0.$$

Niech $h \neq 0$. Różniczkując pierwsze z równań (10), dostajemy $\ddot{\omega}_\xi + h\dot{\omega}_\eta = 0$ czyli $\dot{\omega}_\eta = -\ddot{\omega}_\xi / h$, skąd przez podstawienie w drugie z równań (10) otrzymamy po pomnożeniu przez h

$$(11) \qquad \ddot{\omega}_\xi + h^2\omega_\xi = 0.$$

Rozwiązanie ogólne równania (11) ma postać

$$(12) \qquad \omega_\xi = a \sin ht + b \cos ht,$$

gdzie a i b są stałymi dowolnymi. Pierwsze z równań (10) daje $\omega_\eta = -\dot{\omega}_\xi / h$, skąd na mocy (12)

$$(13) \qquad \omega_\eta = -a \cos ht + b \sin ht.$$

Równania (6), (12) i (13) przedstawiają ogólne rozwiązanie równań Eulera (II″) również i w przypadku, gdy $h = 0$. Rozwiązanie to zawiera trzy stałe dowolne a, b, c, które wyznacza się z danych początkowych.

W y z n a c z a n i e k ą t ó w E u l e r a. Zajmiemy się teraz wyznaczaniem kątów Eulera przy pomocy równań (6), (12) i (13) oraz równań (II), str. 357.

Ponieważ kręt $\bar{K}$ jest wektorem stałym, więc możemy przyjąć kierunek krętu za kierunek osi z. Rzut krętu na oś ζ jest $K_\zeta = |\bar{K}| \cos\vartheta$. Z drugiej strony (kładąc $I_\zeta = C$) mamy na mocy (III), str. 396, $K_\zeta = C\omega_\zeta$, więc $|\bar{K}|\cos\vartheta = C\omega_\zeta$ czyli

$$(14) \qquad \cos\vartheta = C\omega_\zeta / |\bar{K}|.$$

Ponieważ $|\bar{K}| = \text{const.}$ i $\omega_\zeta = \text{const.}$, więc

$$(15) \qquad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const.}$$

Jeżeli $\vartheta_0 = 0$ lub $\vartheta_0 = \pi$, to kręt $\bar{K}$ ma stale kierunek osi bezwładności ζ, zatem w myśl twierdzenia podanego na str. 396 prędkość chwilowa kątowa ma kierunek krętu. Podobnie, jeżeli $\vartheta_0 = \pi/2$, to na mocy (14) jest $\omega_\zeta = 0$, więc ((III), str. 396) $K_\xi = A\omega_\xi$, $K_\eta = A\omega_\eta$,

$K_\zeta=0$, skąd $\bar{K}=A\bar{\omega}$; a zatem kręt ma kierunek prędkości chwilowej kątowej. Z twierdzenia podanego na str. 396 wnosimy więc, że *jeżeli* $\vartheta_0=0$ *lub* π *lub* $\pi/2$, *to ruch ciała jest obrotem około osi stałej z prędkością kątową stałą.*

Załóżmy teraz, że $\vartheta_0 \neq 0$ i $\vartheta_0 \neq \pi$ i $\vartheta_0 \neq \pi/2$. Ponieważ $\vartheta=\vartheta_0=\text{const.}$, więc oś ζ zakreśla stożek obrotowy, którego osią jest oś z. Podstawiając w równania (II), str. 357, wartości ω_ξ i ω_η z równań (12) i (13), otrzymamy (wobec $\dot{\vartheta}=0$):

$$a\sin(ht-\varphi)+b\cos(ht-\varphi)=0, \tag{16}$$

$$\dot{\psi}=[a\cos(ht-\varphi)-b\sin(ht-\varphi)]/\sin\vartheta_0, \tag{17}$$

$$\dot{\varphi}=\omega_\zeta-[a\cos(ht-\varphi)-b\sin(ht-\varphi)]\cot\vartheta_0. \tag{18}$$

Gdyby było $a=0$ i $b=0$, to na mocy (12) i (13) mielibyśmy $\omega_\xi=0$ i $\omega_\eta=0$, więc $\bar{\omega}$ miałoby kierunek osi bezwładności ζ, a zatem krętu $\bar{K}$ (na mocy twierdzenia ze str. 396). Oś ζ miałaby zatem kierunek osi z i byłoby $\vartheta_0=0$ lub $\vartheta_0=\pi$ wbrew założeniu. Jedna z liczb a i b jest tedy różna od zera, skąd na mocy (16) $ht-\varphi=\text{const.}$

Niech $\varphi=\varphi_0$ dla $t=0$. Zatem $ht-\varphi=-\varphi_0$ czyli

$$\varphi=ht+\varphi_0. \tag{19}$$

Podstawiając tę wartość φ w (17) i (18), dostaniemy:

$$\dot{\psi}=(a\cos\varphi_0+b\sin\varphi_0)/\sin\vartheta_0, \tag{20}$$

$$h=\omega_\zeta-(a\cos\varphi_0+b\sin\varphi_0)\cot\vartheta_0 \tag{21}$$

Ponieważ $\vartheta_0 \neq 0$ i $\vartheta_0 \neq \pi$ i $\vartheta_0 \neq \pi/2$, więc z (21) otrzymujemy $a\cos\varphi_0+b\sin\varphi_0=(\omega_\zeta-h)\operatorname{tg}\vartheta_0$, skąd na mocy (20)

$$\dot{\psi}=(\omega_\zeta-h)/\cos\vartheta_0. \tag{22}$$

Wstawiając w równania (19) i (22) wartość h z równania (9), otrzymamy łącznie z równaniem (15):

$$\dot{\varphi}=\frac{A-C}{A}\,\omega_\zeta,\qquad \dot{\psi}=\frac{C}{A\cos\vartheta_0}\,\omega_\zeta,\qquad \dot{\vartheta}=0. \tag{23}$$

Całkując równania (23) i przyjmując, że dla $t=0$ było $\varphi=\varphi_0$, $\psi=\psi_0$ i $\vartheta=\vartheta_0$, dostajemy:

$$\varphi=\frac{A-C}{A}\,\omega_\zeta t+\varphi_0,\qquad \psi=\frac{C}{A\cos\vartheta_0}\,\omega_\zeta t+\psi_0,\qquad \vartheta=\vartheta_0. \tag{24}$$

Ponieważ według (6) jest $\omega_\zeta = \text{const.}$, więc z (23) wynika, że $\dot{\varphi} = \text{const.}$ i $\dot{\psi} = \text{const.}$

A zatem: *ruch ciała jest złożeniem dwóch obrotów, z których jeden odbywa się około osi stałej ζ w ciele, a drugi około osi stałej z w przestrzeni. Oba obroty odbywają się z prędkością kątową stałą.*

Ruch taki nazwaliśmy *ruchem precesyjnym regularnym* (str. 357). Stosunek obu prędkości kątowych wynosi w myśl (23)

$$\dot{\varphi}/\dot{\psi} = (A - C)\cos\vartheta_0/C. \tag{25}$$

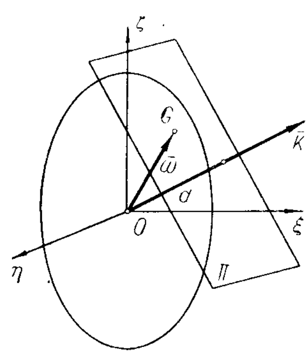
Udowodniliśmy więc

Twierdzenie. *Jeżeli w punkcie O elipsoida bezwładności jest elipsoidą obrotową, to ruch ciała albo jest obrotem około osi stałej z prędkością kątową stałą, albo jest precesją regularną.*

Obrót ciała około punktu w przypadku ogólnym. Podamy obecnie pewne uwagi, dotyczące ciała obracającego się około punktu O, przy założeniu, że moment sił względem punktu O jest zerem.

Zachowajmy oznaczenia dotychczasowe. Osie ξ, η, ζ mają kierunki osi głównych bezwładności w punkcie O, a więc równanie elipsoidy bezwładności względem O ma w układzie (ξ, η, ζ) postać (wzór (8), str. 166) $A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = c^2$, gdzie c jest stałą dowolną. Ponieważ energia kinetyczna E jest stała, więc możemy przyjąć $c^2 = 2E$. Elipsoida bezwładności będzie więc miała równanie

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 2E. \tag{26}$$



Oznaczmy przez G koniec wektora prędkości kątowej $\overline{\omega}$. Punkt G ma zatem współrzędne ω_ξ, ω_η i ω_ζ. Na mocy wzoru (4), str. 402, współrzędne punktu G spełniają równanie (26). Wynika stąd, że *koniec wektora ω leży na elipsoidzie bezwładności* (26).

Równanie płaszczyzny Π, stycznej do elipsoidy (26) w punkcie G, ma postać

$$A\omega_\xi\xi + B\omega_\eta\eta + C\omega_\zeta\zeta = 2E. \tag{27}$$

Ponieważ na mocy (111), str. 396, kręt $\overline{K}$ ma na osie ξ, η, ζ rzuty $K_\xi = A\omega_\xi$, $K_\eta = B\omega_\eta$, i $K_\zeta = C\omega_\zeta$, więc kręt $\overline{K}$ jest prostopadły do płaszczyzny Π. Odległość płaszczyzny Π od punktu O wynosi $d = 2E/\sqrt{A^2\omega_\xi^2 + B^2\omega_\eta^2 + C^2\omega_\zeta^2}$, zatem na mocy (1), str. 401,

$$(28) \qquad d = 2E/|\overline{K}| = \text{const.}$$

Odległość płaszczyzny Π od punktu O jest przeto stała. Ponieważ nadto płaszczyzna Π jest stale prostopadła do wektora nieruchomego $\overline{K}$, więc *Π jest płaszczyzną nieruchomą w przestrzeni.*

Elipsoida bezwładności jest stale styczną do płaszczyzny Π. Ruch chwilowy ciała jest obrotem chwilowym z prędkością kątową ω, zaś G jest końcem wektora $\overline{\omega}$, a zatem prędkość punktu G jest zerem. Wynika stąd, że *elipsoida bezwładności toczy się po płaszczyźnie Π.*

Zajmiemy się teraz pytaniem, jakie mogą być położenia wektora $\overline{\omega}$ w ciele, czyli jaką krzywą zakreśla punkt G na elipsoidzie bezwładności.

Oznaczmy współrzędne punktu G przez ξ, η i ζ. Zatem $\xi = \omega_\xi$, $\eta = \omega_\eta$ i $\zeta = \omega_\zeta$. Na mocy więc (1), str. 401, mamy

$$(29) \qquad A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = K^2,$$

gdzie $K = |\overline{K}|$. Współrzędne punktu G spełniają również równanie (26) elipsoidy bezwładności. Mnożąc obustronnie równanie (26) przez K^2, a równanie (29) przez $2E$ i odejmując je od siebie, otrzymamy

$$(30) \qquad (AK^2 - 2EA^2)\xi^2 + (BK^2 - 2EB^2)\eta^2 + (CK^2 - 2EC^2)\zeta^2 = 0.$$

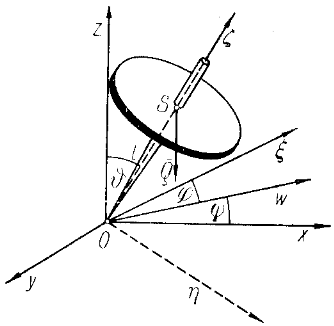
Równanie (30) jest równaniem stożka o wierzchołku O. Punkt G zakreśla więc linię, która jest przekrojem elipsoidy bezwładności (26) i stożka (30). Przekroje te są krzywymi zamkniętymi rzędu (na ogół) czwartego. W szczególności, stożek (30) jest stożkiem obrotowym, gdy np. $A = B$ (lub $A = C$ lub $B = C$). Jeżeli A, B i C są różne, stożek może się zredukować do dwóch płaszczyzn.

Prędkości kątowe zaznaczone w ciele tworzą stożek (30). Zatem stożek określony równaniem (30) jest stożkiem ruchomym prędkości chwilowych kątowych (str. 340).

Jeżeli na płaszczyźnie nieruchomej Π zaznaczymy położenia punktu G, to otrzymamy pewną krzywą. Stożek, dla którego ta krzywa jest kierownicą, zaś O wierzchołkiem, jest stożkiem stałym chwilowych prędkości kątowych (str. 340).

§ 8. Obrót ciała ciężkiego około punktu. Zajmiemy się obecnie ruchem ciała ciężkiego, w którym unieruchomiony jest dowolny punkt O nie będący środkiem masy.

Ruch taki wykonuje np. bąk, obracający się około osi i opierający się jednym końcem osi na podłodze dość chropowatej, by posuwanie się końca osi po podłodze było niemożliwe.



Załóżmy dla prostoty, że ciało posiada oś symetrii, przechodzącą przez O. Środek masy S leży oczywiście na tej osi. Przyjmijmy oś symetrii za oś ζ ruchomego układu współrzędnych i nadajmy jej zwrot ku środkowi masy S. Połóżmy $OS=l$. Niechaj oś z układu stałego współrzędnych ma zwrot pionowy ku górze. Ciężar ciała $\bar{Q}$ ma więc kierunek osi z. Oznaczając przez $\bar{k}$ wektor jednostkowy, położony na osi z, a przez m masę ciała, mamy $\bar{Q}=-mg\bar{k}$. Tworząc rzuty na osie ξ, η, ζ otrzymamy na mocy (24), str. 356:

$$Q_\xi=-mg\sin\vartheta\sin\varphi,\qquad Q_\eta=mg\sin\vartheta\cos\varphi,\qquad Q_\zeta=-mg\cos\vartheta.$$

Ponieważ $\bar{Q}$ ma początek w środku masy S, którego współrzędne w układzie (ξ,η,ζ) są $0, 0, l$, więc oznaczając przez $\bar{M}$ moment ciężaru $\bar{Q}$ względem O, dostaniemy:

$$M_\xi=mgl\sin\vartheta\cos\varphi,\qquad M_\eta=mgl\sin\vartheta\sin\varphi,\qquad M_\zeta=0.$$

Równania Eulera (I), str. 399, przyjmą postać (z uwagi na to, że $A=B$):

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_\xi+(A-C)\omega_\eta\omega_\zeta&=mgl\sin\vartheta\cos\varphi,\\ A\dot{\omega}_\eta-(A-C)\omega_\zeta\omega_\xi&=mgl\sin\vartheta\sin\varphi,\\ C\dot{\omega}_\zeta&=0. \end{aligned}\tag{1}$$

Jeżeli w równaniach (1) wyrazimy $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ przez kąty Eulera według wzorów (I), str. 356, otrzymamy układ równań różniczkowych rzędu drugiego, gdzie niewiadomymi będą ϑ, φ, ψ jako funkcje czasu.

Układ (1) możemy w prosty sposób sprowadzić do układu równań różniczkowych rzędu pierwszego. Jedno równanie dostaniemy z trzeciego równania układu (1). Całkując mianowicie to równanie, otrzymamy $C\omega_\zeta = \text{const.}$, a więc

(2) $$\omega_\zeta = r = \text{const.}$$

Dwa inne równania rzędu pierwszego dostaniemy z zasady zachowania energii (ciężar posiada bowiem potencjał) i z zasady krętu, w myśl której kręt względem osi stałej z jest w danym przypadku stały, gdyż moment ciężaru względem tej osi jest zerem (ciężar bowiem ma kierunek osi z).

Środek masy ma współrzędną $z = l\cos\vartheta$, więc potencjał ciężaru jest $V = -mgz = -mgl\cos\vartheta$.

Energia kinetyczna ciała ((4), str. 402) wynosi

$$E = \tfrac{1}{2}[A(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + C\omega_\zeta^2],$$

a z zasady zachowania energii mamy $E - V = \text{const.}$; zatem

(3) $$A(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + C\omega_\zeta^2 + 2mgl\cos\vartheta = h = \text{const.}$$

Oznaczając przez $\bar{K}$ kręt względem O, mamy ((III), str. 396) $K_\xi = A\omega_\xi$, $K_\eta = A\omega_\eta$ i $K_\zeta = C\omega_\zeta$. Oś z tworzy z osiami ξ, η i ζ kąty, których cosinusy wynoszą k_ξ, k_η i k_ζ (gdyż $\bar{k}$ jest wektorem jednostkowym, mającym zwrot i kierunek osi z). Zatem rzut krętu $\bar{K}$ na oś z wynosi $K_z = K_\xi k_\xi + K_\eta k_\eta + K_\zeta k_\zeta$. Wstawiając do tego wzoru wartości k_ξ, k_η, k_ζ ze wzorów (24), str. 356, i pamiętając że $K_z = \text{const.}$, gdyż moment ciężaru względem osi pionowej z jest zerem, otrzymamy

(4) $$K_z = A(\omega_\xi \sin\vartheta \sin\varphi - \omega_\eta \sin\vartheta\cos\varphi) + C\omega_\zeta\cos\vartheta = \text{const.}$$

Wyraźmy teraz we wzorach (2)-(4) rzuty ω_ξ, ω_η, ω_ζ przez kąty Eulera według wzorów (I), str. 356. Otrzymamy:

(5) $$\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi = r, \quad \dot\vartheta^2 + \dot\psi^2\sin^2\vartheta + a\cos\vartheta = b, \quad \dot\psi\sin^2\vartheta + \alpha\cos\vartheta = \beta,$$

gdzie

(6) $$r = \omega_\zeta, \quad a = 2mgl/A, \quad b = (h - Cr^2)/A, \quad \alpha = Cr/A, \quad \beta = K_z/A.$$

Trzecie z równań (5) daje $\dot\psi = (\beta - \alpha\cos\vartheta)/\sin^2\vartheta$. Podstawiając tę wartość $\dot\psi$ w drugie z równań (5) i mnożąc przez $\sin^2\vartheta$, dostaniemy

(7) $$\dot\vartheta^2\sin^2\vartheta + (\beta - \alpha\cos\vartheta)^2 = (b - a\cos\vartheta)\sin^2\vartheta.$$

Podstawmy do (7), a następnie do pierwszego i trzeciego z równań (5)

(8) $$u = \cos\vartheta \quad \text{czyli} \quad \dot u = -\dot\vartheta\sin\vartheta.$$

Otrzymamy:

(9) $$\dot{u}^2 = (b - au)(1 - u^2) - (\beta - au)^2,$$

(10) $$\dot{\psi} = (\beta - au)/(1 - u^2),$$

(11) $$\dot{\varphi} = r - (\beta - au)u/(1 - u^2).$$

Z (9) możemy wyznaczyć u, t. j. $\cos\vartheta$, a następnie z (10) i (11) kąty ψ i φ.

Oznaczmy prawą stronę równania (9) przez $f(u)$. Zakładając, że $\beta - a \neq 0$ i $\beta + a \neq 0$, mamy:

(12) $$f(+1) < 0, \quad f(-1) < 0,$$

a ponadto, ponieważ $a > 0$ na mocy (6),

(13) $$\lim_{u \to +\infty} f(u) = +\infty.$$

Jeżeli ϑ_0 było wartością kąta ϑ dla $t = 0$, zaś $u_0 = \cos\vartheta_0$, to na mocy (9)

(14) $$f(u_0) = \dot{u}_0^2 \geqslant 0.$$

Z równań (12)-(14) wynika, że równanie $f(u) = 0$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, z których dwa, mianowicie u_1 i u_2, leżą między -1 a $+1$, trzeci zaś jest $u_3 > 1$. W przypadku szczególnym może być $u_1 = u_2$ (pierwiastek podwójny).

Przyjmijmy, że $u_1 < u_2$. Ponieważ $u = \cos\vartheta$ musi być zawarte między -1 a $+1$, a ponadto $f(u) \geqslant 0$ (na mocy (9)), więc $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ czyli

(15) $$u_1 \leqslant \cos\vartheta \leqslant u_2.$$

A więc: *kąt ϑ zmienia się podczas ruchu między granicami ϑ_1 a ϑ_2, gdzie $\cos\vartheta_1 = u_1$ i $\cos\vartheta_2 = u_2$. Ponieważ $l\cos\vartheta$ oznacza wysokość środka masy nad płaszczyzną poziomą xy, więc środek masy wykonywa wahania między dwiema płaszczyznami poziomymi $z = l\cos\vartheta_1$ i $z = l\cos\vartheta_2$.*

Licznik prawego człona równania (10) jest zerem tylko dla $u = \beta/a$. Jeżeli więc $|\beta/a| > 1$, to znak przy $\dot{\psi}$ jest stały, gdyż $|u| \leqslant 1$. Oczywistą jest rzeczą, że jeżeli

(16) $$u_1 < \beta/a < u_2,$$

to $\dot{\psi}$ zmienia znak. Łatwo wykazać, że wzór (16) równoważny jest nierównościom:

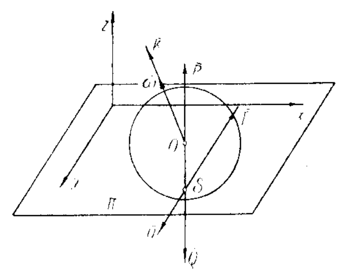
(17) $$|\beta/a| < 1, \quad \beta/a < b/a.$$

Jeżeli bowiem zachodzi wzór (16), to $|\beta/a|<1$ i ponadto

(18) $$f(\beta/a)=(b-a\beta/a)(1-\beta^2/a^2)>0,$$

więc $b-a\beta/a>0$, skąd $\beta/a<b/a$ (gdyż $a>0$ na mocy (6)). Na odwrót, jeżeli zachodzą nierówności (17), to mamy w myśl (18) $f(\beta/a)>0$; zachodzi więc albo nierówność (16), albo nierówność $\beta/a>u_3$. Ta ostatnia jest jednak niemożliwa, ponieważ $f(b/a)=-(\beta-ab/a)^2<0$, więc $b/a<u_3$, a zatem $\beta/a<u_3$ na mocy (17).

§ 9. Ruch kuli po płaszczyźnie. Niech kula ciężka o gęstości stałej porusza się po płaszczyźnie poziomej Π (przykład: ruch kuli po bilardzie). Uwzględnijmy tarcie i załóżmy, że reakcja płaszczyzny sprowadza się do jednej siły, zaczepionej w punkcie styczności S. Oznaczmy przez R i T wartości bezwzględne reakcyj: normalnej $\bar{R}$ i stycznej (tarcia) $\bar{T}$, a przez μ współczynnik tarcia. Zatem



(1) $$T=\mu R.$$

Jeżeli punkt S styczności kuli z płaszczyzną Π ma prędkość różną od zera, wówczas tarcie $\bar{T}$ ma kierunek tej prędkości, lecz zwrot przeciwny (str. 368). Przyjmijmy płaszczyznę Π za płaszczyznę xy układu stałego współrzędnych (x,y,z) i nadajmy osi z zwrot ku górze. Oznaczając przez $\bar{p}_0$ przyśpieszenie środka masy kuli $O(x_0,y_0,z_0)$, przez m masę kuli, a przez $\bar{Q}$ jej ciężar, mamy

(2) $$m\bar{p}_0=\bar{Q}+\bar{R}+\bar{T}.$$

Tworząc rzuty na osie układu, dostaniemy:

(3) $$m\ddot{x}_0=T_x, \qquad m\ddot{y}_0=T_y, \qquad m\ddot{z}_0=-mg+R.$$

Ponieważ $z_0=\text{const.}=r$ (gdzie r oznacza promień kuli), więc $\ddot{z}_0=0$, a zatem $R=mg$ i na mocy (1), przy założeniu, że S ma prędkość różną od zera,

(4) $$T=\mu mg.$$

Niech $\bar{K}$ będzie krętem względem środka O kuli, ω prędkością chwilową kątową, a A momentem bezwładności względem średnicy. Ponieważ z założenia kula jest jednorodna, więc jej środek O jest punktem kulistym. Zatem (na mocy (3), str. 396) $\bar{K}=A\bar{\omega}$, skąd

(5) $$\dot{\bar{K}}=A\dot{\bar{\omega}}.$$

Moment $\overline{M}$ sił względem punktu O redukuje się do momentu siły $\overline{T}$. Zatem:

(6) $$M_x = -rT_y, \qquad M_y = rT_x, \qquad M_z = 0.$$

Ponieważ $\dot{\overline{K}} = \overline{M}$, więc dostajemy z (5):

(7) $$A\dot{\omega}_x = -rT_y, \qquad A\dot{\omega}_y = rT_x, \qquad A\dot{\omega}_z = 0.$$

Z ostatniego równania otrzymujemy

(8) $$\omega_z = \text{const}.$$

Niech $\overline{u}$ oznacza prędkość punktu styczności S. Ruch chwilowy kuli jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości $\overline{v}_0$ środka masy O oraz ruchu obrotowego około osi przechodzącej przez O o prędkości kątowej $\overline{\omega}$. Zatem $\overline{u} = \overline{v}_0 + \overline{OS} \times \overline{\omega}$, skąd:

(9) $$u_x = \dot{x}_0 + r\omega_y, \qquad u_y = \dot{y}_0 - r\omega_x, \qquad u_z = 0.$$

Biorąc pochodne względem czasu, otrzymamy:

(10) $$\dot{u}_x = \ddot{x}_0 + r\dot{\omega}_y, \qquad \dot{u}_y = \ddot{y}_0 - r\dot{\omega}_x, \qquad \dot{u}_z = 0,$$

skąd na mocy (3) i (7):

(11) $$\dot{u}_x = (1/m + r^2/A)T_x, \qquad \dot{u}_y = (1/m + r^2/A)T_y, \qquad \dot{u}_z = 0.$$

Mnożąc obie strony pierwszego z równań (11) przez u_x, a drugiego przez u_y i dodając, otrzymamy:

(12) $$u_x\dot{u}_x + u_y\dot{u}_y = (1/m + r^2/A)(T_x u_x + T_y u_y).$$

Jeżeli $\overline{u} \neq 0$, to $\overline{T}$ ma kierunek $\overline{u}$, a zwrot przeciwny. Zatem stale jest $\overline{T}\overline{u} \leqslant 0$ czyli $T_x u_x + T_y u_y \leqslant 0$, skąd na mocy (12) $u_x\dot{u}_x + u_y\dot{u}_y \leqslant 0$. Ponieważ $u_x\dot{u}_x + u_y\dot{u}_y = \frac{1}{2}d(u_x^2 + u_y^2)/dt$, więc $|\overline{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2$ jest funkcją nie rosnącą. Jeżeli więc w pewnej chwili jest $\overline{u} = 0$, to poczynając od tej chwili będzie stale $\overline{u} = 0$.

Załóżmy, że w ciągu pewnego czasu było stale $\overline{u} \neq 0$. Tarcie $\overline{T}$ miało w ciągu tego czasu kierunek $\overline{u}$ (a zwrot przeciwny); możemy więc przyjąć, że $\overline{T} = \lambda\overline{u}$, gdzie $\lambda < 0$, (przyczem λ zależy od czasu). Zatem $\lambda u_x = T_x$ i $\lambda u_y = T_y$, skąd na mocy (11)

(13) $$u_x\dot{u}_y - \dot{u}_x u_y = 0.$$

Z równania (13) wynika, że $\overline{u}$ ma kierunek stały: kładąc bowiem $u = |\overline{u}|$ i oznaczając przez φ kąt między $\overline{u}$ a osią x, dostajemy $u_x = u\cos\varphi$, $u_y = u\sin\varphi$, $\dot{u}_x = \dot{u}\cos\varphi - u\dot{\varphi}\sin\varphi$ i $\dot{u}_y = \dot{u}\sin\varphi + u\dot{\varphi}\cos\varphi$, więc $u_x\dot{u}_y - \dot{u}_x u_y = u^2\dot{\varphi}$, skąd na mocy (13) $u^2\dot{\varphi} = 0$, a ponieważ $u^2 \neq 0$, więc $\dot{\varphi} = 0$ czyli $\varphi = \text{const}$.

Ponieważ zaś $\overline{T}$ ma kierunek prędkości $\overline{u}$, więc również kierunek tarcia $\overline{T}$ jest stały. Przy założeniu stałości współczynnika tarcia μ (str. 368) otrzymamy stąd na mocy (4) $T = \text{const}$.

A więc: *przez cały czas, w którym jest* $\overline{u} \neq 0$, *jest* $\overline{T} = \text{const}$.

Ponieważ ruch punktu materialnego pod wpływem siły stałej odbywa się po paraboli (str. 81), więc *środek masy kuli zakreśla parabolę* (o osi równoległej do kierunku $\overline{T}$) *przez cały czas, w którym* $\overline{u} \neq 0$ (t. j. *w którym punkt styczności kuli z płaszczyzną* Π *ma prędkość różną od zera*).

Przyjmijmy, że w chwili początkowej $t = 0$ jest:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = r, \quad \dot{x}_0 = a, \quad \dot{y}_0 = b, \quad \dot{z}_0 = 0,$$

$$\omega_x = \omega_x^0, \quad \omega_y = \omega_y^0, \quad \omega_z = \omega_z^0. \tag{14}$$

Prędkość początkowa $\overline{u}_0$ punktu styczności S ma więc na mocy (9) rzuty:

$$u_x^0 = a + r\omega_y^0, \quad u_y^0 = b - r\omega_x^0, \quad u_z^0 = 0. \tag{15}$$

Załóżmy, że $\overline{u}_0 \neq 0$ i nadajmy osi y kierunek i zwrot prędkości $\overline{u}_0$. Na mocy (15) będą więc między danymi początkowymi zachodziły związki:

$$u_x^0 = a + r\omega_y^0 = 0, \quad u_y^0 = b - r\omega_x^0 > 0. \tag{16}$$

Że zaś $\overline{u}$ i $\overline{T}$ mają kierunki równe, lecz zwroty przeciwne, więc

$$T_x = 0, \quad T_y = -\mu m g. \tag{17}$$

Z równań (3) i (7) po scałkowaniu i uwzględnieniu warunków początkowych, otrzymamy:

$$x_0 = at, \quad y_0 = -\tfrac{1}{2}\mu g t^2 + bt, \quad z_0 = r. \tag{18}$$

$$\omega_x = \mu m g r t / A + \omega_x^0, \quad \omega_y = \omega_y^0, \quad \omega_z = \omega_z^0. \tag{19}$$

Podstawiając wartości z (18) i (19) w równania (9), otrzymamy wobec (16):

$$u_x = 0, \quad u_y = (b - r\omega_x^0) - (1 + mr^2/A) g t \mu, \quad u_z = 0. \tag{20}$$

Ponieważ na mocy (16) jest $b - r\omega_x^0 > 0$, więc po czasie

$$t_1 = \frac{b - r\omega_x^0}{(1 + mr^2/A)\mu g} \tag{21}$$

będzie $u_x=0$, $u_y=0$ i $u_z=0$, czyli $\bar{u}=0$ i od chwili t_1 będzie już stale $\bar{u}=0$. Na mocy (11) będzie więc stale $T_x=0$ i $T_y=0$ czyli $\bar{T}=0$. Z równań (3) i (7) otrzymamy wówczas:

$$\ddot{x}_0=0, \quad \ddot{y}_0=0, \quad \ddot{z}_0=0, \quad \dot{\omega}_x=0, \quad \dot{\omega}_y=0, \quad \dot{\omega}_z=0.$$

A więc: *od chwili* t_1 *będzie stale* $\bar{v}_0=$const. *i* $\bar{\omega}=$const., *t. zn. że środek kuli poruszać się będzie od chwili* t_1 *ruchem jednostajnym po linii prostej, zaś prędkość chwilowa kątowa kuli będzie stała.*

§ 10. Giroskop Foucaulta. Tak nazywamy ciało ciężkie, posiadające oś symetrii i zawieszone w środku masy (t. zw. *zawieszenie Cardana*).

Ponieważ siła ciężkości zaczepiona jest w środku masy, więc w przypadku, gdy na ciało nie działają żadne inne siły, ruch giroskopu sprowadza się do obrotu ciała około środka masy bez działania sił.

Jeżeli ciało wprawimy w obrót około środka masy i w chwili początkowej oś symetrii będzie osią obrotu chwilowego, to oś symetrii będzie zachowywała stały kierunek w przestrzeni. Wynika to z twierdzenia podanego na str. 403 i z uwagi, że oś symetrii jest osią środkową bezwładności ciała.

Oś symetrii będzie się wprawdzie poruszała względem ziemi, będzie to jednak tylko ruch pozorny (wywołany obrotem ziemi): jeżeli bowiem skierować oś symetrii ku jakiejś gwieździe stałej, to oś będzie ją stale wskazywać.

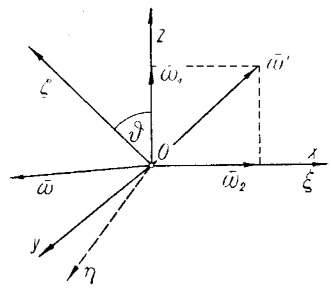
Rozpatrzymy tutaj przypadki, w których oś symetrii nie jest swobodna, lecz uwięziona bądź w płaszczyźnie południka, bądź w płaszczyźnie poziomej.

Ruch osi symetrii w płaszczyźnie południka. Niech oś symetrii ciała (zawieszonego w środku masy) może się poruszać tylko w płaszczyźnie południka, przechodzącego przez dany punkt na ziemi. Możemy założyć, że siły (reakcje), utrzymujące oś w płaszczyźnie południka, są do tej płaszczyzny prostopadłe i zaczepione w punktach osi symetrii.

Oznaczmy przez $\bar{\omega}_1$ wektor prędkości kątowej ziemi i połóżmy:

$$\omega_1=|\bar{\omega}_1|. \tag{1}$$

Przyjmijmy środek O masy ciała za początek układu współrzędnych (x,y,z), nadając osi z kierunek i zwrot prędkości kątowej ziemi ω_1, zaś osi x kierunek poziomy ze zwrotem na wschód.



Płaszczyzna yz będzie zatem płaszczyzną południka, a oś z będzie w danym miejscu tworzyć z pionem kąt $90^0-\varphi$, gdzie φ oznacza szerokość geograficzną tego miejsca.

Obierzmy ponadto drugi układ współrzędnych (ξ, η, ζ) o początku O, przyjmując za oś ζ oś symetrii ciała, a za oś ξ oś x. Płaszczyzna $\eta\zeta$ będzie zatem identyczna z płaszczyzną południka yz. Położenie układu (ξ, η, ζ) określone jest przez kąt ϑ, jaki tworzą z sobą osie ζ i z (przyczem kąt ϑ określamy jako kąt, o który należy obrócić oś z w kierunku od ręki prawej ku lewej względem osi x, aby kierunki dodatnie osi z i ζ pokryły się z sobą).

Niech $\bar{\omega}'$ będzie chwilową prędkością kątową układu (ξ, η, ζ) względem układu inercjalnego, za który przyjmujemy układ związany ze słońcem i gwiazdami stałymi. Łatwo zauważyć, że $\bar{\omega}'$ jest wypadkową prędkości chwilowej kątowej $\bar{\omega}_2$ układu (ξ, η, ζ) względem (x, y, z) i prędkości kątowej $\bar{\omega}_1$ układu (x, y, z) względem układu inercjalnego. Zatem

(2) $$\bar{\omega}' = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2.$$

Ponieważ wektor $\bar{\omega}_1$ ma z założenia kierunek i zwrot osi z, więc jego rzuty na osie układu (ξ, η, ζ) wynoszą na mocy (1):

(3) $$\omega_{1_\xi} = 0, \qquad \omega_{1_\eta} = -\omega_1 \sin\vartheta, \qquad \omega_{1_\zeta} = \omega_1 \cos\vartheta.$$

Układ (ξ, η, ζ) obraca się około osi ξ względem układu (x, y, z). Ponieważ kąt obrotu wynosi ϑ, więc prędkość chwilowa kątowa ma kierunek osi ξ i jej współrzędna względem osi ξ wynosi $\dot{\vartheta}$. Zatem:

(4) $$\omega_{2_\xi} = \dot{\vartheta}, \qquad \omega_{2_\eta} = 0, \qquad \omega_{2_\zeta} = 0.$$

Na mocy (2)-(4) jest:

(5) $$\omega'_\xi = \dot{\vartheta}, \qquad \omega'_\eta = -\omega_1 \sin\vartheta, \qquad \omega'_\zeta = \omega_1 \cos\vartheta.$$

Niech $\bar{\omega}$ oznacza prędkość chwilową kątową ciała względem układu inercjalnego. Wektor ω uważać możemy za złożenie prędkości chwilowej kątowej $\bar{\omega}_3$ ciała względem układu (ξ, η, ζ) oraz prędkości $\bar{\omega}'$ układu (ξ, η, ζ) względem układu inercjalnego. Zatem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}'$. Ponieważ ruch ciała względem (ξ, η, ζ) jest obrotem około osi ζ, więc $\omega_{3_\xi} = 0$ i $\omega_{3_\eta} = 0$, skąd:

(6) $$\omega_\xi = \omega'_\xi, \qquad \omega_\eta = \omega'_\eta, \qquad \omega_\zeta = \omega_{3_\zeta} + \omega'_\zeta$$

(przytem, ponieważ ω_1 jest bardzo małe, więc na mocy (5) ω'_ξ jest również małe; praktycznie więc $\omega_\zeta = \omega_{3\zeta}$). Kładąc $\omega_\zeta = \omega$, otrzymamy na mocy (5) i (6):

$$(7) \qquad \omega_\xi = \dot{\vartheta}, \qquad \omega_\eta = -\omega_1 \sin\vartheta, \qquad \omega_\zeta = \omega.$$

Osie ξ, η, ζ są osiami środkowymi bezwładności ciała, gdyż ζ jest osią symetrii, zaś O środkiem masy. Oznaczając kręt względem O przez $\bar{K}$, momenty bezwładności względem ξ i η przez A, a względem ζ przez C, otrzymamy na mocy (III), str. 396, i (7):

$$(8) \qquad K_\xi = A\dot{\vartheta}, \qquad K_\eta = -A\omega_1 \sin\vartheta, \qquad K_\zeta = C\omega,$$

skąd po zróżniczkowaniu:

$$(9) \qquad \dot{K}_\xi = A\ddot{\vartheta}, \qquad \dot{K}_\eta = -A\omega_1\dot{\vartheta}\cos\vartheta, \qquad \dot{K}_\zeta = C\dot{\omega}.$$

Moment ciężaru względem O jest zerem. Moment sił, utrzymujących oś symetrii ciała w płaszczyźnie południka, jest względem osi ξ i ζ zerem, gdyż siły te zaczepione są w punktach osi ζ i są równoległe do osi ξ. Oznaczając więc przez $\bar{M}$ moment sił względem środka masy O, otrzymujemy:

$$(10) \qquad M_\xi = 0, \qquad M_\zeta = 0.$$

Do wyznaczenia ruchu ciała zastosujemy równania (II), str. 400. Z równań tych po podstawieniu w nie wartości z (5), (8), (9) i (10) i po zredukowaniu otrzymamy:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} &A\ddot{\vartheta} - A\omega_1^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + C\omega\omega_1 \sin\vartheta = 0, \\ &-2A\omega_1\dot{\vartheta}\cos\vartheta + C\omega\dot{\vartheta} = M_\eta, \qquad C\dot{\omega} = 0. \end{aligned}$$

Na mocy ostatniego równania $\omega = \text{const}$. Opuszczając w pierwszym z równań (I) wyraz zawierający ω_1^2, jako bardzo mały, otrzymamy

$$(11) \qquad \ddot{\vartheta} = -\frac{C\omega\omega_1}{A} \sin\vartheta.$$

Ponieważ $\omega = \text{const.}$, więc osi ζ możemy nadać taki zwrot, by było stale $\omega > 0$, t. zn. by obrót ciała względem osi symetrii ζ odbywał się w kierunku od ręki prawej ku lewej. Przy tym założeniu będzie $C\omega\omega_1/A > 0$. Równanie (11) ma więc postać równania różniczkowego dla wahadła matematycznego (str. 132, wzór (I)). Położenie równowagi następuje przy $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \pi$.

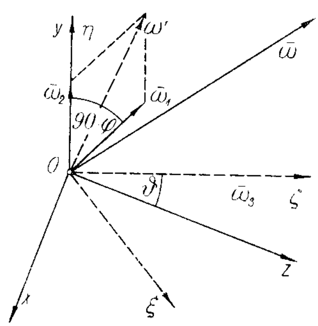
Oś symetrii ciała będzie się więc wahała około osi z, t.j. około prostej równoległej do osi ziemskiej. Oś ciała może być w spoczynku tylko dla $\vartheta=0$ lub dla $\vartheta=\pi$, t.j. tylko wówczas gdy jest do osi ziemi równoległa. Wyznaczając zatem położenie równowagi osi ciała, otrzymujemy kierunek osi ziemi. Ponieważ w danym miejscu oś ziemi tworzy z pionem kąt $90^0-\varphi$, więc *w ten sposób możemy otrzymać szerokość geograficzną* φ *danego miejsca.*

Można wykazać, że $\vartheta=0$ jest położeniem równowagi stałej, zaś $\vartheta=\pi$ równowagi chwiejnej. Oś ζ ciała stara się więc tak ustawić, aby jej kierunek i zwrot zgodne były z kierunkiem osi ziemskiej i zwrotem wektora $\bar{\omega}_1$. Ze wzoru (3), str. 132, wynika, że okres wahania osi ciała (gdy kąt początkowy ϑ_0 jest mały i $\dot{\vartheta}_0=0$) wynosi

$$T=2\pi\sqrt{A/C\omega\omega_1}. \tag{12}$$

Okres wahania jest duży, bo ω_1 jest małe (około $0{,}00007\ \text{sek}^{-1}$). Możemy go jednak zmniejszyć, zwiększając ω, t. j. nadając ciału szybszy obrót około własnej osi symetrii.

Ruch osi w płaszczyźnie poziomej. Załóżmy teraz, że oś symetrii ciała może się poruszać jedynie w płaszczyźnie poziomej. Możemy więc przyjąć, że reakcje, utrzymujące oś poziomo, zaczepione są w punktach tej osi i mają kierunek pionowy.



Obierzmy dwa układy współrzędnych (x,y,z) i (ξ,η,ζ) o początku w środku O masy ciała. Nadajmy osi y zwrot pionowy ku górze, osi x zwrot na wschód, a osi z na północ. Przyjmijmy oś symetrii ciała za oś ζ, a oś y za oś η. Płaszczyzna $\xi\zeta$ będzie zatem stale poziomą. Położenie układu (ξ,η,ζ) określone jest przez kąt ϑ między osiami ζ a z (przyczem kąt ϑ określamy jako kąt, o jaki trzeba obrócić oś z około osi y w kierunku od ręki prawej ku lewej, aby kierunki dodatnie osi ζ i z pokryły się z sobą).

Prędkość chwilowa kątowa układu (x,y,z) względem układu inercjalnego równa jest ω_1 (t. j. prędkości kątowej ziemi). Wektor $\bar{\omega}_1$ leży w płaszczyźnie yz i tworzy z osią y kąt $90^0-\varphi$ (gdzie φ oznacza szerokość geograficzną danego miejsca). Niech $\omega_1=|\bar{\omega}_1|$. Rzuty $\bar{\omega}_1$ na osie ξ,η,ζ wyniosą zatem:

$$\omega_{1_\xi}=\omega_1\cos\varphi\sin\vartheta,\qquad \omega_{1_\eta}=\omega_1\sin\varphi,\qquad \omega_{1_\zeta}=\omega_1\cos\varphi\cos\vartheta. \tag{13}$$

Prędkość chwilowa kątowa $\overline{\omega}_2$ układu (ξ, η, ζ) względem układu (x, y, z) równa jest $\dot{\vartheta}$ i ma kierunek osi η, gdyż (ξ, η, ζ) obraca się około η względem (x, y, z). Zatem prędkość chwilowa kątowa $\overline{\omega}'$ układu (ξ, η, ζ) względem układu inercjalnego jest złożeniem prędkości kątowej ω_2 i prędkości kątowej ω_1, skąd na mocy (13):

$$(14) \qquad \omega'_\xi = \omega_1 \cos\varphi \sin\vartheta, \qquad \omega'_\eta = \dot{\vartheta} + \omega_1 \sin\varphi, \qquad \omega'_\zeta = \omega_1 \cos\varphi \cos\vartheta.$$

Niech ω oznacza prędkość chwilową kątową ciała względem układu inercjalnego. Ponieważ ruch chwilowy ciała względem układu (ξ, η, ζ) jest obrotem chwilowym około osi ζ, więc prędkość chwilowa kątowa ω_3 ciała względem układu (ξ, η, ζ) ma na osie tego układu rzuty $\omega_{3_\xi} = 0$, $\omega_{3_\eta} = 0$. Z uwagi na to, że $\overline{\omega} = \overline{\omega}' + \omega_3$, otrzymamy na mocy (14) (kładąc $\omega_\zeta = \omega$):

$$(15) \qquad \omega_\xi = \omega_1 \cos\varphi \sin\vartheta, \qquad \omega_\eta = \dot{\vartheta} + \omega_1 \sin\varphi, \qquad \omega_\zeta = \omega.$$

Oznaczając kręt względem O przez $\overline{K}$, momenty bezwładności względem osi ξ i η przez A, a względem osi ζ przez C, otrzymamy na mocy (III), str. 396, i (15):

$$(16) \qquad K_\xi = A\omega_1 \cos\varphi \sin\vartheta, \qquad K_\eta = A(\dot{\vartheta} + \omega_1 \sin\varphi), \qquad K_\zeta = C\omega,$$

skąd przez różniczkowanie:

$$(17) \qquad \dot{K}_\xi = A\omega_1 \dot{\vartheta} \cos\varphi \cos\vartheta, \qquad \dot{K}_\eta = A\ddot{\vartheta}, \qquad \dot{K}_\zeta = C\dot{\omega}.$$

Oznaczając przez $\overline{M}$ moment sił działających, otrzymamy z uwagi na to, że reakcje utrzymujące oś ciała w płaszczyźnie poziomej zaczepione są w punktach osi ζ ciała i prostopadłe do $\xi\zeta$:

$$(18) \qquad M_\eta = 0, \qquad M_\zeta = 0.$$

Ze wzorów (II), str. 400, otrzymamy po podstawieniu wartości z (17), (16), (14) i (18):

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{aligned} &A\omega_1\dot{\vartheta}\cos\varphi\cos\vartheta + A(\dot{\vartheta}+\omega_1\sin\varphi)\omega_1\cos\varphi\cos\vartheta - C\omega(\dot{\vartheta}+\omega_1\sin\varphi) = M_\xi, \\ &A\ddot{\vartheta} + C\omega\omega_1\cos\varphi\sin\vartheta - A\omega_1^2\cos^2\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta = 0, \qquad C\dot{\omega} = 0. \end{aligned}$$

Na mocy ostatniego z równań (II) jest $\omega = \mathrm{const}$. Opuszczając w drugim z tych równań wyraz zawierający ω_1^2, jako bardzo mały, dostaniemy

$$(19) \qquad \ddot{\vartheta} = -\frac{C\omega\omega_1\cos\varphi}{A}\sin\vartheta.$$

Nadajmy osi ζ zwrot taki, by było $\omega > 0$. Wówczas

$$C\omega\omega_1 \cos\varphi/A > 0$$

i równanie (19) przyjmie postać równania wahadła matematycznego ((I), str. 132). Położenie równowagi nastąpi przy $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \pi$.

Oś symetrii ciała będzie się więc wahać około osi z, t. j. około osi poziomej, biegnącej z południa na północ. Oś ciała może być w spoczynku tylko dla $\vartheta = 0$ lub $\vartheta = \pi$, t. j. tylko wówczas, gdy leży w płaszczyźnie południka. Wyznaczając zatem położenie równowagi osi ciała, *otrzymujemy kierunek południka: ciało może więc być użyte jako kompas.*

Zauważmy jeszcze, że tak jak poprzednio $\vartheta = 0$ odpowiada położeniu równowagi stałej, zaś $\vartheta = \pi$ położeniu równowagi chwiejnej.

Okres wahania otrzymamy ze wzoru (3), str. 132:

$$T = 2\pi\sqrt{A/C\omega\omega_1 \cos\varphi}. \tag{20}$$

Będzie on najmniejszy na równiku (t. j. przy $\varphi = 0$). Na biegunie zaś (t. j. przy $\varphi = 90^0$), każde położenie będzie położeniem równowagi, jak wynika ze wzoru (19). Dla $\varphi = 90^0$ jest bowiem $\ddot{\vartheta} = 0$; w miarę zbliżania się do bieguna będzie więc $T \to \infty$.

Otrzymane wyniki znalazły potwierdzenie w doświadczeniu, co dowodzi obrotu ziemi około osi. Doświadczenia takie pierwszy wykonał L. Foucault.