ROZDZIAŁ IX

ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH

§ 1. Układy holonomiczne skleronomiczne. W przypadku równowagi układu nieswobodnego punktów materialnych lub ciał sztywnych, w którym tarcie nie występuje, ograniczenia ruchów (więzy) są niezależne od czasu i polegają zazwyczaj na tym, że pewne tylko położenia układu są możliwe, inne zaś wykluczone.

Przykładami są: punkt materialny, mający pozostawać na nieruchomej linii lub powierzchni, układ dwóch punktów materialnych, połączonych drutem sztywnym bez masy, ciało sztywne, mające punkt lub oś unieruchomioną, układ ciał sztywnych, stykających się z sobą lub połączonych przegubowo, i t.p.

Ograniczenia ruchu układu mogą być wywołane w różny sposób: np. z pomocą ciał sztywnych, podpór i t.d. Okazuje się jednak, że w przypadku, gdy nie ma tarcia, warunki równowagi sił działających nie zależą od tego, skąd pochodzą więzy, lecz tylko od tego, jakie położenia są możliwe. Ponadto, jeżeli chodzi o badanie równowagi układu, to wystarcza znajomość tych tylko zgodnych z więzami położeń, które są bliskie położenia badanego.

Zajmiemy się najpierw pytaniem, w jaki sposób możemy przedstawić położenia układu zgodne z więzami. Rozważymy tę sprawę najpierw na przykładach.

Więzy obustronne.

Przykład 1. Załóżmy, że punkt materialny ma pozostawać na pewnej powierzchni S. Więzy możemy określić, podając równanie tej powierzchni np. w postaci

$$F(x,y,z)=0. \tag{1}$$

Możliwe będą tylko te położenia punktu, w których współrzędne x, y, z spełniają równanie (1). Do zbadania równowagi punktu w jakimś położeniu $A(x, y, z)$ wystarcza, jeżeli (1) jest równaniem płata powierzchni S, na którym punkt ten leży.

Przykład 2. Załóżmy, że punkt materialny ma znajdować się na krzywej C o równaniach:

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0; \tag{2}$$

wówczas współrzędne punktu muszą spełniać równania (2). Do zbadania równowagi punktu wystarczy, jeżeli równania (2) przedstawiają tylko łuk krzywej C, wewnątrz którego leży punkt materialny.

Przykład 3. Jeżeli układ złożony z dwóch punktów A_1 i A_2 jest układem sztywnym (t. j. odległość punktów $A_1A_2 = \text{const.} = d$), wówczas współrzędne x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 tych punktów muszą spełniać równanie

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - d^2 = 0. \tag{3}$$

Jeżeli ponadto np. suma odległości punktów od początku O układu współrzędnych jest stała i wynosi h, wówczas współrzędne punktów muszą spełniać oprócz równania (3) równanie

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - h = 0. \tag{4}$$

Przykład 4. Jeżeli układ złożony z n punktów:

$$A_1(x_1, y_1, z_1), \quad A_2(x_2, y_2, z_2), \quad \ldots, \quad A_n(x_n, y_n, z_n)$$

jest układem sztywnym (t. zn. że wzajemne odległości jego punktów są stałe), wówczas współrzędne każdej pary punktów A_i, A_j muszą spełniać równanie

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - r_{ij}^2 = 0, \tag{5}$$

gdzie $r_{ij} = A_iA_j$. Równań (5) jest tyle, ile par punktów, t. j. $n(n-1)/2$.

W przykładach 1-4 więzy dały się przedstawić równaniami postaci

$$F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \tag{6}$$

gdzie F jest funkcją określoną w pewnym obszarze zmiennych $x_1, \ldots, z_n$ i niezależną od czasu t.

Więzy przedstawione równaniami (6) nazywamy *więzami holonomicznymi obustronnymi* (*lub dwustronnymi*) *niezależnymi od czasu*.

Więzy jednostronne.

Przykład 5. Punkt ma znajdować się wewnątrz lub na powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$ (jak np. punkt materialny uwiązany na nici nierozciągliwej o długości r i uczepionej w początku układu). Współrzędne punktu muszą zatem spełniać nierówność

$$x^2+y^2+z^2-r^2 \leqslant 0, \tag{7}$$

wyrażającą, że odległość punktu materialnego od początku układu współrzędnych jest nie większa od r.

Przykład 6. Dwa punkty materialne A_1, A_2 połączone są nicią nierozciągliwą o długości h, przewiniętą przez początek O układu współrzędnych. Zatem $OA_1+OA_2 \leqslant h$. Współrzędne punktów spełniają więc nierówność

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-h \leqslant 0. \tag{8}$$

W przykładach 5 i 6 więzy dały się wyrazić przez nierówności postaci

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) \leqslant 0. \tag{9}$$

Więzy, określone nierównościami kształtu (9), nazywamy *więzami holonomicznymi jednostronnymi niezależnymi od czasu.*

Uwaga. Jeżeli więzy są podane nierównością

$$\Psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) \geqslant 0,$$

to kładąc $\Psi=-\Phi$, otrzymamy po zmianie znaku postać (9).

Położenie układu w którym związek (9) przyjmuje postać równości (t.j. w którym $\Phi=0$), nazywamy *położeniem brzeżnym.*

W przykładach 5 i 6 położenie brzeżne występuje wówczas, gdy nić jest napięta.

Więzy układu mogą się składać równocześnie z więzów dwustronnych i jednostronnych postaci (6) i (9). Jeżeli np. punkt materialny ma znajdować się na górnej półkuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$, to współrzędne punktu muszą spełniać związki:

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0, \qquad z \geqslant 0 \quad (\text{czyli } -z \leqslant 0). \tag{10}$$

Układ, którego więzy dają się przedstawić przy pomocy związków postaci (6) lub (9), nazywamy układem *holonomicznym skleronomicznym.* O związkach zaś (6) i (9) mówimy, że przedstawiają *więzy w postaci skończonej.*

W rozdziale tym będziemy się zajmowali wyłącznie układami holonomicznymi skleronomicznymi.

Stopień swobody układu. Gdy badamy równowagę układu, zakładamy na ogół, iż dla położeń bliskich położeniu badanemu więzy obustronne polegają na tym, że współrzędne punktów układu muszą spełniać równania:

$$(11)\qquad \begin{array}{c} F_1(x_1,y_1,z_1,\ x_2,y_2,z_2,\ldots,\ x_n,y_n,z_n)=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_m(x_1,y_1,z_1,\ x_2,y_2,z_2,\ldots,\ x_n,y_n,z_n)=0, \end{array}$$

co piszemy krócej

$$(\mathrm{I})\qquad F_j(x_1,\ldots,z_n)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m).$$

O funkcjach F_j zakładamy na ogół, że są ciągłe i mają pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu ciągłe w pewnym otoczeniu wartości $x_1,\ldots,z_n$, określających dane położenie układu.

Ponadto zakładamy o tych funkcjach, że są w tym otoczeniu *niezależne*, t.zn. że żadna z nich nie jest funkcją pozostałych.

Zakładać będziemy wreszcie, że $m<3n$. Gdyby bowiem było $m=3n$, to układ równań (I) miał by na ogół jedno tylko rozwiązanie, a więc było by możliwe jedno tylko położenie układu, gdyby zaś było $m>3n$, to na ogół układ równań (I) nie miałby żadnego rozwiązania, ponieważ niewiadomych byłoby mniej niż równań.

Liczbę $k=3n-m$ nazywamy *liczbą stopni swobody*.

Znając k zmiennych spośród zmiennych $x_1,\ldots,z_n$, możemy obliczyć z równań (I) pozostałe zmienne w liczbie $3n-k=m$.

Jeżeli układ jest swobodny, to $m=0$ czyli $k=3n$. W szczególności, punkt materialny swobodny ma więc 3 stopnie swobody. Możemy wówczas obrać dowolnie wszystkie trzy jego współrzędne.

Jeżeli zaś punkt ma pozostawać na powierzchni (jak w przykładzie 1), wówczas współrzędne jego mają spełniać jedno tylko równanie (1). Zatem $m=1$ czyli $k=3\cdot 1-1=2$. Punkt, mający pozostawać na powierzchni, ma więc dwa stopnie swobody. Wówczas jedna z jego współrzędnych zależna jest od dwóch pozostałych.

Jeżeli wreszcie punkt ma pozostawać na linii (jak w przykładzie 2), to współrzędne jego muszą spełniać dwa równania (2). Zatem $k=3\cdot 1-2=1$ i punkt ma jeden tylko stopień swobody: znając jedną z jego współrzędnych, możemy wyznaczyć obie pozostałe.

Układ sztywny dwóch punktów (przykład 3) ma stopni swobody $3\cdot 2-1=5$. Jeżeli jednak układ ten ma spełniać oba równania (3) i (4), wówczas $k=3\cdot 2-2=4$.

Ogólnie, niech układ sztywny składa się z n punktów materialnych (jak w przykładzie 4). Współrzędne tych punktów muszą spełniać $n(n-1)/2$ równań (5). Równania te dla $n>3$ nie są jednak od siebie niezależne.

Zauważmy, że położenie układu sztywnego jest wyznaczone przez podanie trzech jego punktów (np. A_1, A_2, A_3), nie leżących na jednej prostej (str. 315). Znając więc współrzędne x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 i x_3, y_3, z_3 punktów A_1, A_2, A_3, będziemy mogli obliczyć współrzędne punktów $A_4, A_5, \ldots, A_n$ z równań (5).

Między współrzędnymi punktów A_1, A_2, A_3 zachodzą 3 równania postaci (5), wyrażające, że odległości A_1A_2, A_1A_3 i A_2A_3 są wielkościami stałymi. Z równań tych możemy wyznaczyć na ogół 3 niewiadome współrzędne, znając 6 pozostałych. Widzimy zatem, że znając pewne 6 współrzędnych spośród $3n$ współrzędnych $x_1, \ldots, z_n$, możemy obliczyć pozostałe z równań (5). Zatem liczba stopni swobody jest $k=6$.

A więc: *układ sztywny punktów posiada 6 stopni swobody.*

Ilość równań niezależnych jest $m=3n-k$, zatem $m=3n-6$. Spośród $n(n-1)/2$ równań (5) jest zatem niezależnych tylko $3n-6$.

§2. Przesunięcia przygotowane. Punkt na powierzchni. Załóżmy, że punkt materialny ma pozostawać stale na pewnej powierzchni S i znajduje się w punkcie A tej powierzchni.

Przesuńmy punkt z położenia A do B. Przesunięcie AB nazywamy *możliwym*, jeżeli B również leży na powierzchni S. W przeciwnym razie przesunięcie AB nazywamy *przesunięciem niemożliwym.*

Jeżeli punktowi materialnemu, znajdującemu się w A, nadamy prędkość $\bar{v}$, to prędkość tę nazywamy *możliwą* lub *zgodną z więzami*, gdy punkt może ją posiadać, poruszając się po powierzchni. W przeciwnym razie prędkość ta nazywa się *niemożliwą* lub *niezgodną z więzami.*

Łatwo zauważyć, że każdy wektor styczny do powierzchni w punkcie A przedstawia prędkość możliwą. Na odwrót, prędkości możliwe są wektorami stycznymi do powierzchni.

Ważną rolę odgrywają przesunięcia proporcjonalne do prędkości możliwych, t.j. takie, które dadzą się przedstawić przy pomocy wektorów równych wektorom prędkości możliwych.

Przesunięcia proporcjonalne do prędkości możliwych w punkcie A nazywamy *przesunięciami przygotowanymi* (lub *wirtualnymi*) w tym punkcie.

Przesunięcie przygotowane ma więc kierunek styczny do powierzchni, zwrot zaś i wielkość dowolną. Na ogół przesunięcia przygotowane nie są przesunięciami możliwymi. Są nimi jednak, gdy powierzchnia S jest np. płaszczyzną.

Niechaj powierzchnia S ma równanie

(1) $$F(x,y,z)=0.$$

Jeżeli punkt materialny znajduje się w punkcie A powierzchni S, to jego współrzędne x,y,z spełniają równanie (1). Przypuśćmy, że punkt materialny porusza się po powierzchni S w sposób zupełnie dowolny. Równanie (1) jest więc spełnione stale. Różniczkując (1) względem czasu t, otrzymamy

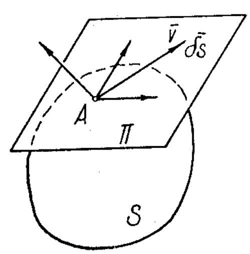
(2) $$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}=0.$$

Oznaczając przez $\bar{v}$ prędkość punktu, mamy $v_x=\dot{x}$, $v_y=\dot{y}$, $v_z=\dot{z}$, zatem

(3) $$\frac{\partial F}{\partial x}v_x+\frac{\partial F}{\partial y}v_y+\frac{\partial F}{\partial z}v_z=0.$$

Widzimy więc, że prędkości możliwie muszą spełniać równanie (3). Pochodne cząstkowe, występujące w tym równaniu, są proporcjonalne do współczynników kierunkowych normalnej do powierzchni w punkcie A. Równanie (3) wyraża zatem, że prędkość $\bar{v}$ jest prostopadła do normalnej, t.zn. że leży w płaszczyźnie stycznej.

Na odwrót, jeżeli jakaś prędkość spełnia równanie (3), to jest prędkością możliwą.



Oznaczmy przez $\overline{\delta s}$ dowolne przesunięcie punktu A, a przez $\delta x, \delta y, \delta z$ rzuty tego przesunięcia na osie układu. W myśl określenia przesunięcie przygotowane jest proporcjonalne do prędkości możliwej $\bar{v}$. Przesunięcie $\overline{\delta s}=\bar{v}$ będzie zatem przesunięciem przygotowanym.

A więc rzuty przesunięcia przygotowanego spełniają na mocy (3) równanie

(4) $$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z=0.$$

Na odwrót, jeżeli rzuty jakiegoś wektora $\overline{\delta s}$ spełniają równanie (4), to $\overline{\delta s}$ jest przesunięciem przygotowanym.

Możemy więc powiedzieć, że *przesunięcie przygotowane jest to wektor, którego rzuty spełniają równanie* (4).

Przykład 1. Punkt ma pozostawać na kuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$. Niech $A(x,y,z)$ będzie dowolnym punktem na tej kuli. Przesunięcia przygotowane w punkcie A spełniają równanie

$$2x\delta x+2y\delta y+2z\delta z=0 \quad \text{czyli} \quad x\delta x+y\delta y+z\delta z=0.$$

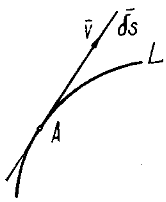
Przyjmując np. że $z\neq 0$, otrzymamy

$$\delta z=-(x\delta x+y\delta y)/z. \tag{5}$$

Obierając dowolnie δx i δy, zaś wartość δz przyjmując z (5), dostaniemy układ liczb $\delta x, \delta y, \delta z$, przedstawiających rzuty przesunięcia przygotowanego w punkcie A.

Punkt na linii. Załóżmy, że punkt materialny ma pozostawać na linii nieruchomej L, określonej równaniami:

$$F_1(x,y,z)=0, \qquad F_2(x,y,z)=0. \tag{6}$$



Jeżeli więc punkt materialny znajduje się w punkcie A, to współrzędne x,y,z tego punktu spełniają równania (6). Łatwo zauważyć, że punkt materialny może posiadać tylko takie prędkości, których kierunki są styczne do linii L w punkcie A. W myśl określenia przesunięcia przygotowane mają więc kierunki styczne do linii, a zwroty i długości dowolne.

Jeżeli punkt porusza się po linii L, równania (6) są spełnione stale. Różniczkując je, dostaniemy:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\dot{z}=0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\dot{z}=0. \tag{7}$$

Oznaczając przez $\overline{\delta s}$ przesunięcie przygotowane, a przez $\delta x,\delta y,\delta z$ jego rzuty, możemy przyjąć w myśl określenia $\overline{\delta s}=\bar{v}$, skąd $\delta x=v_x=\dot{x}$ i t.d. Na mocy więc (7):

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z=0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z=0. \tag{8}$$

Na odwrót, jeżeli jakieś przesunięcie $\overline{\delta s}$ spełnia równania (8), to jest przesunięciem przygotowanym.

Przykład 2. Punkt ma pozostawać na linii, określonej równaniami:

$$(9) \qquad x^2+y^2+z^2-r^2=0, \qquad x^2+2y^2-z=0.$$

Niech punkt $A(x,y,z)$ leży na tej linii. Przesunięcie przygotowane $\overline{\delta s}$ w punkcie A spełnia więc równania:

$$(10) \qquad x\delta x+y\delta y+z\delta z=0, \qquad 2x\delta x+4y\delta y-\delta z=0.$$

Jeżeli $x\neq 0$ i $y\neq 0$, to dostaniemy z (10):

$$\delta x=-(1+4z)\delta z/2x, \qquad \delta y=(1+2z)\delta z/2y.$$

Obierając więc dowolnie δz i wyznaczając następnie $\delta x, \delta y$ z ostatnich równań, otrzymamy układ liczb $\delta x, \delta y, \delta z$, określający przesunięcie przygotowane w A.

Jeżeli zaś np. $x=0$, to wobec $z\geqslant 0$ (co wynika z drugiego równania (9)), otrzymujemy na mocy (10) $\delta y=0$ i $\delta z=0$. W tym przypadku przesunięcie przygotowane będzie zatem miało rzuty $\delta x, 0, 0$, gdzie δx jest liczbą dowolną. A więc: przesunięcie przygotowane ma kierunek osi x.

Układy holonomiczne skleronomiczne. Określimy teraz przesunięcia przygotowane w przypadku ogólnym.

Niech dany będzie układ holonomiczny skleronomiczny n punktów materialnych $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Układ wektorów $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \dots, \overline{A_nB_n}$ (przedstawiających przesunięcia poszczególnych punktów) nazywamy krótko *przesunięciem układu*. Przesunięcie układu punktów $A_1, A_2, \dots, A_n$ nazywamy *możliwym*, jeżeli położenia końcowe $B_1, B_2, \dots, B_n$ są zgodne z więzami. W przeciwnym razie przesunięcie układu nazywamy *niemożliwym*.

Nadajmy punktom układu w położeniu $A_1, A_2, \dots, A_n$ dowolne prędkości $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$. Układ tych prędkości nazywamy *układem prędkości możliwych*, jeżeli punkty mogą mieć te prędkości, poruszając się zgodnie z więzami. W przeciwnym razie układ prędkości nazywamy *niemożliwym*.

Przesunięciem przygotowanym układu punktów materialnych w pewnym jego położeniu nazywamy takie przesunięcie, w którym poszczególne punkty doznają przesunięć proporcjonalnych do układu prędkości możliwych.

Jeżeli więc $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ jest układem prędkości możliwych, to przesunięcie przygotowane układu otrzymamy, nadając punktom układu przesunięcia:

$$\overline{\delta s_1} = \bar{v}_1, \quad \overline{\delta s_2} = \bar{v}_2, \quad \ldots, \quad \overline{\delta s_n} = \bar{v}_n. \tag{11}$$

Zauważmy, że jeżeli układ jest swobodny, to każde przesunięcie układu jest przesunięciem przygotowanym, gdyż każdy układ prędkości jest układem możliwym.

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem przesunięć przygotowanych. Rozpatrzymy najpierw przypadek więzów obustronnych, a następnie więzów jednostronnych.

Więzy obustronne. Załóżmy, że więzy określone są przez równania:

$$F_j(x_1, \ldots, z_n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{12}$$

którym muszą czynić zadość współrzędne $x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$ punktów układu. Nadajmy układowi dowolny ruch zgodny z więzami. Różniczkując równania (12), dostaniemy:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial z_n}\dot{z}_n = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{13}$$

Oznaczając przez $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ prędkości punktów układu otrzymamy więc $v_{1_x} = \dot{x}_1, \ldots, v_{n_z} = \dot{z}_n$, skąd

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_1} v_{1_x} + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial z_n} v_{n_z} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{14}$$

Wszelki zatem możliwy układ prędkości musi spełniać równania (14). Na odwrót, można okazać, że, jeżeli układ prędkości spełnia równania (14), to jest on układem prędkości możliwym.

Załóżmy, że przesunięcie układu, w którym kolejne punkty doznają przesunięć $\overline{\delta s_1}, \ldots, \overline{\delta s_n}$, jest przesunięciem przygotowanym. Prędkości $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ określone równaniami (11) tworzą zatem układ możliwy prędkości, wobec czego spełnione są równania (14). Oznaczając rzuty przesunięć odpowiednio przez $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, otrzymamy z (14)

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial z_n}\delta z_n = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{15}$$

lub, jak piszemy inaczej,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial F_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F_j}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{I}$$

A więc: każdy układ liczb $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, określający przesunięcie przygotowane układu punktów, spełnia układ równań (I). Na odwrót, każdy układ liczb $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, spełniający układ równań (I), określa przesunięcie przygotowane.

Opierając się na tym, możemy podać następującą definicję przesunięć przygotowanych (równoważną poprzedniej):

Przesunięciem przygotowanym układu, którego więzy podane są równaniami (12), *nazywamy każde przesunięcie* $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ *spełniające równania* (I).

Układ równań (I) (lub (15)) jest układem m równań o $3n$ niewiadomych $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$.

Zakładamy zazwyczaj, że równania (I) są od siebie niezależne. Dzięki temu możemy spośród niewiadomych $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ obrać dowolnie $k=3n-m$ niewiadomych, a pozostałe obliczyć z równań (I).

Jeżeli układ liczb $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ spełnia równania (I), to układ liczb $-\delta x_1, \ldots, -\delta z_n$ oczywiście również spełnia równania (I).

Przesunięcie przygotowane układu punktów nazywamy *odwracalnym*, jeżeli zmieniając w nim zwroty przesunięć poszczególnych punktów, otrzymamy znowu przesunięcie przygotowane układu.

Widzimy zatem, że *w przypadku więzów obustronnych przesunięcia przygotowane są odwracalne.*

Uwaga 1. Różniczka funkcji $F_j(x_1, \ldots, z_n)$ wynosi

$$dF_j = \frac{\partial F_j}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial z_n} dz_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F_j}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial F_j}{\partial z_i} dz_i \right).$$

Widzimy stąd, że lewą stronę równości (I) otrzymamy, tworząc formalnie różniczkę funkcji F_j i pisząc następnie $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ zamiast $dx_1, \ldots, dz_n$.

Uwaga 2. Niech dana będzie funkcja $V(x_1, \ldots, z_n)$, określona w pewnym obszarze zmiennych $x_1, \ldots, z_n$ i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi w tym obszarze. Obierzmy dowolny układ wartości zmiennych $x_1, \ldots, z_n$ i oznaczmy przez $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ dowolne przyrosty tych zmiennych.

Nie oznaczamy tu przyrostów symbolami $\Delta x_1, \ldots, \Delta z_n$, gdyż w przypadku, gdy zmienne $x_1, \ldots, z_n$ są funkcjami czasu t, symbolami $\Delta x_1, \ldots, \Delta z_n$ oznacza się zwykle przyrost tych zmiennych w czasie Δt. Symbole $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ służą natomiast do zaznaczenia, że przyrosty są zupełnie dowolne i nic nie mają wspólnego z przyrostami zmiennych niezależnych, od których zależą $x_1, \ldots, z_n$ (w danym razie od czasu t).

Na mocy twierdzenia Taylora mamy:

$$V(x_1+\delta x_1, \dots, z_n+\delta z_n) - V(x_1, \dots, z_n) = \tag{16}$$
$$= \frac{\partial V}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial z_n}\delta z_n + R,$$

gdzie resztę R możemy napisać w postaci

$$R = \varepsilon\,(|\delta x_1| + \dots + |\delta z_n|), \tag{17}$$

przyczem ε zależy od $\delta x_1, \dots, \delta z_n$ i dąży do 0 wraz z $\delta x_1, \dots, \delta z_n$.

Połóżmy $\delta V = \frac{\partial V}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial z_n}\delta z_n$ czyli

$$\delta V = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right). \tag{18}$$

Na mocy (16) mamy

$$V(x_1+\delta x_1, \dots, z_n+\delta z_n) - V(x_1, \dots, z_n) = \delta V + R. \tag{19}$$

Jeżeli liczba $|\delta x_1| + \dots + |\delta z_n|$ jest dostatecznie mała, to $|\varepsilon|$ także jest małą liczbą, a zatem $|R|$ jest na mocy (17) znikome w stosunku do $|\delta x_1| + \dots + |\delta z_n|$. W tym więc przypadku δV przedstawia w przybliżeniu przyrost funkcji V. Wyrażamy to zazwyczaj, mówiąc, że δV oznacza przyrost funkcji V, odpowiadający „nieskończenie małym" przyrostom $\delta x_1, \dots, \delta z_n$ zmiennych $x_1, \dots, z_n$, lub że dla „nieskończenie małych" przyrostów mamy

$$V(x_1+\delta x_1, \dots, z_n+\delta z_n) - V(x_1, \dots, z_n) = \delta V. \tag{20}$$

Powyższy sposób wyrażania się nie jest zupełnie ścisły, jest jednak wygodny. Podajemy go, gdyż często używają go fizycy.

Równania (1), str. 428, określające przesunięcia przygotowane, możemy, opierając się na (18), napisać w postaci

$$\delta F_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, m). \tag{21}$$

W położeniu układu zgodnym z więzami mamy $F_j = 0$ $(j = 1, 2, \dots, m)$. Na mocy więc (21) mamy dla przesunięć przygotowanych $F_j + \delta F_j = 0$ $(j = 1, 2, \dots, m)$. Na mocy (20) możemy przeto powiedzieć, że po „nieskończenie małym" przesunięciu przygotowanym układ znajduje się również w położeniu zgodnym z więzami. Stąd pochodzi określenie przesunięcia przygotowanego jako „przesunięcia nieskończenie małego, zgodnego z więzami". Określenie to (nieścisłe, ale dość intuicyjne) rozumieć należy w wyżej podanym znaczeniu.

Przykład 3. Układ złożony z dwóch punktów materialnych A_1, A_2 ma zachować stałą odległość $A_1A_2 = r$. Współrzędne x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 tych punktów spełniają zatem równanie

$$(22) \qquad (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-r^2=0.$$

Przesunięcie przygotowane układu jest więc określone równaniem

$$(23) \quad (x_1-x_2)(\delta x_1-\delta x_2)+(y_1-y_2)(\delta y_1-\delta y_2)+(z_1-z_2)(\delta z_1-\delta z_2)=0.$$

Z liczb δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2 możemy tedy obrać pięć dowolnie, a szóstą wyznaczyć z (23).

Przyjmijmy np., że $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, $x_2 = r$, $y_2 = z_2 = 0$. Równanie (23) przyjmie wtedy postać

$$(24) \qquad -r(\delta x_1-\delta x_2)+0\cdot(\delta y_1-\delta y_2)+0\cdot(\delta z_1-\delta z_2)=0.$$

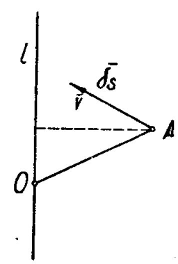
Równanie (24) będzie spełnione przy dowolnych wartościach $\delta x_2, \delta y_1, \delta y_2, \delta z_1, \delta z_2$, jeżeli przyjmiemy $\delta x_1 = \delta x_2$. Przesunięcia przygotowane punktów A_1, A_2 mają więc równe rzuty na kierunek A_1A_2. Wynika to łatwo z twierdzenia podanego na str. 323, w myśl którego rzuty prędkości punktów A_1, A_2 na prostą łączącą te punkty są równe.

Przykład 4. Ciało sztywne swobodne. Załóżmy, że ciało sztywne jest układem sztywnym punktów materialnych (str. 194).

Nadajmy ciału dowolny ruch postępowy o prędkości $\overline{\delta u}$. Ponieważ punkty ciała będą miały tę samą prędkość $\overline{\delta u}$, więc przesunięcie przygotowane ciała otrzymamy, przyjmując, że punkty ciała doznały równych przesunięć:

$$(25) \qquad \overline{\delta s} = \overline{\delta u}.$$

Wynika stąd, że *translacja ciała jest przesunięciem przygotowanym.*



Nadajmy ciału dowolny ruch obrotowy o prędkości kątowej $\overline{\delta\omega}$ około osi, przechodzącej przez (dowolny) punkt O. Prędkość dowolnego punktu A ciała równa się $\overline{\delta w} = \overline{OA} \times \overline{\delta\omega}$ (str. 46). Przesunięcie przygotowane ciała otrzymamy więc, nadając dowolnemu punktowi A przesunięcie $\overline{\delta s} = \overline{\delta w}$ czyli

$$(26) \qquad \overline{\delta s} = \overline{OA} \times \overline{\delta\omega}.$$

Wynika stąd, że *przesunięcie przygotowane ciała otrzymamy, nadając punktom ciała przesunięcia proporcjonalne do prędkości, jakie by miały, gdyby ciało obracało się około dowolnej osi z dowolną prędkością kątową.*

Zauważmy, że w tym przypadku przesunięcie przygotowane nie jest przesunięciem możliwym.

Najogólniejszy ruch chwilowy ciała sztywnego jest złożeniem ruchu postępowego i obrotowego (str. 334).

A więc: *najogólniejsze przesunięcie przygotowane ciała jest złożeniem dwóch przesunięć przygotowanych, z których jedno jest przesunięciem równoległym (translacją), w drugim zaś przesunięcia punktów są proporcjonalne do ich prędkości przy obrocie ciała około osi.*

Na mocy (25) i (26) najogólniejsze przesunięcie przygotowane ciała otrzymamy, obierając dowolnie punkt O oraz wektory $\overline{\delta u}$, $\overline{\delta \omega}$ i nadając każdemu punktowi A ciała przesunięcie

$$\overline{\delta s} = \overline{\delta u} + \overline{OA} \times \overline{\delta \omega}. \tag{27}$$

Dotychczas zakładaliśmy, że ciało sztywne jest swobodne. Rozpatrzymy teraz kilka przypadków ciała nieswobodnego.

Punkt unieruchomiony. Jeżeli ciało sztywne ma unieruchomiony jeden punkt, np. punkt O, to może się tylko obracać około tego punktu. Ruch chwilowy ciała jest zatem obrotem chwilowym około pewnej osi, przechodzącej przez O (str. 332). Najogólniejsze przesunięcie przygotowane ciała otrzymamy, nadając punktom ciała przesunięcia określone wzorem (26), w którym $\overline{\delta \omega}$ możemy obrać dowolnie.

Oś unieruchomiona. Jeżeli ciało sztywne ma unieruchomioną oś, wówczas ruch ciała może być tylko obrotem około tej osi. Zatem w przesunięciu przygotowanym ciała punkty mają przesunięcia określone wzorem (26), gdzie O jest dowolnym punktem osi, zaś $\overline{\delta \omega}$ jest dowolnym wektorem, mającym kierunek osi.

Ruch figury w płaszczyźnie. Ruch chwilowy figury płaskiej w jej płaszczyźnie jest bądź ruchem postępowym, bądź ruchem obrotowym około środka obrotu chwilowego (str. 327). W najogólniejszym więc przypadku przesunięcie przygotowane figury płaskiej jest albo przesunięciem równoległym albo przesunięciem, w którym przesunięcia punktów figury są proporcjonalne do prędkości tych punktów w ruchu obrotowym około pewnego punktu, leżącego w płaszczyźnie figury.

Przykład 5. Dwa punkty materialne A_1 i A_2, połączone prętem sztywnym (bez masy) o długości d, mają pozostawać na krzywych C_1 i C_2, leżących w płaszczyźnie poziomej i danych przez równania:

$$f_1(x,y)=0, \qquad f_2(x,y)=0. \tag{28}$$

Między współrzędnymi punktów A_1 i A_2 zachodzą więc związki:

$$f_1(x_1,y_1)=0, \quad f_2(x_2,y_2)=0, \qquad (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-d^2=0. \tag{29}$$

Równania (29) określają więzy układu. Przesunięcie przygotowane spełnia zatem równania:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1=0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\delta y_2=0, \tag{30}$$

$$(x_1-x_2)(\delta x_1-\delta x_2)+(y_1-y_2)(\delta y_1-\delta y_2)=0.$$

Możemy więc jedną z liczb $\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta y_2$ obrać dowolnie, a pozostałe otrzymać z równań (30). Zauważmy, że prędkości punktów A_1, A_2 są styczne do krzywych C_1, C_2. Środek O obrotu chwilowego pręta A_1A_2 jest zatem punktem przecięcia się normalnych w punktach A_1 i A_2 do krzywych C_1 i C_2 (por. przykład 1, str. 329). Ponieważ ruch chwilowy pręta może być tylko obrotem około O, więc punkty A_1 i A_2 mogą mieć prędkości tylko takie, których kierunki są styczne do C_1 i C_2, a wielkości proporcjonalne do OA_1 i OA_2. Przesunięcie przygotowane układu punktów A_1, A_2 otrzymamy tedy, nadając tym punktom przesunięcia styczne do krzywych C_1, C_2 o wielkościach proporcjonalnych do odległości OA_1, OA_2 i o zwrotach jak przy obrocie około O.

Więzy jednostronne. Przypuśćmy, że wśród związków, jakie muszą spełniać współrzędne punktów układu, występuje nierówność

$$\Phi(x_1, \ldots, z_n) \leqslant 0. \tag{31}$$

Załóżmy, że w pewnym położeniu układu jest $\Phi<0$. Jeżeli układowi nadamy w pewnej chwili ruch dowolny, zgodny z wszystkimi związkami prócz (31), to — jak łatwo widzieć — w małym przedziale czasu będzie stale $\Phi<0$ (wskutek ciągłości). Ruch będzie więc spełniał równanie (31). Wynika stąd, że w położeniu, w którym zachodzi nierówność $\Phi<0$, równanie (31) nie stanowi żadnego ograniczenia prędkości możliwych i, co za tym idzie, przesunięć przygotowanych. Przy wyznaczaniu przesunięć przygotowanych możemy więc w tym przypadku nie brać w ogóle w rachubę nierówności (31).

Załóżmy teraz, że układ zajmuje położenie brzeżne, t.zn. że zachodzi równość $\Phi=0$. Nadajmy układowi w chwili t dowolny ruch zgodny z więzami. W chwili $t+\Delta t$ (gdzie $\Delta t>0$) funkcja Φ będzie miała wartość $\Phi'=\Phi+\Delta\Phi$. Ponieważ $\Phi'\leqslant 0$, a $\Phi=0$, więc $\Delta\Phi\leqslant 0$. Zatem $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\Phi/\Delta t\leqslant 0$, skąd

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\dot{x}_1+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial z_n}\dot{z}_n\leqslant 0. \tag{32}$$

Prędkości możliwe muszą więc spełniać nierówność (32). Jeżeli $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$ jest przesunięciem przygotowanym układu, to kładąc $\dot{x}_1=\delta x_1,\ldots,\dot{z}_n=\delta z_n$, otrzymamy układ prędkości możliwych. Zatem $\dot{x}_1,\ldots,\dot{z}_n$ spełniają nierówność (32) skąd

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial z_n}\delta z_n\leqslant 0. \tag{33}$$

Jeżeli więc w pewnym położeniu układu związek (31) staje się równością, to przesunięcie przygotowane musi spełniać związek (33) i na odwrót: przesunięcie spełniające związek (33) jest przesunięciem przygotowanym.

Jeżeli dla pewnego przesunięcia przygotowanego $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$ w związku (33) występuje znak $<$, to przesunięcie $-\delta x_1,\ldots,-\delta z_n$ nie jest przesunięciem przygotowanym; dane więc przesunięcie przygotowane nie jest odwracalne (str. 429). Jeżeli zaś przesunięcie $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$ jest odwracalne, to w (33) musi wystąpić znak $=$.

Zbierając otrzymane wyniki, możemy więc powiedzieć:

Jeżeli więzy układu określone są przez związki:

$$F_j(x_1,\ldots,z_n)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m),$$

$$\Phi_r(x_1,\ldots,z_n)\leqslant 0 \qquad (r=1,2,\ldots,s),$$

to przesunięcie przygotowane $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$ *w danym położeniu układu spełnia równania:*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m) \tag{I}$$

oraz te spośród związków

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial\Phi_r}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_i}\delta z_i\right)\leqslant 0 \qquad (r=1,2,\ldots,s), \tag{II}$$

dla których w tym położeniu układu zachodzi równość $\Phi_r=0$.

Przykład 6. Załóżmy, że punkt materialny ma pozostawać wewnątrz lub na powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$. Współrzędne x, y, z tego punktu muszą zatem spełniać nierówność

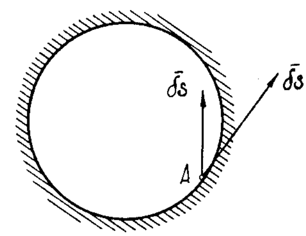
$$x^2+y^2+z^2-r^2 \leqslant 0. \tag{34}$$

Jeżeli punkt znajduje się wewnątrz kuli, to zachodzi nierówność

$$x^2+y^2+z^2-r^2 < 0; \tag{35}$$

w tym położeniu punkt może mieć prędkość dowolną, zatem każda prędkość jest prędkością możliwą. Wynika stąd, że każde przesunięcie jest wtedy przesunięciem przygotowanym.

Jeżeli zaś punkt znajduje się na powierzchni kuli, to



$$x^2+y^2+z^2-r^2=0 \tag{36}$$

i prędkościami możliwymi są prędkości styczne do kuli lub prędkości, mające zwroty ku wnętrzu kuli. Przesunięciami przygotowanymi są więc wtedy przesunięcia, których kierunki są styczne do kuli oraz których kierunki nie są styczne, lecz mają zwroty ku wnętrzu kuli.

Przesunięcie przygotowane $\delta x, \delta y, \delta z$ spełnia na mocy (II) nierówność, którą otrzymamy różniczkując (34):

$$2x\delta x+2y\delta y+2z\delta z \leqslant 0 \qquad \text{czyli} \qquad x\delta x+y\delta y+z\delta z \leqslant 0.$$

Przykład 7. Punkt materialny, uwiązany na nici o długości l uczepionej w początku układu współrzędnych, ma pozostawać na powierzchni $z=x^2+y^2$. Współrzędne punktu spełniają więc związki:

$$z-x^2-y^2=0, \qquad x^2+y^2+z^2-l^2 \leqslant 0. \tag{37}$$

Jeżeli nić nie jest napięta, t.zn. jeżeli $x^2+y^2+z^2-l^2<0$, wówczas przesunięcia przygotowane spełniają tylko równość

$$\delta z-2x\delta x-2y\delta y=0. \tag{38}$$

Jeżeli zaś nić jest napięta, to punkt zajmuje położenie brzeżne, więc $x^2+y^2+z^2-l^2=0$; w tym przypadku oprócz równości (38) musi zatem zachodzić nierówność

$$(39) \qquad x\delta x + y\delta y + z\delta z \leqslant 0.$$

Z (38) dostajemy

$$(40) \qquad \delta z = 2x\delta x + 2y\delta y,$$

skąd przez podstawienie w (39)

$$(41) \qquad x(1+2z)\delta x + y(1+2z)\delta y \leqslant 0.$$

Połóżmy

$$(42) \qquad w = x(1+2z)\delta x + y(1+2z)\delta y.$$

Stąd jeżeli $y \neq 0$, to

$$(43) \qquad \delta y = [w - x(1+2z)\delta x]/y(1+2z).$$

Dla każdej więc wartości δx i każdej wartości w niedodatniej, otrzymamy z (40) i (43) przesunięcie przygotowane $\delta x, \delta y, \delta z$, spełniające związki (38) i (39).

§3. Zasada prac przygotowanych. Praca przygotowana. Niech układ holonomiczny skleronomiczny będzie złożony z n punktów materialnych $A_1, \ldots, A_n$, w których zaczepione są siły $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$. Nadajmy układowi dowolne przesunięcie przygotowane $\overline{\delta s}_1, \ldots, \overline{\delta s}_n$. Praca sił $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ na tym przesunięciu wynosi

$$(\mathrm{I}) \qquad \delta' L = \overline{P}_1 \overline{\delta s}_1 + \ldots + \overline{P}_n \overline{\delta s}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \overline{\delta s}_i.$$

Jeżeli $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$ są rzutami wektorów $\overline{\delta s}_1, \ldots, \overline{\delta s}_n$, to

$$(\mathrm{I}') \qquad \delta' L = \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x}\delta x_i + P_{i_y}\delta y_i + P_{i_z}\delta z_i).$$

Pracę określoną wzorami (I) i (I′) nazywamy *pracą przygotowaną* sił $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ na przesunięciu przygotowanym $\overline{\delta s}_1, \ldots, \overline{\delta s}_n$ (mającym rzuty $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$).

Uwaga. Pracę przygotowaną oznaczamy przez $\delta' L$ (z kreską), gdyż symbol δL mógłby nasuwać przypuszczenie, że L jest funkcją, a δL wyrażeniem określonym przez wzór (18), str. 430.

Jeżeli siły $\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_n$ mają potencjał V, wówczas na mocy (III), str. 214, mamy $P_{i_x} = \partial V/\partial x_i$, $P_{i_y} = \partial V/\partial y_i$, $P_{i_z} = \partial V/\partial z_i$.

Z (I′) dostaniemy

$$\delta' L = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right), \tag{1}$$

skąd na mocy (18), str. 430,

$$\delta' L = \delta V. \tag{I''}$$

Przykład 1. Punkt ma pozostawać na kuli $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$. Przesunięcie przygotowane określone jest równaniem

$$x \delta x + y \delta y + z \delta z = 0.$$

Jeżeli na punkt działa siła $\overline{P}$, to jej praca przygotowana wynosi

$$\delta' L = P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z. \tag{2}$$

Załóżmy, że $z \neq 0$. Zatem

$$\delta z = -(x \delta x + y \delta y)/z, \tag{3}$$

skąd przez podstawienie w (2)

$$\delta' L = [(P_x z - P_z x) \delta x + (P_y z - P_z y) \delta y]/z. \tag{4}$$

We wzorze (4) wartości δx, δy są dowolne.

Jeżeli

$$P_x z - P_z x = 0, \qquad P_y z - P_z y = 0, \tag{5}$$

to otrzymujemy jako pracę przygotowaną $\delta' L = 0$ na każdym przesunięciu przygotowanym. Na odwrót, jeżeli jest stale $\delta' L = 0$, to przyjmując we wzorze (4) raz $\delta x = 1$ i $\delta y = 0$, a drugi raz $\delta x = 0$ i $\delta y = 1$, otrzymamy równania (5), które wyrażają, że kierunek siły $\overline{P}$ przechodzi przez początek układu współrzędnych (czyli przez środek kuli), t.j. że siła jest normalna do powierzchni kuli.

Otrzymane wyniki możemy sprawdzić w następujący sposób. Zauważmy, że przesunięciem przygotowanym w dowolnym punkcie kuli jest każdy wektor styczny do kuli w tym punkcie (str. 424). Praca przygotowana siły $\overline{P}$ będzie więc stale zerem wtedy i tylko wtedy, gdy siła $\overline{P}$ jest prostopadła do każdego przesunięcia przygotowanego, a więc do płaszczyzny stycznej do kuli, czyli gdy kierunek siły jest normalny do powierzchni kuli.

Zasada prac przygotowanych. Niech układ holonomiczny skleronomiczny punktów materialnych $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ poddany będzie działaniu sił. Siły sprawiające, że układ zachowuje więzy, nazywamy *reakcjami*, a siły zaczepione w punktach układu i nie będące reakcjami nazywamy dla odróżnienia *siłami działającymi*. Gdy układ jest w spoczynku t. j. w równowadze, mówimy o siłach działających, że *się równoważą*.

Oczywistym jest, że nawet gdy siły działające się równoważą, układ nie musi pozostawać w spoczynku: np. punkt materialny, na który nie działają żadne siły, może się poruszać ruchem jednostajnym.

Załóżmy, że układ punktów jest w równowadze. Dla każdego punktu z osobna siły działające na ten punkt znoszą się więc z reakcjami. Oznaczając przez $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ siły działające na poszczególne punkty, a przez $\overline{R}_1, \ldots, \overline{R}_n$ reakcje, otrzymamy zatem:

$$\overline{P}_1 + \overline{R}_1 = 0, \quad \overline{P}_2 + \overline{R}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \overline{P}_n + \overline{R}_n = 0. \tag{6}$$

Weźmy pod uwagę dowolne przesunięcie przygotowane $\overline{\delta s_1}, \ldots, \overline{\delta s_n}$. Praca sił działających i reakcyj na tym przesunięciu wynosi z uwagi na (6)

$$(\overline{P}_1 + \overline{R}_1)\,\overline{\delta s_1} + \ldots + (\overline{P}_n + \overline{R}_n)\,\overline{\delta s_n} = 0 \tag{7}$$

czyli

$$(\overline{P}_1\,\overline{\delta s_1} + \ldots + \overline{P}_n\,\overline{\delta s_n}) + (\overline{R}_1\,\overline{\delta s_1} + \ldots + \overline{R}_n\,\overline{\delta s_n}) = 0. \tag{8}$$

Doświadczenie okazuje, że jeżeli nie ma tarcia, to praca reakcyj na każdym przesunięciu przygotowanym jest nieujemna.

Jeżeli np. punkt ma pozostawać wewnątrz lub na powierzchni pewnej kuli gładkiej, to w przypadku, gdy punkt znajduje się na powierzchni, reakcja jest skierowana ku środkowi kuli. Przesunięcie przygotowane jest albo styczne do kuli albo ma zwrot ku wnętrzu (str. 435). W pierwszym przypadku praca reakcji jest zerem, w drugim zaś jest dodatnia.

Przy założeniu więc, że tarcie nie występuje, jest

$$\overline{R}_1\,\overline{\delta s_1} + \ldots + \overline{R}_n\,\overline{\delta s_n} \geqslant 0. \tag{9}$$

Na mocy (8)

$$\overline{P}_1\,\overline{\delta s_1} + \ldots + \overline{P}_n\,\overline{\delta s_n} = -(\overline{R}_1\,\overline{\delta s_1} + \ldots + \overline{R}_n\,\overline{\delta s_n}), \tag{10}$$

więc z (9) otrzymujemy

$$\overline{P}_1\,\overline{\delta s_1} + \ldots + \overline{P}_n\,\overline{\delta s_n} \leqslant 0. \tag{11}$$

Wyrażenie po lewej stronie nierówności (11) przedstawia w myśl (I), str. 436, pracę przygotowaną sił działających.

A więc: jeżeli nie ma tarcia i układ jest w równowadze, to praca sił działających na każdym przesunięciu przygotowanym jest bądź zerem, bądź liczbą ujemną.

Jeżeli przesunięcie przygotowane $\overline{\delta s_1}, \ldots, \overline{\delta s_n}$ jest odwracalne (str. 429), to $-\overline{\delta s_1}, \ldots, -\overline{\delta s_n}$ jest również przesunięciem przygotowanym. W przypadku równowagi zachodzi więc (11) oraz

$$-\overline{P}_1 \overline{\delta s_1} - \ldots - \overline{P}_n \overline{\delta s_n} \leqslant 0. \tag{12}$$

Z (11) i (12) wynika, że

$$\overline{P}_1 \overline{\delta s_1} + \ldots + \overline{P}_n \overline{\delta s_n} = 0. \tag{13}$$

A więc: w przypadku równowagi układu praca przygotowana sił działających jest równa zeru na każdym przesunięciu przygotowanym odwracalnym.

W szczególności, gdy więzy są obustronne, każde przesunięcie przygotowane jest odwracalne, a zatem praca przygotowana sił działających jest wtedy zerem na każdym przesunięciu przygotowanym.

Otrzymany warunek równowagi jest warunkiem koniecznym. Doświadczenie uczy, że jest także wystarczającym.

Warunek ten nosi nazwę *zasady prac przygotowanych.*

Możemy ją wypowiedzieć, jak następuje:

Zasada prac przygotowanych. *Jeżeli układ n punktów materialnych $A_1, \ldots, A_n$ jest holonomiczny skleronomiczny i tarcie nie występuje, to warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił działających $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ jest, by na każdym przesunięciu przygotowanym $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ praca przygotowana sił działających była zerem lub liczbą ujemną, t.zn. żeby zachodził wzór*

$$\delta' L = \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x} \delta x_i + P_{i_y} \delta y_i + P_{i_z} \delta z_i) \leqslant 0. \tag{II}$$

Jeżeli więzy są obustronne, warunek (II) *przyjmuje postać*

$$\delta' L = \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x} \delta x_i + P_{i_y} \delta y_i + P_{i_z} \delta z_i) = 0. \tag{III}$$

Zasadę prac przygotowanych można w wielu przypadkach udowodnić. Przyjmujemy ją jako prawo stwierdzone doświadczalnie we wszystkich tych przypadkach, w których określone jest pojęcie tarcia. W przypadku ogólnym możnaby powiedzieć, że w układzie nie występuje tarcie, jeżeli do układu stosuje się zasada prac przygotowanych.

Znaczenie zasady prac przygotowanych polega na tym, że podaje warunek równowagi sił działających bez pomocy reakcyj.

Przykład 2. Niech A będzie punktem materialnym swobodnym. Oznaczmy przez $\overline{P}$ sumę sił działających na A. Praca przygotowana jest $\delta' L = \overline{P}\,\overline{\delta s}$, gdzie $\overline{\delta s}$ jest przesunięciem przygotowanym. W przypadku równowagi $\delta' L = 0$ czyli

$$\overline{P}\,\overline{\delta s} = 0 \tag{14}$$

dla każdego przesunięcia przygotowanego. Ponieważ punkt A jest swobodny, więc $\overline{\delta s}$ jest dowolne. Wynika stąd wobec (14), że $\overline{P} = 0$. Gdyby bowiem $\overline{P} \neq 0$, to przyjmując, że $\overline{\delta s}$ ma kierunek i zwrot siły $\overline{P}$, mielibyśmy $\overline{P}\,\overline{\delta s} = |\overline{P}| \cdot |\overline{\delta s}| \neq 0$ wbrew (14).

Sprawdziliśmy więc zasadę prac przygotowanych w przypadku punktu swobodnego.

Przykład 3. Punkt materialny A, poddany działaniu siły $\overline{P}$, ma pozostawać na powierzchni S. W położeniu równowagi praca przygotowana jest $\delta' L = \overline{P}\,\overline{\delta s} = 0$, gdzie $\overline{\delta s}$ jest przesunięciem przygotowanym, a więc wektorem dowolnym, leżącym w płaszczyźnie Π, stycznej do powierzchni S w punkcie A (str. 424). Wynika stąd, że $\overline{P} \perp \Pi$. Na odwrót, jeżeli $\overline{P} \perp \Pi$, to oczywiście $\delta' L = \overline{P}\,\overline{\delta s} = 0$, więc punkt A jest w położeniu równowagi.

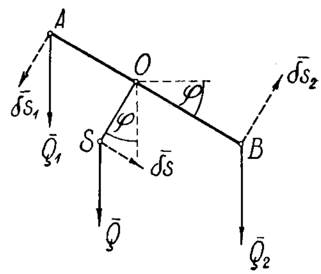
Przyjmijmy teraz, że punkt A ma pozostawać po jednej stronie powierzchni S. Więzy są zatem jednostronne. Przy równowadze mamy więc $\delta' L = \overline{P}\,\overline{\delta s} \leqslant 0$ na każdym przesunięciu przygotowanym. Jeżeli $\overline{\delta s}$ leży w płaszczyźnie stycznej Π, wówczas jest przesunięciem odwracalnym (str. 429), a zatem $\overline{P}\,\overline{\delta s} = 0$. Wynika stąd, że $\overline{P} \perp \Pi$.

Najogólniejszym przesunięciem przygotowanym jest każdy wektor (o początku A), skierowany ku tej stronie powierzchni S, po której leży punkt A. Ponieważ $\overline{P}\,\overline{\delta s} \leqslant 0$, więc $\overline{P}$ ma zwrot w kierunku powierzchni S (t. zn. przyciska punkt A do powierzchni S). Na odwrót, jeżeli $\overline{P} \perp \Pi$ i $\overline{P}$ ma zwrot w kierunku powierzchni S, wówczas, jak łatwo widzieć, $\delta' L = \overline{P}\,\overline{\delta s} \leqslant 0$ na każdym przesunięciu przygotowanym. Punkt znajduje się zatem w położeniu równowagi.

Przykład 4. Punkt materialny A, poddany działaniu siły $\bar{P}$, ma pozostawać na linii C. W położeniu równowagi praca przygotowana jest $\delta' L = \bar{P}\overline{\delta s} = 0$ na każdym przesunięciu przygotowanym $\overline{\delta s}$. Ponieważ $\overline{\delta s}$ jest wektorem dowolnym, stycznym do C w punkcie A, więc $\bar{P}$ jest prostopadłe do C.

Na odwrót, jeżeli $\bar{P}$ jest prostopadłe do C, to oczywiście $\bar{P}\overline{\delta s} = 0$, więc punkt jest w położeniu równowagi.

Przykład 5. Na dźwignię AB działają ciężary $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ uczepione w punktach A, B oraz ciężar dźwigni $\bar{Q}$, zaczepiony w środku S jej masy. Siły działające leżą w jednej płaszczyźnie pionowej, prostopadłej do osi obrotu w punkcie O, przyczem $OS \perp AB$. Wyznaczyć w położeniu równowagi kąt φ, jaki OS tworzy z pionem (por. przykład 1, str. 278).



Oznaczmy przez $\overline{\delta s}_1, \overline{\delta s}_2, \overline{\delta s}$ przesunięcia przygotowane punktów zaczepienia A, B, S. Dźwignia może się jedynie obracać około swojej osi. Prędkości możliwe — a co za tym idzie — przesunięcia przygotowane punktów A, B, S są prostopadłe do OA, OB, OS. Oznaczając przez $\delta\omega$ dowolną prędkość kątową, mamy zatem:

$$|\overline{\delta s}_1| = OA\,\delta\omega, \qquad |\overline{\delta s}_2| = OB\,\delta\omega, \qquad |\overline{\delta s}| = OS\,\delta\omega. \tag{15}$$

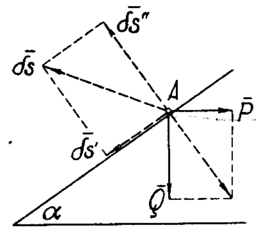
W położeniu równowagi praca przygotowana jest zerem czyli $\bar{Q}_1\overline{\delta s}_1 + \bar{Q}_2\overline{\delta s}_2 + \bar{Q}\,\overline{\delta s} = 0$. Obliczając iloczyny skalarowe i oznaczając wartości bezwzględne sił przez Q_1, Q_2, Q, otrzymamy na mocy (15) $(Q_1 \cdot OA \cos\varphi + Q \cdot OS \sin\varphi - Q_2 \cdot OB \cos\varphi)\delta\omega = 0$, skąd po podzieleniu przez $\delta\omega$

$$\operatorname{tg}\varphi = (Q_2 \cdot OB - Q_1 \cdot OA) / Q \cdot OS. \tag{16}$$

Wzór (16) otrzymaliśmy poprzednio na innej drodze (por. wzór (6), str. 279).

Przykład 6. Na równi pochyłej, nachylonej pod kątem α do poziomu, znajduje się punkt ciężki A, który pozostaje w równowadze pod wpływem siły $\bar{P}$, mającej kierunek poziomy. Wyznaczyć siłę $\bar{P}$ przy założeniu, że nie ma tarcia.

Oznaczmy przez $\bar{Q}$ ciężar ciała, a przez $\overline{\delta s}$ dowolne przesunięcie przygotowane. Praca przygotowana jest $\delta' L = \bar{Q}\overline{\delta s} + \bar{P}\cdot\overline{\delta s}$. Aby zachodziła równowaga, musi być na każdym przesunięciu przygotowanym $\delta' L \leqslant 0$ czyli



$$\bar{Q}\,\overline{\delta s} + \bar{P}\,\overline{\delta s} \leqslant 0. \tag{17}$$

Weźmy najpierw pod uwagę przesunięcie przygotowane $\overline{\delta s}'$ mające kierunek równi pochyłej. Przy tym założeniu $\overline{\delta s}'$ jest przesunięciem odwracalnym, zatem (17) przyjmie postać równości

$$\bar{Q}\,\overline{\delta s}' + \bar{P}\,\overline{\delta s}' = 0. \tag{18}$$

Niechaj Π będzie płaszczyzną pionową, przechodzącą przez A prostopadle do równi i niech $\overline{\delta s}' \perp \Pi$. Zatem $\bar{Q}\overline{\delta s}' = 0$, skąd na mocy (2) $\bar{P}\cdot\overline{\delta s}' = 0$ czyli $\bar{P} \perp \overline{\delta s}'$. A więc $\bar{P}$ leży w płaszczyźnie Π.

Przyjmijmy teraz, że $\overline{\delta s}'$ leży na równi i w płaszczyźnie Π (p. rysunek); nadając przesunięciu $\overline{\delta s}'$ zwrot ku dołowi i kładąc $Q = |\bar{Q}|$, $P = |\bar{P}|$, otrzymamy z (18)

$$Q|\overline{\delta s}'|\sin\alpha \pm P|\overline{\delta s}'|\cos\alpha = 0. \tag{19}$$

Znak $\pm$ zależy od zwrotu siły $\bar{P}$. Z równości (19) wynika, że należy obrać znak —. A więc siła $\bar{P}$ musi przyciskać punkt do równi. Przy znaku — otrzymamy z (19)

$$P = Q\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{20}$$

Wyznaczyliśmy więc kierunek, zwrot i wielkość siły $\bar{P}$ przy założeniu równowagi. Z (20) łatwo wynika, że suma $\bar{Q} + \bar{P}$ jest prostopadła do równi.

Aby wykazać, że równowaga rzeczywiście zajdzie, należy stwierdzić, że warunek (17) zachodzi dla każdego przesunięcia przygotowanego. Aby to udowodnić, rozłóżmy dowolne przesunięcie przygotowane $\overline{\delta s}$ na dwa przesunięcia: $\overline{\delta s}''$ prostopadłe do równi i $\overline{\delta s}'$ leżące na równi. Praca sił $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ na przesunięciu $\overline{\delta s}'$ jest zerem, gdyż $\bar{P}+\bar{Q} \perp \overline{\delta s}'$. Przesunięcie $\overline{\delta s}''$ i suma $\bar{P}+\bar{Q}$ mają ten sam kierunek, lecz zwroty przeciwne, więc praca sił $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ na $\overline{\delta s}''$ jest ujemna. Wynika stąd, że praca sił $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ na przesunięciu $\overline{\delta s}$ jest ujemna. Związek (17) zachodzi więc dla każdego przesunięcia przygotowanego. Zatem siły $\bar{Q}$ i $\bar{P}$ równoważą się.

Przykład 7. C i a ł o s z t y w n e. Opierając się na zasadzie prac przygotowanych, wyprowadzimy teraz warunki równowagi sił działających na ciało sztywne.

C i a ł o s w o b o d n e. Niech na ciało sztywne swobodne działają siły $\overline{P}_1,\dots,\overline{P}_n$ o początkach $A_1,\dots,A_n$. Nadajmy ciału dowolne przesunięcia przygotowane i oznaczmy przez $\overline{\delta s_1},\dots,\overline{\delta s_n}$ przesunięcia punktów $A_1,\dots,A_n$. Praca przygotowana wynosi zatem na mocy (I), str. 436,

$$\delta' L = \overline{P}_1\overline{\delta s_1}+\dots+\overline{P}_n\overline{\delta s_n}. \tag{21}$$

W przykładzie 4, str. 431, zajmowaliśmy się przesunięciami przygotowanymi ciała sztywnego.

Niech przesunięciem przygotowanym ciała będzie translacja (str. 431); punkty doznają więc równych przesunięć $\delta\overline{u}$. Na mocy (21) mamy $\delta' L=\overline{P}_1\delta\overline{u}+\dots+\overline{P}_n\delta\overline{u}=(\overline{P}_1+\dots+\overline{P}_n)\delta\overline{u}$. Kładąc $\overline{P}=\overline{P}_1+\dots+\overline{P}_n$, otrzymamy

$$\delta' L=\overline{P}\,\overline{\delta u}. \tag{22}$$

Niech O będzie dowolnym punktem ciała, a l osią przechodzącą przez O. Nadajmy ciału przesunięcie przygotowane, w którym punkty doznają przesunięć proporcjonalnych do prędkości przy obrocie ciała około osi l z prędkością kątową $\delta\overline{\omega}$. Na mocy (26), str. 431, otrzymamy

$$\overline{\delta s_i}=\overline{OA_i}\times\overline{\delta\omega} \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

skąd na mocy (21) $\delta' L=\overline{P}_1(\overline{OA_1}\times\overline{\delta\omega})+\dots+\overline{P}_n(\overline{OA_n}\times\overline{\delta\omega})$. Ponieważ $\overline{a}(\overline{b}\times\overline{c})=\overline{c}(\overline{a}\times\overline{b})$ (wzór (II), str. 12), więc

$$\delta' L=\overline{\delta\omega}(\overline{P}_1\times\overline{OA_1})+\dots+\overline{\delta\omega}(\overline{P}_n\times\overline{OA_n}).$$

Lecz $\overline{P}_1\times\overline{OA_1}=\mathrm{Mom}_O\overline{P}_1$ i t. d. Zatem

$$\delta' L=\overline{\delta\omega}(\mathrm{Mom}_O\overline{P}_1+\dots+\mathrm{Mom}_O\overline{P}_n)=\overline{\delta\omega}\cdot\overline{M}, \tag{23}$$

gdzie $\overline{M}$ jest momentem ogólnym sił względem O.

Oznaczmy przez $\delta\omega$ współrzędną $\overline{\delta\omega}$ względem osi l, a przez φ kąt, jaki $\overline{M}$ tworzy z osią l. Wówczas $\overline{\delta\omega}\cdot\overline{M}=\delta\omega|\overline{M}|\cos\varphi$. Ponieważ moment sił działających względem osi l wynosi $M_l=|\overline{M}|\cos\varphi$, więc na mocy (23)

$$\delta' L=M_l\,\delta\omega. \tag{24}$$

Najogólniejsze przesunięcie przygotowane ciała sztywnego jest złożeniem przesunięć, określonych przez wzory (25) i (26), str. 431. Zatem na najogólniejszym przesunięciu przygotowanym jest

$$\delta' L = \overline{P} \cdot \overline{\delta u} + M_l \delta\omega, \tag{25}$$

gdzie $\overline{P}$ oznacza sumę wszystkich sił działających, M_l moment względem dowolnej osi l, $\overline{\delta u}$ dowolny wektor, a $\delta\omega$ dowolną liczbę.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia warunków równowagi. Załóżmy, że układ sił działających jest w równowadze. Zatem praca przygotowana $\delta' L$ jest zerem na każdym przesunięciu przygotowanym. Nadając ciału dowolne przesunięcie $\overline{\delta u}$, mamy na mocy (22) $\overline{P}\overline{\delta u} = 0$, skąd wynika, że

$$\overline{P} = 0, \tag{26}$$

gdyby bowiem było $\overline{P} \neq 0$, to obierając $\overline{\delta u}$ w kierunku $\overline{P}$, mielibyśmy $\overline{P}\overline{\delta u} \neq 0$.

Obierzmy teraz dowolnie punkt O i oś l przechodzącą przez O. Dla każdego $\delta\omega$ jest na mocy (24) $M_l \delta\omega = 0$, więc $M_l = 0$. Ponieważ l jest osią dowolną, przechodzącą przez O, więc moment ogólny względem O jest

$$\overline{M} = 0. \tag{27}$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że równości (26) i (27) są warunkami koniecznymi równowagi sił działających. Wykażemy teraz, że są one również warunkami wystarczającymi.

Jeżeli bowiem zachodzą równości (26) i (27), to praca przygotowana, podana w najogólniejszym przypadku wzorem (25), jest oczywiście zerem.

Otrzymaliśmy tedy warunki równowagi ciała sztywnego swobodnego, wyprowadzone na innej drodze na str. 248.

Rozpatrzymy z kolei kilka przypadków równowagi ciała nieswobodnego.

Ciało mające punkt stały. Niech ciało ma punkt O unieruchomiony. Ruch chwilowy ciała może więc być tylko obrotem około osi przechodzącej przez O. Zatem praca przygotowana wyraża się wzorem (24).

Jeżeli siły działające równoważą się, wówczas $\delta' L = 0$, skąd na mocy (24) jest $M_l \delta\omega = 0$. Ponieważ $\delta\omega$ jest dowolne, więc $M_l = 0$, gdzie l jest osią dowolną, przechodzącą przez O. Wynika stąd, że moment ogólny względem O sił działających na ciało jest $\overline{M}=0$.

Na odwrót, jeżeli $\overline{M}=0$, wówczas $M_l=0$ względem każdej osi l przechodzącej przez O. Na mocy więc (24) jest stale $\delta' L=0$.

A więc: układ sił działających na ciało, mające jeden punkt O unieruchomiony, jest w równowadze wtedy i tylko wtedy, gdy moment ogólny sił względem O jest zerem.

Warunek powyższy otrzymaliśmy poprzednio innym sposobem (str. 274).

Ciało płasko prowadzone (str. 276). Niechaj Π będzie płaszczyzną kierowniczą ciała płasko prowadzonego. Ruch chwilowy ciała jest albo ruchem postępowym z prędkością równoległą do Π, albo ruchem obrotowym wkoło osi l prostopadłej do Π. Praca przygotowana wyraża się zatem wzorem (22), gdzie $\overline{\delta u} \| \Pi$, albo wzorem (24), gdzie $l \perp \Pi$. W przypadku równowagi otrzymamy zatem $\overline{P}\overline{\delta u}=0$ dla $\overline{\delta u} \| \Pi$ i $M_l \delta\omega=0$ dla $l \perp \Pi$. Wynika stąd, że

$$\overline{P} \perp \Pi \quad \text{i} \quad M_l=0 \quad \text{dla} \quad l \perp \Pi. \tag{28}$$

Łatwo stwierdzić, że otrzymany warunek równoważny jest warunkowi, by rzuty sił na płaszczyznę kierowniczą Π tworzyły układ równoważny zeru. Jeżeli zachodzi warunek (28), wówczas z (22) i (24) wynika, że praca przygotowana jest zerem. Warunek (28) jest więc konieczny i wystarczający dla równowagi sił działających.

Ciało mające oś stałą. Załóżmy, że ciało ma oś l unieruchomioną. W tym przypadku ciało może się obracać tylko około osi l. Praca przygotowana wyraża się zatem wzorem (24). Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił działających jest więc na mocy (24) $\delta' L=M_l \delta\omega=0$ czyli $M_l=0$ ($\delta\omega$ jest bowiem dowolne).

Warunek ten otrzymaliśmy poprzednio na str. 276.

Ciało mające stałą oś skrętu. Załóżmy, że ciało może się tylko obracać około pewnej osi l oraz przesuwać wzdłuż niej, jak np. kula nawleczona na prosty pręt sztywny. Ruch chwilowy ciała jest więc złożeniem ruchu postępowego o prędkości mającej kierunek osi l i ruchu obrotowego około tej osi, a zatem jest skrętem około osi l. W najogólniejszym przypadku praca przygotowana określona jest więc wzorem (25), w którym $\overline{\delta u}$ ma kierunek osi l, zaś $\delta\omega$ jest dowolne.

Jeżeli zachodzi równowaga, to na mocy (25)

$$\delta' L = \overline{P}\overline{\delta u} + M_l \delta\omega = 0. \tag{29}$$

Przyjmując $\overline{\delta u} = 0$ i $\delta\omega \neq 0$, dostaniemy $M_l = 0$, jeżeli zaś przyjmiemy $\delta\omega = 0$, otrzymamy z (29) $\overline{P}\overline{\delta u} = 0$. Ponieważ $\overline{\delta u}$ ma kierunek osi l, więc $\overline{P} \perp l$.

Na odwrót, jeżeli $M_l = 0$ i $\overline{P} \perp l$, wówczas na mocy (29) jest oczywiście $\delta' L = 0$.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi ciała mogącego się około stałej osi obracać i wzdłuż niej przesuwać jest, by suma sił była prostopadła do osi i moment sił względem osi był zerem.*

Śruba. Ciało sztywne, które może się tylko tak poruszać, że pewna linia śrubowa w ciele przesuwa się po sobie, nazywamy *śrubą*.

Oś śruby może się tylko przesuwać po sobie, a zatem prędkości punktów osi mają kierunek osi. Wynika stąd (str. 336), że ruch chwilowy jest skrętem chwilowym około osi śruby.

Oznaczając przez $\overline{u}$ prędkość ruchu postępowego chwilowego, przez $\overline{\omega}$ prędkość kątową chwilową, a przez h skok śruby, mamy na mocy (15), str. 338,

$$|\overline{u}| / |\overline{\omega}| = h/2\pi. \tag{30}$$

Ponieważ $\overline{u}$ i $\overline{\omega}$ mają kierunek osi l śruby, więc oznaczając przez u i ω współrzędne względem osi l wektorów $\overline{u}$ i $\overline{\omega}$, otrzymamy z (30)

$$u = \varepsilon h\omega/2\pi, \tag{31}$$

gdzie $\varepsilon = +1$, jeżeli śruba jest lewoskrętna, zaś $\varepsilon = -1$, jeżeli jest prawoskrętna.

Praca przygotowana wyraża się wzorem (25), w którym $\delta\omega$ jest dowolne, a $\overline{\delta u}$ ma kierunek osi l śruby, przyczem na mocy (31)

$$\delta u = \varepsilon h \delta\omega/2\pi, \tag{32}$$

gdzie δu jest współrzędną $\overline{\delta u}$ względem osi l.

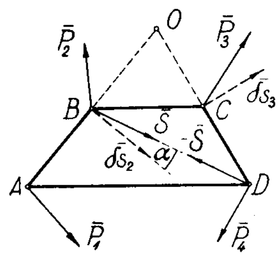
Oznaczając przez P_l rzut $\overline{P}$ na oś l, mamy $\overline{P}\overline{\delta u} = P_l \delta u$. Na mocy więc (25) i (32)

$$\delta' L = (\varepsilon P_l h/2\pi + M_l)\delta\omega. \tag{33}$$

Z zasady prac przygotowanych wynika na mocy (33), że *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił działających na śrubę jest to, by siły spełniały równanie*

$$(34) \qquad M_l/P_l = -\varepsilon h/2\pi.$$

Przykład 8. Wyznaczanie napięć w prętach kratownicy. Metoda kinematyczna. Na zasadzie prac przygotowanych opiera się pewna metoda wyznaczania napięć w prętach kratownicy. Metodę tę przedstawimy najpierw na przykładzie.



Na kratownicę płaską działają siły $\bar{P}_1, ..., \bar{P}_4$ zaczepione w węzłach i będące w równowadze. Aby wyznaczyć napięcie np. w pręcie BD, usuwamy ten pręt. Pozostały układ prętów będzie nadal w równowadze, jeżeli w punktach B i D przyłożymy siły $\bar{S}$ i $-\bar{S}$ równe napięciom usuniętego pręta w tych dwu punktach.

Nadajmy układowi prętów AB, BC, CD, DA dowolne przesunięcie przygotowane i oznaczmy przez $\overline{\delta s}_1 ..., \overline{\delta s}_4$ przesunięcia punktów $A, ..., D$. Praca przygotowana będzie więc zerem czyli

$$\bar{P}_1\overline{\delta s}_1 + \bar{P}_2\overline{\delta s}_2 + \bar{P}_3\overline{\delta s}_3 + \bar{P}_4\overline{\delta s}_4 + \bar{S}\overline{\delta s}_2 - \bar{S}\overline{\delta s}_4 = 0,$$

skąd

$$(35) \qquad \bar{S}(\overline{\delta s}_2 - \overline{\delta s}_4) = -(\bar{P}_1\overline{\delta s}_1 + \bar{P}_2\overline{\delta s}_2 + \bar{P}_3\overline{\delta s}_3 + \bar{P}_4\overline{\delta s}_4).$$

Połóżmy $S = \pm|\bar{S}|$, gdzie znak zależy od tego, czy napięcie $\bar{S}$ jest rozciąganiem czy ściskaniem, i oznaczmy przez δr rzut różnicy $\overline{\delta s}_2 - \overline{\delta s}_4$ na kierunek $\overline{BD}$. Przy tych oznaczeniach lewa strona równości (35) wynosi $S\delta r$. Jeżeli więc przesunięcia przygotowane obierzemy w ten sposób, by mieć $\delta r \neq 0$, otrzymamy z (35)

$$(36) \qquad S = -(\bar{P}_1\overline{\delta s}_1 + \bar{P}_2\overline{\delta s}_2 + \bar{P}_3\overline{\delta s}_3 + \bar{P}_4\overline{\delta s}_4)/\delta r.$$

Szukane przesunięcie przygotowane otrzymamy, przyjmując, że punkty A i D są unieruchomione; zatem:

$$(37) \qquad \overline{\delta s}_1 = 0, \qquad \overline{\delta s}_4 = 0.$$

Ruch chwilowy pręta BD (przy założeniu, że A i D są nieruchome) jest obrotem chwilowym około środka O, który jest punktem przecięcia się prostych AB i DC (por. przykład 4, str. 330).

Przesunięcia $\overline{\delta s_2}$ i $\overline{\delta s_3}$ są proporcjonalne do prędkości punktów B i C przy obrocie pręta BC około O. Zatem $\overline{\delta s_2}$ i $\overline{\delta s_3}$ są prostopadłe odpowiednio do AB i DC, oraz

$$(38) \qquad |\overline{\delta s_3}|/|\overline{\delta s_2}| = OC/OB.$$

Niech P_2' i P_3' oznaczają rzuty sił $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ na kierunki $\overline{\delta s_2}$ i $\overline{\delta s_3}$, zaś α kąt między $\overline{\delta s_2}$ a $\overline{BD}$. Zatem:

$$(39) \qquad \overline{P}_2\overline{\delta s_2} = P_2'|\overline{\delta s_2}|, \quad \overline{P}_3\overline{\delta s_3} = P_3'|\overline{\delta s_3}|, \quad \delta r = |\overline{\delta s_2}| \cos \alpha.$$

Z (36) otrzymamy na mocy (37)-(39)

$$(40) \qquad S = -(P_2' \cdot OB + P_3' \cdot OC)/OB \cos \alpha.$$

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego kratownicy o węzłach $A_1, \ldots, A_n$, w których działają siły $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ będące w równowadze. By wyznaczyć napięcie w pręcie kratownicy łączącym węzły A_r i A_s, usuwamy pręt A_rA_s i przykładamy do węzłów A_r i A_s siły $\overline{S}$ i $-\overline{S}$, równe napięciom usuniętego pręta w A_r i A_s. Ponieważ układ pozostałych prętów jest w równowadze, więc siły $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n, \overline{S}, -\overline{S}$ równoważą się. Praca przygotowana jest tedy zerem. Oznaczając przez $\overline{\delta s_1}, \ldots, \overline{\delta s_n}$ przesunięcia przygotowane węzłów $A_1, \ldots, A_n$ (przy założeniu, że pręt A_rA_s został usunięty), otrzymamy

$$(41) \qquad \overline{P}_1\overline{\delta s_1} + \ldots + \overline{P}_n\overline{\delta s_n} + \overline{S}\,\overline{\delta s_r} - \overline{S}\,\overline{\delta s_s} = 0.$$

Kładąc więc $S = \pm|\overline{S}|$ (gdzie znak zależy od tego, czy S jest rozciąganiem, czy ściskaniem) i oznaczając przez δr rzut $\overline{\delta s_r} - \overline{\delta s_s}$ na kierunek $\overline{A_rA_s}$, otrzymamy z (41)

$$(42) \qquad S\delta r = -(\overline{P}_1\overline{\delta s_1} + \ldots + \overline{P}_n\overline{\delta s_n}).$$

Jeżeli przesunięcia przygotowane potrafimy obrać tak, by było $\delta r \neq 0$ (t. zn. by $\overline{\delta s_r} \neq \overline{\delta s_s}$ i różnica $\overline{\delta s_r} - \overline{\delta s_s}$ nie była prostopadła do A_rA_s), wówczas z (42) będziemy mogli wyznaczyć S.

Otóż można okazać, że jeżeli kratownica jest wyznaczalna statycznie (str. 301), to przesunięcie przygotowane o żądanych własnościach zawsze istnieje.

Oznaczmy przez $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ współrzędne węzłów $A_1, \ldots, A_n$, a przez d_{ij} długości prętów A_iA_j. Zatem

$$(43) \qquad (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - d_{ij}^2 = 0.$$

Niech $\delta x_i, \delta y_i$ będą rzutami przesunięcia przygotowanego punktu A_i.

Wówczas na mocy (43)

$$(44)\qquad (x_i - x_j)(\delta x_i - \delta x_j) + (y_i - y_j)(\delta y_i - \delta y_j) = 0.$$

Jeżeli usuniemy pręt $A_r A_s$, to przesunięcia przygotowane węzłów określone są równaniami (44) (wśród których nie występuje równanie odpowiadające prętowi $A_r A_s$); możemy z nich wyrachować przesunięcia.

Podana metoda wyznaczania napięć w prętach kratownicy nosi nazwę *metody kinematycznej*.

Metodę kinematyczną można stosować zarówno do kratownic płaskich jak i przestrzennych.

Istnieją również metody graficzne wyznaczania prędkości możliwych (a co za tym idzie, przesunięć przygotowanych $\overline{\delta s_1}, \ldots, \overline{\delta s_n}$) węzłów kratownicy przy pomocy t. zw. *planów prędkości (przesunięć przygotowanych)*.

§ 4. Wyznaczanie położenia równowagi w polu sił. Jednym z głównych zagadnień, z jakimi spotykamy się przy badaniu równowagi układu punktów materialnych, jest wyznaczanie położenia równowagi układu w danym polu sił.

Podamy tu rozwiązanie tego zagadnienia dla więzów obustronnych. Dla więzów jednostronnych rozwiązanie jest znacznie bardziej złożone, ograniczymy się więc tylko do pewnego przykładu (p. str. 453, przykład 2).

Niech więzy układu punktów $A_1, \ldots, A_n$ będą określone równaniami

$$(1)\qquad F_j(x_1, \ldots, z_n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Załóżmy, że układ znajduje się w polu sił, t. zn. że siły $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$, działające na punkty $A_1, \ldots, A_n$ są funkcjami zmiennych $x_1, \ldots, z_n$. A więc:

$$(2)\qquad P_{i_x} = \Phi_i(x_1, \ldots, z_n), \qquad P_{i_y} = \Psi_i(x_1, \ldots, z_n), \qquad P_{i_z} = X_i(x_1, \ldots, z_n).$$

Przesunięcia przygotowane spełniają równania (I), str. 428:

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

W położeniu równowagi mamy na mocy zasady prac przygotowanych

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x} \delta x_i + P_{i_y} \delta y_i + P_{i_z} \delta z_i) = 0.$$

Ponieważ równań (3) jest m, więc możemy wyznaczyć m spośród n niewiadomych $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, nadając pozostałym $k=3n-m$ niewiadomym dowolnie obrane wartości $\delta h_1, \ldots, \delta h_k$. Wyznaczając przez nie niewiadome $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ z równań (3) i podstawiając w (4), otrzymamy po uporządkowaniu równanie

$$(5) \qquad a_1 \delta h_1 + a_2 \delta h_2 + \ldots + a_k \delta h_k = 0,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_k$ są pewnymi liczbami zależnymi od położenia układu, t.j. od współrzędnych $x_1, \ldots, z_n$.

W położeniu równowagi równość (5) ma zachodzić dla każdego układu liczb $\delta h_1, \ldots, \delta h_k$. Przyjmując $\delta h_1 = 1$, $\delta h_2 = 0$, $\ldots$, $\delta h_k = 0$, dostaniemy $a_1 = 0$. Podobnie postępując, otrzymamy:

$$(6) \qquad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots, \quad a_k = 0.$$

Na odwrót, jeżeli w pewnym położeniu układu spełnione są równości (6), to zachodzi oczywiście równanie (5), a zatem dane położenie układu jest położeniem równowagi. Równości (6) określają więc położenie równowagi układu.

Z równań (6) i (1), których jest razem $k+m=3n$, możemy wyznaczyć na ogół $3n$ niewiadomych współrzędnych $x_1, \ldots, z_n$, odpowiadających położeniu równowagi układu.

Mnożniki Lagrange'a. Podamy jeszcze inną metodę wyznaczania położeń równowagi układu, zwaną *metodą mnożników Lagrange'a.*

Oznaczmy lewe strony równań (3) przez $W_1, \ldots, W_m$, zaś lewą stronę równania (4) przez W.

Uważając $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ za niewiadome, możemy powiedzieć, że w położeniu równowagi każde rozwiązanie równań $W_1=0, \ldots, W_m=0$ spełnia równanie $W=0$. Ze znanego więc twierdzenia teorii równań liniowych wynika, że W można przedstawić liniowo przy pomocy $W_1, \ldots, W_m$, t.zn. że istnieją takie liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, że dla dowolnych $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ jest tożsamościowo

$$W = \alpha_1 W_1 + \ldots + \alpha_m W_m.$$

Kładąc $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\ldots$, $\lambda_m = -\alpha_m$, możemy powyższą tożsamość napisać w postaci

$$(7) \qquad W + \lambda_1 W_1 + \ldots + \lambda_m W_m = 0 \quad \text{lub} \quad W + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j W_j = 0.$$

Pisząc zamiast $W_1, \ldots, W_m$ i W lewe strony równań (3) i (4), otrzymamy

$$(8)\quad \sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\delta x_i + P_{i_y}\delta y_i + P_{i_z}\delta z_i) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial F_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F_j}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0.$$

Porządkując prawą stronę równania (8) według $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, dostaniemy

$$(9)\quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\Bigg[&\left(P_{i_x} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \left(P_{i_y} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial y_i}\right)\delta y_i + \\ &+ \left(P_{i_z} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial z_i}\right)\delta z_i\Bigg] = 0. \end{aligned}$$

Równość (7), a więc i (9) zachodzi dla dowolnych $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$; zatem współczynniki przy $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ muszą być zerami:

$$(\mathrm{I})\quad P_{i_x} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0,\quad P_{i_y} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial y_i} = 0,\quad P_{i_z} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial z_i} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Udowodniliśmy więc, że w położeniu równowagi można dobrać takie liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ by zachodziły równania (I).

Na odwrót, jeżeli w pewnym położeniu układu można dobrać liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, spełniające równania (I), to zachodzi równość (9), a więc i (8) czyli (7). Ponieważ dla przesunięć przygotowanych jest na mocy (3) $W_1 = 0, \ldots, W_m = 0$, więc z (7) dostajemy $W = 0$ czyli (4). Położenie dane jest zatem położeniem równowagi.

A więc: *warunkiem koniecznym i dostatecznym dla równowagi sił w pewnym położeniu układu jest to, by istniał układ liczb* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *spełniający równania* (I).

Z równań (1) i (I), których razem jest $3n+m$, możemy wyznaczyć na ogół $3n+m$, niewiadomych, t. j. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, oraz współrzędne $x_1, \ldots, z_n$, określające położenie równowagi.

Liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ nazywamy *mnożnikami Lagrange'a.*

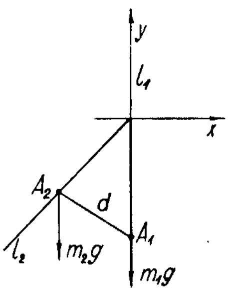
Uwaga. Oznaczając przez $\bar{R}_1, ..., \bar{R}_n$ siły reakcyjne w położeniu równowagi, mamy oczywiście $\bar{P}_i + \bar{R}_i = 0$, czyli:

$$P_{i_x} + R_{i_x} = 0, \qquad P_{i_y} + R_{i_y} = 0, \qquad P_{i_z} + R_{i_z} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Porównując z (I), dostaniemy:

$$\text{(II)} \quad R_{i_x} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad R_{i_y} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial y_i}, \quad R_{i_z} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Przykład 1. Dwa punkty materialne ciężkie A_1 i A_2 o masach m_1 i m_2 połączone są prętem sztywnym o długości d (bez masy) i pozostawać mają na dwóch prostych l_1 i l_2. Prosta l_1 jest pionowa, a prosta l_2 przecina l_1 i tworzy z nią kąt $\varphi = 45^0$. Wyznaczyć położenie równowagi, zakładając, że nie ma tarcia.



Obierzmy punkt przecięcia prostych l_1, l_2 za początek układu współrzędnych (x, y), przyjmując płaszczyznę, w której te proste leżą, za płaszczyznę xy, zaś oś l_1 za oś y (ze zwrotem ku górze).

Równania prostych l_1 i l_2 są $x = 0$ i $y = x$. Zatem współrzędne x_1, y_1 i x_2, y_2 spełniają równania:

$$\text{(10)} \qquad x_1 = 0, \qquad y_2 - x_2 = 0.$$

Ponieważ $A_1 A_2 = d$, więc

$$\text{(11)} \qquad x_2^2 + (y_1 - y_2)^2 - d^2 = 0.$$

Równania (10 i (11) określają więzy układu.

Przesunięcia przygotowane spełniają równania, które otrzymamy z (10) i (11):

$$\text{(12)} \quad \delta x_1 = 0, \qquad \delta y_2 - \delta x_2 = 0, \qquad x_2 \delta x_2 + (y_1 - y_2)(\delta y_1 - \delta y_2) = 0.$$

Siłami działającymi są ciężary punktów. Rzuty ciężarów na osie układu współrzędnych wynoszą odpowiednio $0, -m_1 g$ i $0, -m_2 g$. Praca przygotowana sił działających równa się $\delta' L = -m_1 g \delta y_1 - m_2 g \delta y_2$. W położeniu równowagi jest $\delta' L = 0$, a więc

$$\text{(13)} \qquad m_1 \delta y_1 + m_2 \delta y_2 = 0.$$

Załóżmy, że $y_1 - y_2 \neq 0$. Obierając dowolnie δy_2, dostaniemy z (12):

$$\delta x_1 = 0, \qquad \delta x_2 = \delta y_2, \qquad \delta y_1 = (y_1 - y_2 - x_2)\delta y_2 / (y_1 - y_2). \tag{14}$$

Podstawiając w (13), otrzymamy po uwolnieniu się od mianownika

$$[m_1(y_1 - y_2 - x_2) + m_2(y_1 - y_2)]\delta y_2 = 0. \tag{15}$$

Ponieważ δy_2 jest dowolne, więc równość (15) zajdzie tylko w przypadku, gdy

$$m_1(y_1 - y_2 - x_2) + m_2(y_1 - y_2) = 0. \tag{16}$$

Rozwiązując układ równań (10), (11), (16), otrzymamy współrzędne w położeniu równowagi:

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = -(2m_1 + m_2)d/a, \qquad x_2 = -(m_1 + m_2)d/a = y_2,$$

gdzie $a = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + m_1^2}$.

Załóżmy teraz, że $y_1 - y_2 = 0$. Na mocy (11) mamy $x_2^2 - d^2 = 0$, skąd $x_2 \neq 0$. Ostatnie z równań (12) daje wobec tego $\delta x_2 = 0$, a więc drugie z równań (12) daje $\delta y_2 = 0$. Przesunięciem przygotowanym jest zatem na mocy (12) przesunięcie:

$$\delta x_1 = 0, \qquad \delta x_2 = 0, \qquad \delta y_2 = 0, \qquad \delta y_1 \textit{ dowolne}.$$

Warunek równowagi (13) przyjmie więc postać $m_1 \delta y_1 = 0$. Równość ta nie jest jednak spełniona, gdyż δy_1 jest dowolne.

A więc: położenie, w którym $y_1 - y_2 = 0$, nie jest położeniem równowagi.

Przykład 2. Punkt ciężki o masie m, poddany działaniu siły $\overline{P}$, ma pozostawać na powierzchni kuli

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0. \tag{17}$$

Zakładamy, że oś z ma kierunek pionowy i zwrot ku górze. Wyznaczyć położenie równowagi, przyjmując, że tarcie nie występuje.

Przesunięcie przygotowane $\delta x, \delta y, \delta z$ spełnia równanie, które otrzymujemy, różniczkując (17):

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0. \tag{18}$$

Praca przygotowana siły $\overline{P}$ wynosi $P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z$, siły zaś ciężkości $-mg\delta z$. W położeniu równowagi mamy zatem

$$\delta' L = P_x \delta x + P_y \delta y + (P_z - mg)\delta z = 0. \tag{19}$$

Stosując metodę mnożników Lagrange'a (wzór (I), str. 451) i zastępując 2λ przez λ, otrzymamy równania następujące:

$$(20) \qquad P_x + \lambda x = 0, \qquad P_y + \lambda y = 0, \qquad P_z - mg + \lambda z = 0.$$

Z równań (17) i (20) możemy wyznaczyć λ oraz współrzędne x, y, z położenia równowagi.

Obliczając x, y, z z równań (20) i wstawiając w (17), dostaniemy:

$$(21) \qquad \lambda = \pm \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + (P_z - mg)^2}/r.$$

Znając λ, otrzymamy z (20):

$$(22) \qquad x = -P_x/\lambda, \qquad y = -P_y/\lambda, \qquad z = -(P_z - mg)/\lambda.$$

Ponieważ na λ dostaliśmy dwie wartości (21), więc istnieć będą dwa położenia równowagi.

Załóżmy teraz, że punkt ma pozostawać wewnątrz lub na powierzchni kuli (17). Więzy są tedy jednostronne, i współrzędne punktu muszą spełniać związek

$$(23) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \leqslant 0.$$

W położeniu równowagi na powierzchni kuli przesunięcia przygotowane określone są nierównością

$$(24) \qquad x\delta x + y\delta y + z\delta y \leqslant 0.$$

Praca przygotowana spełnia zatem nierówność

$$(25) \qquad P_x\delta x + P_y\delta y + (P_z - mg)\delta z \leqslant 0.$$

Dla przesunięć przygotowanych odwracalnych, t. j. spełniających równanie (18), praca przygotowana jest zerem, a więc zachodzi równość (19). Wynika stąd, że położeniem równowagi na powierzchni kuli może być tylko jedno z położeń, podanych przez wzory (21) i (22). Aby stwierdzić, które z nich jest położeniem równowagi, należy zbadać, dla którego z nich związek (24) pociąga za sobą (25).

Zakładając, że przesunięcie przygotowane spełnia warunek (24), otrzymujemy na mocy (22) po podstawieniu w (24)

$$(26) \qquad -[P_x\delta x + P_y\delta y + (P_z - mg)\delta z]/\lambda \leqslant 0.$$

Widzimy stąd, że wzór (25) będzie spełniony tylko wtedy, gdy $-1/\lambda > 0$, t. zn. gdy $\lambda < 0$.

A więc wzory (21) i (22) określają położenie równowagi, przy czym we wzorze (21) należy przyjąć znak —.

§ 5. Współrzędne uogólnione Lagrange'a. Parametry układu. Położenie układu punktów lub ciał sztywnych określamy przy pomocy pewnych liczb. Liczby te mogą być w szczególności współrzędnymi punktów względem pewnego układu prostokątnego współrzędnych; w wielu jednak przypadkach mogą mieć inne znaczenie.

Położenie punktu na płaszczyźnie możemy podać np. zarówno przy pomocy współrzędnych prostokątnych x, y, jak biegunowych r, φ i t. p. W szczególności, położenie układu złożonego z dwóch punktów A_1, A_2, których odległość d jest stała i które mają pozostawać w płaszczyźnie xy, możemy określić, podając bądź współrzędne x_1, y_1 i x_2, y_2 tych punktów, bądź np. współrzędne x_0, y_0 środka odcinka A_1A_2 i kąt φ, jaki ten odcinek tworzy z osią x. Znając x_0, y_0 i φ, wyznaczamy współrzędne punktów A_1, A_2 ze wzorów:

$$x_1 = x_0 - \tfrac{1}{2} d\cos\varphi, \qquad y_1 = y_0 - \tfrac{1}{2} d\sin\varphi$$
$$x_2 = x_0 + \tfrac{1}{2} d\cos\varphi, \qquad y_2 = y_0 + \tfrac{1}{2} d\sin\varphi.$$

Podobnie określić możemy położenie ciała sztywnego w przestrzeni, obierając dowolny układ współrzędnych (ξ, η, ζ), sztywnie z ciałem związany, i podając współrzędne x_0, y_0, z_0 początku układu (ξ, η, ζ) względem układu stałego (x, y, z) oraz kąty $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$, jakie osie ξ, η, ζ tworzą z osiami x, y, z układu stałego. Współrzędne punktów ciała wyznaczone są wówczas wzorami (I), str. 54.

Położenie ciała sztywnego mającego oś nieruchomą, określone jest przez jedną liczbę φ, oznaczającą kąt, o jaki należy ciało obrócić około osi, aby przeszło w dane położenie z pewnego położenia początkowego. Obierając oś obrotu za oś z i oznaczając przez ξ, η, ζ współrzędne dowolnego punktu w położeniu początkowym, zaś przez x, y, z współrzędne tegoż punktu po obrocie o kąt φ, mamy:

$$x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \qquad y = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi, \qquad z = \zeta.$$

Niech dany będzie układ holonomiczny skleronomiczny, złożony z n punktów materialnych.

Załóżmy, że każdemu położeniu układu punktów, które jest zgodne z więzami i bliskie położeniu, jakie badamy, przyporządkowany jest układ k liczb $q_1, \ldots, q_k$ w taki sposób, że różnym położeniom układu punktów przyporządkowane są różne układy liczb $q_1, \ldots, q_k$. Z założenia tego wynika, że współrzędne $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ punktów układu są funkcjami zmiennych $q_1, \ldots, q_k$:

$$
\begin{array}{lll}
x_1=f_1(q_1,\dots,q_k), & y_1=\varphi_1(q_1,\dots,q_k), & z_1=\psi_1(q_1,\dots,q_k),\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
x_n=f_n(q_1,\dots,q_k), & y_n=\varphi_n(q_1,\dots,q_k), & z_n=\psi_n(q_1,\dots,q_k).
\end{array}
$$

Powyższe związki zapisujemy krócej w postaci:

$$
\text{(I)}\quad x_i=f_i(q_1,\dots,q_k),\quad y_i=\varphi_i(q_1,\dots,q_k),\quad z_i=\psi_i(q_1,\dots,q_k)\quad (i=1,2,\dots,n).
$$

O funkcjach f_i, φ_i, ψ_i zakładamy na ogół, że są w pewnym obszarze zmiennych $q_1,\dots,q_k$ ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi i że ponadto różnym układom liczb $q_1,\dots,q_k$ odpowiadają w tym obszarze różne układy liczb $x_1,\dots,z_n$.

Liczby $q_1,\dots,q_k$ nazywamy *parametrami układu* albo *współrzędnymi uogólnionymi Langrange'a*.

Dla odróżnienia nazywamy współrzędne $x_1,\dots,z_n$ względem pewnego układu inercjalnego *współrzędnymi naturalnymi*.

Są one oczywiście szczególnym przypadkiem współrzędnych Langrange'a.

Parametry nazywamy *niezależnymi*, jeżeli każdemu układowi zmiennych $q_1,\dots,q_k$ funkcje (I) przyporządkowują położenia układu zgodne z więzami.

W przypadku więzów obustronnych możemy na ogół obrać parametry niezależne. Niech bowiem więzy układu określone będą funkcjami:

$$
\text{(1)}\qquad F_j(x_1,\dots,z_n)=0 \qquad (j=1,2,\dots,m).
$$

Z równań (1) możemy na ogół wyznaczyć m niewiadomych, znając pozostałych $k=3n-m$. Obierając więc dowolnie k zmiennych spośród $x_1,\dots,z_n$ i oznaczając je przez $q_1,\dots,q_k$, będziemy mogli zmienne $x_1,\dots,z_n$ przedstawić jako funkcje zmiennych $q_1,\dots,q_k$ w postaci (I). Ponieważ dowolnie obranym wartościom $q_1,\dots,q_k$ odpowiadają zmienne $x_1,\dots,z_n$ spełniające układ równań (1), więc parametry są niezależne.

Liczbę $k=3n-m$ nazwaliśmy liczbą stopni swobody układu (str. 423).

A więc: *liczba parametrów niezależnych równa się liczbie stopni swobody układu.*

Jeżeli parametry są zależne, wówczas w przypadku więzów obustronnych muszą zachodzić między parametrami $q_1, \ldots, q_k$ określającymi zgodne z więzami położenie układu, pewne związki:

$$\Phi_j(q_1, \ldots, q_k) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \varrho). \tag{2}$$

Obierając dowolnie pewnych $k-\varrho$ parametrów, możemy przy ich pomocy wyznaczyć pozostałe ze związków (2). Obrane parametry będą parametrami niezależnymi.

W przypadku więzów jednostronnych parametry, określające położenia układu zgodne z więzami, muszą oprócz związków postaci (2) spełniać jeszcze pewne nierówności kształtu

$$\Psi_r(q_1, \ldots, q_k) \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{3}$$

Jeżeli parametry są niezależne, wówczas funkcje (I) określają więzy układu, gdyż podają wszystkie jego położenia zgodne z więzami. Jeżeli zaś parametry są zależne, wówczas oprócz funkcji (I) należy podać związki (2) i (3), którym muszą czynić zadość parametry, odpowiadające położeniom układu zgodnym z więzami.

Przykład 1. Punkt ma pozostawać na powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2=r^2$. Obierając dowolnie x i y, mamy dla półkuli górnej $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$. Jeżeli więc położymy

$$x = q_1, \qquad y = q_2, \qquad \text{to} \qquad z = \sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2}. \tag{4}$$

Liczby q_1 i q_2 są parametrami niezależnymi.

Przykład 2. Punkt materialny A ma pozostawać na powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$. Oznaczając przez q_1, q_2, q_3 cosinusy kątów, jakie wektor $\overline{OA}$ (gdzie O oznacza początek układu współrzędnych) tworzy z osiami współrzędnych, mamy:

$$x = rq_1, \qquad y = rq_2, \qquad z = rq_3. \tag{5}$$

Parametry q_1, q_2, q_3 są zależne, muszą bowiem oczywiście spełniać równanie

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 1 = 0; \tag{6}$$

z równania tego (gdy $z \geqslant 0$) otrzymujemy $q_3 = \sqrt{1-q_1^2-q_2^2}$, skąd przez podstawienie w (5):

$$x_1 = rq_1, \qquad y = rq_2, \qquad z = r\sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2}. \tag{7}$$

W przedstawieniu (7) parametry q_1 i q_2 są niezależne.

Przesunięcia przygotowane. Niech więzy określone będą parametrycznie funkcjami:

$$\text{(II)}\qquad x_i=f_i(q_1,\ldots,q_k),\quad y_i=\varphi_i(q_1,\ldots,q_k),\quad z_i=\psi_i(q_1,\ldots,q_k)\quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Założmy, że parametry są niezależne.

Jeżeli nadamy układowi dowolny ruch zgodny z więzami, wówczas $q_1,\ldots,q_k$ będą funkcjami czasu. Różniczkując (II), otrzymamy:

$$\text{(8)}\qquad \begin{gathered}\dot{x}_i=\frac{\partial f_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\dot{q}_k,\qquad \dot{y}_i=\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\dot{q}_k,\\ \dot{z}_i=\frac{\partial \psi_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial \psi_i}{\partial q_k}\dot{q}_k,\qquad (i=1,2,\ldots,n).\end{gathered}$$

Na odwrót, jeżeli przyjmiemy, że $q_1,\ldots,q_k$ są dowolnymi funkcjami czasu, wówczas wzory (II) określają ruch układu zgodny oczywiście z więzami; równania (8) podają więc prędkości punktów układu w tym ruchu. Wynika stąd, że jeżeli układ znajduje się w pewnym położeniu, określonym parametrami $q_1,\ldots,q_k$, to wszelkie układy prędkości możliwych w tym położeniu otrzymamy z (8), podstawiając zamiast $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k$ wartości dowolne. Przyjmując:

$$\delta x_1=\dot{x}_1,\quad \ldots,\quad \delta z_n=\dot{z}_n,$$
$$\delta q_1=\dot{q}_1,\quad \ldots,\quad \delta q_k=\dot{q}_k,$$

i pisząc $\frac{\partial x_i}{\partial q_1}$ zamiast $\frac{\partial f_i}{\partial q_1}$ i t. d., otrzymamy z (8):

$$\text{(III)}\qquad \begin{gathered}\delta x_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k,\qquad \delta y_i=\frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k,\\ \delta z_i=\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k\qquad (i=1,2,\ldots,n).\end{gathered}$$

Podstawiając we wzorach (III) dowolne wartości $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$, otrzymamy przesunięcia przygotowane układu. Na odwrót, każde przesunięcie przygotowane układu dostaniemy przez podstawienie odpowiednich wartości $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$.

Zauważmy, że układ wzorów (III) możemy otrzymać, tworząc formalnie różniczkę układu wzorów (II), a następnie pisząc $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ zamiast dx_i, dy_i, dz_i, oraz $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ zamiast $dq_1,\ldots,dq_k$.

W przykładzie 1, str. 457, mamy ze wzorów (4):

$$\delta x=\delta q_1,\qquad \delta y=\delta q_2,\qquad \delta z=-(q_1\delta q_1+q_2\delta q_2)/\sqrt{1-q_1^2-q_2^2}.$$

Obierając dowolnie wartości δq_1 i δq_2, otrzymamy przesunięcie przygotowane $\delta x, \delta y, \delta z$ w położeniu odpowiadającym parametrom q_1 i q_2.

Jeżeli $q_1, \dots, q_k$ są parametrami zależnymi i zachodzą między nimi związki postaci (2), str. 457, to $\delta q_1, \dots, \delta q_k$ nie są we wzorach (III) liczbami dowolnymi, lecz — jak można okazać (por. dowód wzoru (15), str. 428) — muszą spełniać układ równań

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, \varrho).$$

W przykładzie 2, str. 457, mamy ze wzorów (5):

$$\delta x = r \delta q_1, \qquad \delta y = r \delta q_2, \qquad \delta z = r \delta q_3,$$

przyczem, na mocy (6), str. 457, zachodzi między $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ związek

$$q_1 \delta q_1 + q_2 \delta q_2 + q_3 \delta q_3 = 0.$$

Można okazać (por. dowód wzoru (II), str. 434), że jeżeli więzy są jednostronne i oprócz związków (2), str. 457, zachodzą związki (3), str. 457, to $\delta q_1, \dots, \delta q_k$ muszą spełniać oprócz (IV) te spośród związków

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial \Psi_r}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \Psi_r}{\partial q_k} \delta q_k \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, s),$$

dla których w danym położeniu układu zachodzi równość $\Phi_r = 0$.

Praca przygotowana. Siły uogólnione. Niech więzy układu określone będą parametrycznie przez równania:

$$\text{(9)} \quad x_i = f_i(q_1, \dots, q_k), \quad y_i = \varphi_i(q_1, \dots, q_k), \quad z_i = \psi_i(q_1, \dots, q_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Przesunięcia przygotowane wyrażają się wzorami (III), str. 458.

Jeżeli parametry są niezależne, wówczas $\delta q_1, \dots, \delta q_k$ są liczbami dowolnymi. W przeciwnym razie zachodzą między nimi pewne związki (IV) i (V).

Podstawiając w (I'), str. 436, zamiast $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ wyrażenia (III), str. 458, otrzymamy

$$\text{(10)} \quad \begin{aligned} \delta' L = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[& P_{ix} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) + \\ & + P_{iy} \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) + P_{iz} \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) \Bigg]. \end{aligned}$$

Porządkując według $\delta q_1, \dots, \delta q_k$, dostaniemy

$$\delta q_1 \sum_{i=1}^{n} \left(P_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + P_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + P_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) + \dots$$

$$\dots + \delta q_k \sum_{i=1}^{n} \left(P_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + P_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + P_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right).$$

Oznaczmy przez $Q_1, \dots, Q_k$ sumy, występujące jako spółczynniki przy $\delta q_1, \dots, \delta q_k$:

$$\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} Q_1 &= \sum_{i=1}^{n} \left(P_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + P_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + P_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_k &= \sum_{i=1}^{n} \left(P_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + P_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + P_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right), \end{aligned}$$

co zapisujemy krócej

$$\text{(VI')} \qquad Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + P_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + P_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \qquad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Otrzymamy stąd na mocy (10) $\delta' L = Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_k \delta q_k$ czyli

$$\text{(VII)} \qquad \delta' L = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j.$$

Wyrażenia $Q_1, \dots, Q_k$, określone wzorami (VI) i (VI'), nazywamy *składowymi siły uogólnionej* lub krótko *siłami uogólnionymi*.

Porównując wzór (VII) ze wzorem (I'), str. 436, widzimy, że praca przygotowana wyraża się przy pomocy składowych Q_j siły uogólnionej i przesunięć δq_j w podobny sposób jak przy pomocy składowych $P_{i_x}, P_{i_y}, P_{i_z}$ i przesunięć $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$.

W a r u n k i r ó w n o w a g i. Niech więzy układu holonomicznego skleronomicznego określone będą przy pomocy parametrów $q_1, \dots, q_k$. Warunek (II), str. 439, równowagi układu przyjmie na mocy (VII) postać

$$\text{(VIII)} \qquad \delta' L = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j \leq 0.$$

Jeżeli więzy są obustronne, wówczas ((III), str. 439)

$$\delta' L = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j = 0. \tag{IX}$$

Siły uogólnione $Q_1, \ldots, Q_k$ występujące we wzorach (VIII) i (IX), określone są wzorami (VI) i (VI').

Jeżeli parametry $q_1, \ldots, q_k$ są niezależne, to $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ są dowolne. Na mocy więc (IX), przyjmując $\delta q_1 = 1$ oraz $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_k = 0$, dostaniemy $Q_1 = 0$ i podobnie $Q_2 = 0, \ldots, Q_k = 0$.

A więc: *jeżeli parametry, określające położenie układu holonomicznego skleronomicznego są niezależne (i tarcie nie występuje), to warunkiem koniecznym i wystarczającym dla równowagi sił działających jest, by siły uogólnione były zerami:*

$$Q_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{X}$$

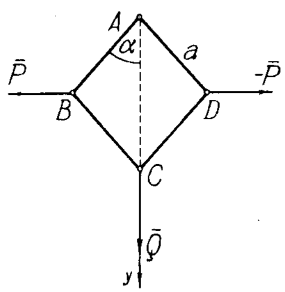
Jeżeli zaś parametry $q_1, \ldots, q_k$ są zależne i spełniają związki (2) lub (4), str. 457, wówczas $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ nie są liczbami dowolnymi, lecz muszą czynić zadość związkom (IV) lub (V), str. 459. Położenie równowagi wyznaczamy wtedy podobnie jak dla współrzędnych naturalnych, t.j. w sposób podany na str. 449.

Uwaga. Współrzędne naturalne są szczególnym przypadkiem współrzędnych uogólnionych. Jeżeli więc współrzędnymi naturalnymi punktów układu są $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$, to kładąc:

$$x_1 = q_1, \qquad y_1 = q_2, \qquad z_1 = q_3, \quad \ldots, \quad z_n = q_{3n},$$

możemy stosować wzory (I)-(X) § niniejszego. Wyniki otrzymane w tym § są więc uogólnieniem odpowiednich wyników dla współrzędnych naturalnych.

Przykład 3. Cztery pręty równej długości a, leżące w płaszczyźnie pionowej, połączone są przegubowo w A, B, C i D. Przegub A jest unieruchomiony, zaś C może się poruszać tylko po prostej pionowej l, przechodzącej przez A. W przegubach B i D zaczepione są siły poziome $\bar{P}$ i $-\bar{P}$, w przegubie zaś C siła pionowa $\bar{Q}$ (mająca zwrot ku dołowi). Wyznaczyć położenie równowagi, pomijając ciężary prętów i zakładając, że nie ma tarcia oraz że pręty mogą się poruszać tylko w płaszczyźnie pionowej, w której leżą siły $\bar{P}$ i $\bar{Q}$.



Przyjmijmy A za początek układu współrzędnych (x, y) płaszczyzny pionowej, w której leżą pręty, a oś l za oś y (ze zwrotem ku dołowi). Położenie układu będzie wówczas określone przez podanie kąta α między prętem AB a osią y. Zatem α jest parametrem układu.

Z rysunku widać, że współrzędne x_1, y_1, x_2, y_2 i x_3, y_3 węzłów B, C i D są następujące:

$$(11)\qquad \begin{aligned} x_1 &= -a\sin\alpha, & x_2 &= 0, & x_3 &= a\sin\alpha, \\ y_1 &= a\cos\alpha, & y_2 &= 2a\cos\alpha, & y_3 &= a\cos\alpha. \end{aligned}$$

Praca przygotowana wynosi

$$(12)\qquad \delta' L = -P\delta x_1 + Q\delta y_2 + P\delta x_3,$$

gdzie $P = |\bar{P}|$ i $Q = |\bar{Q}|$. Na mocy (11) mamy:

$$\delta x_1 = -a\cos\alpha\,\delta\alpha, \qquad \delta y_2 = -2a\sin\alpha\,\delta\alpha, \qquad \delta x_3 = a\cos\alpha\,\delta\alpha.$$

Podstawiając te wartości w (12), dostaniemy

$$(13)\qquad \delta' L = 2a(P\cos\alpha - Q\sin\alpha)\delta\alpha.$$

W położeniu równowagi jest $\delta' L = 0$, więc $2a(P\cos\alpha - Q\sin\alpha)\delta\alpha = 0$; zatem $P\cos\alpha - Q\sin\alpha = 0$ czyli

$$\operatorname{tg}\alpha = P/Q.$$

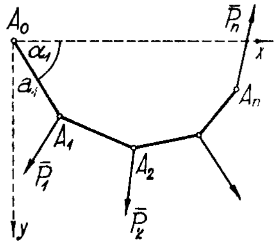
Przykład 4. Dany jest układ prętów $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$, połączonych przegubowo w $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Na układ działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ o początkach w $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Punkt A_0 jest unieruchomiony. Wyznaczyć położenie równowagi, przyjmując, że pręty i siły leżą w jednej płaszczyźnie.

Przyjmijmy punkt A_0 za początek układu współrzędnych (x, y) tej płaszczyzny i oznaczmy przez $a_1, a_2, \ldots, a_n$ długości prętów, przez $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ kąty między prętami a osią x, wreszcie przez $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ współrzędne punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (str. 463, rys. 1). Mamy:

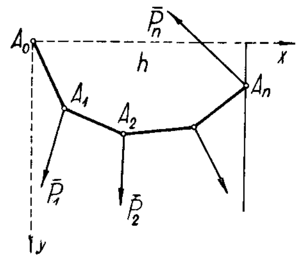
$$(14)\qquad x_1 = a_1\cos\alpha_1, \quad x_2 = a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2, \ldots, x_n = a_1\cos\alpha_1 + \ldots + a_n\cos\alpha_n,$$

$$(15)\qquad y_1 = a_1\sin\alpha_1, \quad y_2 = a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2, \ldots, y_n = a_1\sin\alpha_1 + \ldots + a_n\sin\alpha_n.$$

Z (14) i (15) wynika, że kąty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ określają położenie układu prętów. Zatem zmienne $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są parametrami układu, a ponieważ nie zachodzą między nimi żadne związki, więc są parametrami niezależnymi.



1.



2.

Różniczkując (14) i (15), otrzymamy:

$$\delta x_1 = -a_1 \sin\alpha_1 \delta\alpha_1, \quad \ldots, \quad \delta x_n = -a_1 \sin\alpha_1 \delta\alpha_1 - \ldots - a_n \sin\alpha_n \delta\alpha_n \tag{16}$$

$$\delta y_1 = a_1 \cos\alpha_1 \delta\alpha_1, \quad \ldots, \quad \delta y_n = a_1 \cos\alpha_1 \delta\alpha_1 + \ldots + a_n \cos\alpha_n \delta\alpha_n. \tag{17}$$

W położeniu równowagi praca przygotowana wynosi

$$\delta' L = (P_{1_x} \delta x_1 + P_{1_y} \delta y_1) + \ldots + (P_{n_x} \delta x_n + P_{n_y} \delta y_n) = 0. \tag{18}$$

Podstawiając wartości (16) i (17) w (18), dostaniemy po uporządkowaniu

$$\begin{aligned} & a_1[-(P_{1_x} + \ldots + P_{n_x}) \sin\alpha_1 + (P_{1_y} + \ldots + P_{n_y}) \cos\alpha_1] \delta\alpha_1 + \\ & + a_2[-(P_{2_x} + \ldots + P_{n_x}) \sin\alpha_2 + (P_{2_y} + \ldots + P_{n_y}) \cos\alpha_2] \delta\alpha_2 + \ldots \\ & \ldots + a_n[-P_{n_x} \sin\alpha_n + P_{n_y} \cos\alpha_n] \delta\alpha_n = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Współczynniki przy $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_n$ są siłami uogólnionymi $Q_1, \ldots, Q_n$. Ponieważ równość (19) zachodzi dla każdego układu liczb $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_n$, więc siły uogólnione są zerami. Zatem:

$$\begin{aligned} & -(P_{1_x} + \ldots + P_{n_x}) \sin\alpha_1 + (P_{1_y} + \ldots + P_{n_y}) \cos\alpha_1 = 0, \\ & -(P_{2_x} + \ldots + P_{n_x}) \sin\alpha_2 + (P_{2_y} + \ldots + P_{n_y}) \cos\alpha_2 = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & -P_{n_x} \sin\alpha_n + P_{n_y} \cos\alpha_n = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Z równań (20) obliczamy łatwo tangensy kątów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Ponieważ tangensy są równe dla kątów różniących się o 180^0, więc otrzymujemy wiele rozwiązań.

Jeżeli w pewnym spośród równań (20) współczynniki przy sin i cos są zerami, to odpowiedni kąt możemy obrać dowolnie.

Załóżmy teraz, że punkt A_n ma znajdować się na prostej l o równaniu $x=h$, jak np. gdy koniec A_n pręta $A_{n-1}A_n$ jest pierścieniem nasuniętym na drut sztywny, mający położenie prostej l (str. 463, rys. 2). Przy tym założeniu parametry $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nie będą niezależne, ponieważ będzie musiał zachodzić związek $x_n=h$ czyli wobec (14)

$$a_1 \cos\alpha_1 + \ldots + a_n \cos\alpha_n - h = 0. \tag{21}$$

Różniczkując (21), otrzymamy

$$-a_1 \sin\alpha_1\,\delta\alpha_1 + \ldots - a_n \sin\alpha_n\,\delta\alpha_n = 0; \tag{22}$$

przez podstawienie w (22) dowolnych wartości zamiast $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_{n-1}$ otrzymamy

$$\delta\alpha_n = -(a_1 \sin\alpha_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + a_{n-1} \sin\alpha_{n-1}\,\delta\alpha_{n-1}) / a_n \sin\alpha_n. \tag{23}$$

Z uwagi na (22) równanie (19) przyjmie postać

$$\begin{aligned} &a_1[-(P_{1_x}+\ldots+P_{n-1,x})\sin\alpha_1 + (P_{1_y}+\ldots+P_{n_y})\cos\alpha_1]\,\delta\alpha_1 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots + a_{n-1}[-P_{n-1,x}\sin\alpha_{n-1} + (P_{n-1,y}+P_{n_y})\cos\alpha_{n-1}]\,\delta\alpha_{n-1} + \\ &+ a_n P_{n_y} \cos\alpha_n\,\delta\alpha_n = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Podstawiając w (24) wartość z (23), dostaniemy po uporządkowaniu

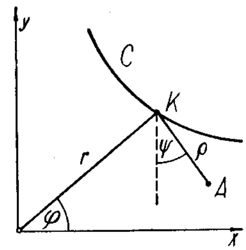
$$\begin{aligned} &a_1[-(P_{1_x}+\ldots+P_{n-1,x}+P_{n_y}\cot\alpha_n)\sin\alpha_1 + (P_{1_y}+\ldots+P_{n_y})\cos\alpha_1]\delta\alpha_1 + \ldots \\ &\ldots + a_{n-1}[-(P_{n-1,x}+P_{n_y}\cot\alpha_n)\sin\alpha_{n-1} + (P_{n-1,y}+P_{n_y})\cos\alpha_{n-1}]\delta\alpha_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_{n-1}$ są liczbami dowolnymi, więc współczynniki przy nich są zerami. Otrzymamy więc układ $n-1$ równań:

$$\begin{aligned} &-(P_{1_x}+\ldots+P_{n-1,x}+P_{n_y}\cot\alpha_n)\sin\alpha_1 + (P_{1_y}+\ldots+P_{n_y})\cos\alpha_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-(P_{n-1,x}+P_{n_y}\cot\alpha_n)\sin\alpha_{n-1} + (P_{n-1,y}+P_{n_y})\cos\alpha_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Równania te w połączeniu z równaniem (21) stanowią układ n równań, z którego możemy wyznaczyć n niewiadomych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Przykład 5. Na krzywą C, leżącą w płaszczyźnie pionowej xy, nasunięty jest pierścień ciężki K o masie m_1. Przez pierścień przewinięta jest nić (nierozciągliwa i bez masy), uczepiona jednym końcem w początku O układu współrzędnych i dźwigającą na drugim końcu punkt ciężki A o masie m_2. Wyznaczyć położenie równowagi, zakładając, że nie ma tarcia.



Niech krzywa C ma we współrzędnych biegunowych równanie

$$r=f(\varphi). \tag{25}$$

Współrzędne x_1, y_1 punktu K wynoszą zatem:

$$x_1=r\cos\varphi, \qquad y_1=r\sin\varphi. \tag{26}$$

Połóżmy $\varrho=AK$. Oznaczając przez l długość nici, mamy

$$r+\varrho-l\leqslant 0. \tag{27}$$

Niechaj ψ będzie kątem między AK a pionem, zaś x_2, y_2 współrzędnymi punktu A. Zatem $x_2=x_1+\varrho\sin\psi$, $y_2=y_1-\varrho\cos\psi$, skąd na mocy (26):

$$x_2=r\cos\varphi+\varrho\sin\psi, \qquad y_2=r\sin\varphi-\varrho\cos\psi. \tag{28}$$

Równania (26) i (28) określają więzy układu przez parametry $r, \varrho, \varphi, \psi$, między którymi zachodzą związki (25) i (27).

Praca przygotowana wynosi $\delta' L=-m_1 g\delta y_1-m_2 g\delta y_2$. W położeniu równowagi jest $\delta' L\leqslant 0$, więc

$$m_1\delta y_1+m_2\delta y_2\geqslant 0. \tag{29}$$

Gdy nić nie jest napięta, punkt A jest swobodny, więc δy_2 może być dowolne. Przyjmując w tym przypadku $\delta y_1=0$ i $\delta y_2<0$, otrzymalibyśmy $m_1\delta y_1+m_2\delta y_2<0$ wbrew (29), co dowodzi, że układ nie może być w równowadze przy nici nie napiętej.

Załóżmy więc, że nić jest napięta (t. j. że we wzorze (27) zachodzi równość) oraz że $r>0$ i $\varrho>0$; z (26) i (28) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \delta y_1&=\delta r\sin\varphi+r\cos\varphi\delta\varphi, \\ \delta y_2&=\delta r\sin\varphi+r\cos\varphi\delta\varphi-\delta\varrho\cos\psi+\varrho\delta\psi\sin\psi. \end{aligned} \tag{30}$$

Na mocy (25) i (27) zachodzą między δr, $\delta\varphi$ i $\delta\varrho$ związki:

$$\delta r=f'(\varphi)\delta\varphi, \qquad \delta r+\delta\varrho\leqslant 0, \tag{31}$$

natomiast $\delta\psi$ jest dowolne.

Podstawiając do (29) zamiast $\delta y_1, \delta y_2$ wyrażenia z (30), otrzymamy

$$(m_1+m_2)\sin\varphi\delta r+(m_1+m_2)r\cos\varphi\delta\varphi-m_2\delta\varrho\cos\psi+m_2\varrho\delta\psi\sin\psi\geqslant 0. \tag{32}$$

Na mocy (31) możemy przyjąć, że $\delta r=0$, $\delta\varphi=0$ i $\delta\varrho=0$, skąd na mocy (32)

$$m_2\varrho\delta\psi\sin\psi \geqslant 0. \tag{33}$$

Ponieważ $\delta\psi$ jest dowolne, więc nierówność (33) zajdzie tylko wtedy, gdy $m_2\varrho\sin\psi=0$ czyli gdy $\sin\psi=0$, a więc dla $\psi=0$ i $\psi=\pi$. Intuicyjnie jest jasnym, że w położeniu równowagi może być tylko $\psi=0$, równość bowiem $\psi=\pi$ znaczy, że A znajduje się nad K, co jest oczywiście niemożliwe w położeniu równowagi. Wynika to również ze związku (32), przyjmując bowiem na mocy (31) $\delta r=0$, $\delta\varphi=0$, $\delta\varrho<0$ i $\delta\psi=0$, otrzymalibyśmy z (32) $-m_2\delta\varrho\cos\psi\geqslant 0$, a ponieważ $\delta\varrho<0$, więc $\cos\psi\geqslant 0$, skąd $\psi\neq\pi$.

Udowodniliśmy zatem, że w położeniu równowagi jest $\psi=0$, t. zn. że A znajduje się pod K. Podstawiając $\psi=0$ w (32), otrzymujemy na mocy (25) i (31)

$$(m_1+m_2)(f'(\varphi)\sin\varphi+f(\varphi)\cos\varphi)\delta\varphi-m_2\delta\varrho\geqslant 0. \tag{34}$$

Na mocy (31) możemy przyjąć

$$\delta r+\delta\varrho=0 \quad \text{czyli} \quad \delta\varrho=-\delta r=-f'(\varphi)\delta\varphi,$$

gdzie $\delta\varphi$ jest dowolne. Podstawiając w (34), dostaniemy wówczas

$$[(m_1+m_2)(f'(\varphi)\sin\varphi+f(\varphi)\cos\varphi)+m_2f'(\varphi)]\delta\varphi\geqslant 0.$$

Ponieważ $\delta\varphi$ jest dowolne, więc związek powyższy zajdzie tylko wówczas, gdy

$$(m_1+m_2)(f'(\varphi)\sin\varphi+f(\varphi)\cos\varphi)+m_2f'(\varphi)=0. \tag{35}$$

Równanie (35) pozwala wyznaczyć kąt φ w położeniu równowagi.

Na odwrót, jeżeli zachodzi równanie (35), to spełniona być musi nierówność (34). Oznaczmy bowiem przez W lewą stronę tej nierówności. Na mocy (35) jest $W=-m_2f'(\varphi)\delta\varphi-m_2\delta\varrho$, skąd na mocy (31) $W=-m_2(\delta r+\delta\varrho)$. Ponieważ wobec (31) jest $\delta r+\delta\varrho\leqslant 0$, więc $W\geqslant 0$. Jeżeli tedy kąt φ spełnia równanie (35), to zachodzi równowaga.

Zbadamy jeszcze dla jakiej krzywej C równowaga zachodzi przy każdej wartości kąta φ, t. zn. w przypadku, gdy równanie (35) staje się tożsamością.

Zauważmy w tym celu, że lewa strona równania (35) jest pochodną funkcji $f(\varphi)[(m_1+m_2)\sin\varphi+m_2]$; zatem

$$f(\varphi)[(m_1+m_2)\sin\varphi+m_2]=c=\text{const.}$$

Ponieważ na mocy (1) jest $r=f(\varphi)$, więc

$$r=\frac{c}{(m_1+m_2)\sin\varphi+m_2}. \tag{36}$$

Jeżeli $c\neq 0$, $m_1>0$ i $m_2>0$, to równanie powyższe jest równaniem dolnej gałęzi hyperboli, której osią rzeczywistą jest oś y.

Równowaga w polu potencjalnym. Załóżmy, że siły $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n$ mają potencjał V. Zatem ((III), str. 214):

$$P_{i_x}=\frac{\partial V}{\partial x_i},\qquad P_{i_y}=\frac{\partial V}{\partial y_i},\qquad P_{i_z}=\frac{\partial V}{\partial z_i}. \tag{37}$$

Podstawiając te wartości do wzoru (VI'), str. 460, dostaniemy

$$Q_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right). \tag{38}$$

Potencjał V jest funkcją zmiennych $x_1,\ldots,z_n$. Wyrażając je przez parametry $q_1,\ldots,q_k$, możemy więc przyjąć, że V jest funkcją parametrów $q_1,\ldots,q_k$. Ze znanego wzoru z rachunku różniczkowego na pochodną cząstkową funkcji złożonej wynika, że prawa strona równania (38) jest pochodną cząstkową $\partial V/\partial q_j$. Zatem

$$Q_j=\partial V/\partial q_j \qquad (j=1,2,\ldots,k). \tag{XI}$$

Porównując (37) i (XI), widzimy, że składowe sił uogólnionych wyrażają się podobnie jak składowe sił względem współrzędnych naturalnych.

A więc: *jeżeli pole sił jest polem potencjalnym, to składowe sił uogólnionych są pochodnymi cząstkowymi potencjału względem współrzędnych uogólnionych.*

Ze wzorów (VII), str. 460, i (XI) otrzymujemy

$$\delta' L=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{39}$$

Na mocy (18), str. 430, możemy więc napisać

$$\delta' L=\delta V, \tag{XII}$$

gdzie V uważamy za funkcję zmiennych $q_1,\ldots,q_k$.

Wzór (XII) ma tę samą postać co wzór (I''), str. 437. Różnica polega na tym, że we wzorze (I'') uważamy V za funkcję współrzędnych naturalnych $x_1,\ldots,z_n$, zaś we wzorze (XII) za funkcję parametrów $q_1,\ldots,q_k$.

Uwaga. Znaczenie wyrażenia δV uzmysławia rozumowanie następujące. Nadajmy układowi w danym położeniu w chwili t dowolny ruch zgodny z więzami. Parametry $q_1, \ldots, q_k$ oraz potencjał V będą więc funkcjami czasu. Mamy

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial q_j} \dot{q}_j. \tag{40}$$

Ponieważ możemy przyjąć, że $\dot{q}_j = \delta q_j$ dla $j = 1, 2, \ldots$, więc na mocy (40) mamy $\delta V = dV/dt$. Tym sposobem δV przedstawia szybkość zmiany (t.j. pochodną) potencjału przy dowolnym ruchu zgodnym z więzami, jaki nadajemy układowi.

Z zasady prac przygotowanych wynika na mocy (XII), że warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi układu jest, by

$$\delta V \leqslant 0. \tag{XIII}$$

W szczególności więc, *położeniem równowagi układu jest położenie, w którym potencjał osiąga maximum, a w przypadku więzów obustronnych również położenie, w którym potencjał osiąga minimum.*

Jeżeli bowiem układowi nadamy dowolny ruch zgodny z więzami w chwili, gdy V osiąga maximum, to po czasie Δt przyrost potencjału będzie $\Delta V \leqslant 0$, skąd $dV/dt \leqslant 0$ (przyczem nierówność $dV/dt < 0$ zachodzić może w położeniu brzeżnym przy więzach jednostronnych), a zatem $\delta V \leqslant 0$ (w myśl uwagi o znaczeniu δV). Jeżeli zaś więzy są obustronne i V ma wartość minimum, to $dV/dt = 0$, skąd $\delta V = 0$.

Jeżeli na układ punktów materialnych działają tylko siły ciężkości, wówczas potencjał wynosi ((13), str. 215)

$$V = -mgz_0, \tag{41}$$

gdzie m oznacza masę całkowitą układu, zaś z_0 współrzędną środka masy przy założeniu, że oś z ma zwrot pionowy ku górze.

Położeniem równowagi będzie więc każde położenie, w którym V jest maximum czyli z_0 minimum. Jeżeli więzy są obustronne, to położeniem równowagi będzie prócz tego każde położenie, w którym V jest minimum czyli z_0 maximum.

Jeżeli punkt ciężki A zawieszony jest na nici nierozciągliwej, uwiązanej w początku O, to ekstrema potencjału V wystąpią wówczas, gdy nić jest napięta i ma kierunek pionowy. Maximum jest wtedy, gdy A znajduje się pod O, minimum zaś, gdy A jest nad O. Oczywistym jest, że położenie równowagi występuje tylko wtedy, gdy V ma wartość maximum (t. j. gdy A jest pod O).

Przykład 6. Dwa punkty materialne A_1 i A_2 ciężkie o masach m_1 i m_2 połączone są nicią nierozciągliwą, przewiniętą przez krążek. Punkt m_2 ma pozostawać na prostej pionowej l. Jaki kąt φ tworzy nić z prostą l w położeniu równowagi, jeżeli nie ma tarcia (str. 195, rys. 1)?

Przyjmijmy oś l za oś z, nadając jej zwrot ku górze, a punkt osi, znajdujący się na wysokości krążka, za początek układu współrzędnych. Oznaczmy przez s długość nici, przez a odległość krążka od osi l, przez z_1 i z_2 współrzędne punktów A_1 i A_2, a przez z_0 współrzędne środka masy. Mamy:

$$z_1 = -(s - a/\sin\varphi), \qquad z_2 = -a \operatorname{ctg} \varphi.$$

Ponieważ $mz_0 = m_1 z_1 + m_2 z_2$, gdzie $m = m_1 + m_2$, więc

$$z_0 = [-m_1(s - a/\sin\varphi) - m_2 a \operatorname{ctg} \varphi]/m.$$

Aby wyznaczyć extremum z_0, przyrównujemy pochodną $dz_0/d\varphi$ do zera:

$$-m_1 a \cos\varphi/\sin^2\varphi + m_2 a/\sin^2\varphi = 0,$$

skąd

$$\cos\varphi = m_2/m_1. \tag{42}$$

Łatwo zbadać, że dla wartości φ, spełniającej równanie (42), z_0 jest minimum. Równanie (42) określa więc położenie równowagi (gdy $m_2 < m_1$).

Inny sposób rozwiązania podany jest w przykładzie 2, str. 195.