DODATEK

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU DRUGIEGO O WSPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH

Tak nazywamy równania kształtu

$$y''+ay'+by=\varphi(x), \tag{I}$$

gdzie a,b są danymi liczbami rzeczywistymi, $\varphi(x)$ funkcją znaną; szukaną zaś jest funkcja $y=f(x)$, spełniająca (I).

Równanie (I), w którym funkcja $\varphi(x)$ jest zerem, nazywamy *równaniem jednorodnym.*

Równanie jednorodne ma więc postać

$$y''+ay'+by=0. \tag{II}$$

Aby rozwiązać równanie jednorodne (II), przyjmujemy

$$y=e^{rx}, \tag{1}$$

gdzie r jest liczbą tak dobraną, aby równanie (II) było spełnione.

Różniczkując (1), otrzymamy:

$$y'=re^{rx}, \qquad y''=r^2e^{rx}. \tag{2}$$

Podstawiając (1) i (2) w (II) otrzymamy

$$r^2e^{rx}+are^{rx}+be^{rx}=0,$$

skąd po podzieleniu przez e^{rx}

$$r^2+ar+b=0. \tag{III}$$

Równanie (III) nazywamy *równaniem charakterystycznym* dla (II).

Postać rozwiązania równania jednorodnego (II) zależy od tego, czy pierwiastki r_1, r_2 równania charakterystycznego (III) są rzeczywiste (równe lub różne), czy zespolone. Rozpatrzmy więc 3 przypadki:

1⁰ Pierwiastki r_1, r_2 są rzeczywiste i różne. Najogólniejszym rozwiązaniem równania (II) jest wówczas

(3) $$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

gdzie c_1, c_2 są dowolnymi liczbami stałymi.

2⁰ Pierwiastki r_1, r_2 są rzeczywiste i równe. Najogólniejszym rozwiązaniem równania (II) jest wtedy

(4) $$y = (c_1 x + c_2)\, e^{r_1 x},$$

gdzie c_1, c_2 są dowolnymi stałymi.

3⁰ Pierwiastki r_1, r_2 są zespolone. Ponieważ równanie (III) ma współczynniki a, b rzeczywiste, więc r_1, r_2 są liczbami sprzężonymi. Przyjmijmy:

$$r_1 = \alpha + \beta i, \qquad r_2 = \alpha - \beta i.$$

Najogólniejszym rozwiązaniem (II) jest w tym przypadku

(5) $$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x),$$

gdzie c_1, c_2 są dowolnymi stałymi.

Aby znaleźć rozwiązanie ogólne równania (I), staramy się znaleźć najpierw jakieś jedno szczególne rozwiązanie tego równania. Jeżeli nam się to uda i $y = \psi(x)$ jest tym szczególnym rozwiązaniem, to rozwiązujemy następnie równanie jednorodne (II). Najogólniejsze rozwiązanie równania (I) otrzymujemy, dodając rozwiązanie szczególne $\psi(x)$ do rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (II).

Przykład 1. Rozwiązać równania:

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (b) $y'' + 2y' + y = 0$; (c) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Równaniami charakterystycznymi są:

(a) $r^2 - 3r + 2 = 0$; (b) $r^2 + 2r + 1 = 0$; (c) $r^2 - 2r + 5 = 0$.

Pierwiastki powyższych równań wynoszą:

(a) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$; (b) $r_1 = r_2 = -1$, (c) $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$.

Najogólniejsze rozwiązania mają więc postać:

(a) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$; (b) $y = (c_1 x + c_2) e^{-x}$; (c) $y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$y''-3y'+2y=4x^2. \tag{d}$$

Staramy się znaleźć rozwiązanie postaci

$$y=ax^2+bx+c. \tag{6}$$

Aby wyznaczyć a, b i c, podstawiamy (6) do (d). Dostaniemy po utworzeniu pochodnych:

$$2a-3(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=4x^2,$$

skąd

$$2ax^2+(-6a+2b)x+(2a-3b+2c)=4x^2.$$

Porównując współczynniki, otrzymamy:

$$2a=4, \qquad -6a+2b=0, \qquad 2a-3b+2c=0,$$

zatem:

$$a=2, \qquad b=6, \qquad c=7.$$

Na mocy więc (6) rozwiązaniem szczególnym równania (d) jest

$$y=2x^2+6x+7. \tag{7}$$

Równanie jednorodne $y''-3y'+2y=0$ ma rozwiązanie ogólne

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x} \tag{8}$$

(przykład 1(a)). Najogólniejszym rowziązaniem równania (d) jest więc na mocy (7) i (8)

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+2x^2+6x+7,$$

gdzie c_1, c_2 są dowolnymi stałymi.