MATEMATYKA

CZASOPISMO DLA NAUCZYCIELI

2

MARZEC
KWIECIEŃ

ROK XLV 1992
ISSN 0137-8848

DISAN NIKONOWICZ
Toruń

STEFAN BANACH (1892—1945)

W marcu 1992 r. świat nauki obchodził setną rocznicę urodzin wielkiego polskiego matematyka **STEFANA BANACHA.**

Historia matematyki XX wieku może się poszczycić wieloma wybitnymi postaciami, wśród których nie brakuje również Polaków. W ich ścisłej czołówce nazwisko Banacha figuruje obok najznakomitszych matematyków światowej sławy. Bez przesady można powiedzieć, że jest fenomenem naszej epoki. Tak nadzwyczajny był jego talent matematyczny graniczący z geniuszem. „Odkrywca" S. Banacha — znakomity polski matematyk prof. Hugo Steinhaus — powiedział o nim: *„Dał matematyce polskiej więcej niż ktokolwiek inny. Jego najważniejszą zasługą jest przełamanie raz na zawsze i zniszczenie do reszty kompleksu polegającego na poczuciu niższości Polaków w naukach ścisłych, maskującego się wywyższaniem jednostek miernych".*

Zamierzeniem moim jest możliwie wszechstronne, na ile pozwalają ramy artykułu, ukazanie życia i osobowości Stefana Banacha oraz jego doniosłych osiągnięć w dziedzinie matematyki, w celu przybliżenia go nie tylko nauczycielom, ale przede wszystkim młodzieży.

Spełniając miły obowiązek pragnę wyrazić podziękowanie Panu dr med. Stefanowi Banachowi — synowi prof. S. Banacha — za życzliwe potraktowanie mojej prośby i udzielenie szeregu informacji oraz poczynienie cennych uwag przy opracowywaniu niniejszego biogramu.

Dziękuję Panu prof. Stanisławowi Hartmanowi za cenne uwagi i poprawki w matematycznych fragmentach tekstu oraz obszerne przypisy.

Dziękuję również za życzliwość Pani Françoise Ulam — wdowie po prof. Stanisławie Ulamie, uczniu i bliskim współpracowniku S. Banacha, za nadesłanie wspomnień jej męża. Przyczyniły się one do szerszego ujęcia niektórych fragmentów pracy.

1. Dzieciństwo i lata szkolne.

Stefan Banach urodził się 30 marca 1892 r. w Krakowie. O jego rodzicach i latach dziecięcych zachowały się nader skąpe wiadomości. Według informacji uzyskanej od jego syna — dra Stefana Banacha jr., był nieślubnym dzieckiem Katarzyny Banach i Stefana Greczka. Katarzyna, ładna dziewczyna, z pochodzenia góralka, zakochała się w Stefanie Greczku, który pochodził również z rodziny góralskiej z Ostrowska (okolice Nowego Targu) i był z zawodu księgowym. Owocem tej miłości był przyszły geniusz matematycz-

Budynek przy ul. Grodzkiej w Krakowie, w którym w latach 1892—1919 mieszkał Stefan Banach. (Zdjęcie z 1991 r.) Wyglądał w owym okresie nieco inaczej — w 1928 r. rozszerzono fasadę od podwórza a w 1933 r. przebudowano portale. (fot. W. Nikonowicz)

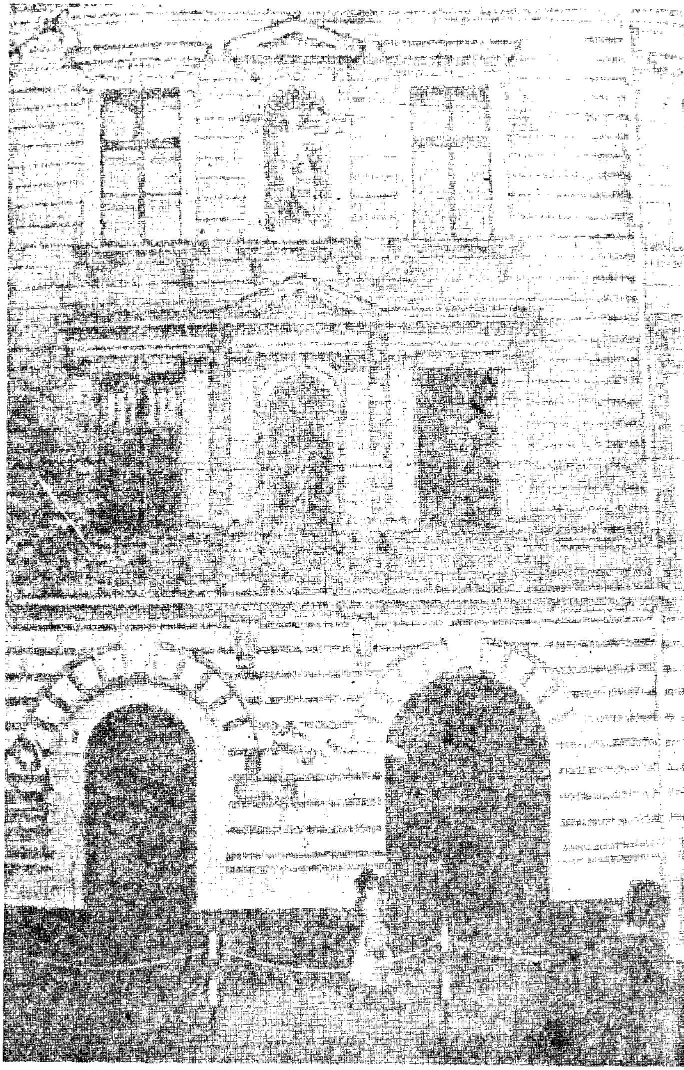
ny. Swoje góralskie pochodzenie S. Banach nieraz później podkreślał. S. Greczek nie poślubił jednak Katarzyny ani też nie nadał synowi swego nazwiska. Zrozpaczona dziewczyna zaraz po urodzeniu dziecka oddała je na wychowanie Marii Płowej — krakowskiej praczce, zamieszkałej na poddaszu przy ulicy Grodzkiej 71. Małym Stefkiem zaopiekowała się, i to nader troskliwie, córka p. Marii — Mania (po zamążpójściu — p. Puchalska). Stefek uważał ją za swoją starszą siostrę, zaś p. Płową — za swoją matkę.

Stefan Banach nie znał zupełnie swojej matki. Natomiast ojciec widywał się z nim sporadycznie, nie troszczył się jednak zupełnie o jego wychowanie ani też nie udzielał mu żadnej pomocy materialnej.

W roku 1902, gdy Stefan ukończył 10 lat, opiekunka zapisała go do I klasy gimnazjum w Krakowie. Egzamin wstępny obowiązywał z religii, języka polskiego i niemieckiego oraz rachunków. Stefan zdał ten egzamin i został przyjęty. Musiał go zatem ktoś do niego przygotować. Nauka w gimnazjum wiązała się z dość znacznymi wydatkami: trzeba było uiścić wpisowe, zakupić mundurek, książki i zeszyty oraz wnosić co miesiąc czesne (stała opłata za pobieranie nauki). Należy się zatem uznanie opiekunce Banacha za to, że zdecydowała się go kształcić pomimo skromnych zarobków.

8-letnie IV Gimnazjum, do którego zaczął uczęszczać Stefan, była to filia zespołu Gimnazjów im. Bartłomieja Nowodworskiego pod wezwaniem św. Anny, odznaczających się wysokim poziomem nauczania. IV Gimnazjum kierował w owym czasie Antoni Pazdrowski, powszechnie przez uczniów zwany „Parasolem". Gimnazjum było typu klasycznego i mieściło się przy ul. Podwale, w kamienicy browarnika Goetza-Okocims-

Kamienica przy ul. Podwale w Krakowie, gdzie w latach 1901—1911 mieściło się IV Gimnazjum im. B. Nowodworskiego. Zdjęcie z 1991 r. (fot. W. Nikonowicz)



kiego. Wśród uczniów kursowało nawet powiedzenie, że uczą się „u Goetza". Gmach szkolny był ciasny, bez podwórza, o wąskich korytarzach i właściwie nie nadawał się na szkołę.

Marian Albiński, który uczęszczał razem z Banachem do tej samej klasy w latach 1902—1906, tj. od klasy I do IV, wspomina: *„O rodzinie Banacha mówiło się niewiele; koledzy wiedzieli, że właściwie rodziny nie miał i wychowywał go ktoś z krewnych (...) Stefan był chłopcem spokojnym, nie pozbawionym łagodnego humoru, dobrym kolegą. Miał naturę trochę skrytą. Był zawsze w czystym, porządnym mundurku (...) nie znać było na jego twarzy zmizerowania czy wygłodzenia (...) Zmuszony skromnymi warunkami* – relacjonuje dalej M. Albiński — *dawał* (Stefan) *płatne korepetycje młodszym kolegom, a także tzw. korepetycje „na mieście"; natomiast współkolegom z klasy pomagał bezinteresownie".*

Szczególną przyjaźnią darzył Banach i to już od I klasy, swego kolegę Witolda Wilkosza (późniejszego znanego matematyka — profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego), uczącego się w tej samej klasie. Łączyło ich niezwykłe rozmiłowanie w matematyce. Podczas przerw międzylekcyjnych — wspomina M. Albiński — można było ich zobaczyć nieraz rozwiązujących wspólnie zadanie matematyczne. Spotykali się też często po lekcjach w domu Wilkoszów, mieszkających przy ul. Zwierzynieckiej, lub w budynku szkolnym oraz na Plantach krakowskich.

Adolf Rożek, uczęszczający do tej samej klasy, co Banach i Wilkosz, wspomina z kolei: *„Banach był szczupły i blady, z niebieskimi oczyma. W stosunku do kolegów miły. Ale poza matematyką nic go nie interesowało. O ile mówił, to mówił ogromnie prędko, tak jak ogromnie prędko myślał matematycznie. Miał niebywałą zdolność tak szybkiego myślenia i liczenia, że na słuchających robił wrażenie jasnowidza. Podobnym fenomenem był Wilkosz. Dla obydwu* *nie było zadania matematycznego, którego by nie rozwiązali błyskawicznie. Banach był szybszy w zadaniach z matematyki. Wilkosz z równą fenomenalną szybkością rozwiązywał zadania z fizyki, którą Banach się nie interesował".*

Postępy Stefana w nauce były celujące w zakresie matematyki i nauk przyrodniczych. Z innych przedmiotów miał oceny bardzo dobre i dobre. Cytowany już kilka razy M. Albiński nie przypomina sobie, żeby Banach otrzymał kiedyś w klasach od I do IV ocenę dostateczną z jakiegoś przedmiotu. W zachowanym drukowanym sprawozdaniu IV Gimnazjum za rok szkolny 1905/1906 wśród 42 klasyfikowanych uczniów stopień pierwszy z odznaczeniem (celujący) otrzymało 3 uczniów, z których jednym był Wilkosz, zaś wśród 25 uczniów, którzy otrzymali stopień pierwszy (bardzo dobry) figurują nazwiska Banacha i autora wspomnień — Albińskiego. Banach siedział zawsze w pierwszej ławce wraz z Wilkoszem. Kiedy przyszedł fotograf robić zdjęcie — relacjonuje Albiński — Stefan, korzystając z powstałego zamieszania, przesiadł się do trzeciej ławki. To zachowanie wskazywałoby na nieśmiałość Banacha w okresie jego młodszych lat szkolnych.

Matematyką wyższą zaczął się interesować bardzo wcześnie. Będąc jeszcze uczniem gimnazjum studiował samodzielnie teorię funkcji rzeczywistych i to z francuskiego podręcznika Tannery'ego. Język francuski znał od dzieciństwa — uczył go krakowski fotograf Louis Mien, przyjaciel rodziny Płowych. W doskonaleniu zaś tego języka pomógł mu z pewnością Wilkosz, który miał nadzwyczajne zdolności do języków — oprócz obowiązkowych w gimnazjum klasycznym łaciny i greki znał bardzo dobrze francuski, niemiecki, esperanto, a ponadto uczył się sanskrytu, hebrajskiego i innych języków wschodnich; marzył nawet początkowo o studiach uniwersyteckich w tym kierunku. Wprawdzie Wilkosz po ukończeniu klasy IV przeniósł się do innego gimnazjum, ale przyjaźń ze Stefanem trwała nadal.

S. Banach znał oczywiście również język niemiecki, łacinę i grekę. Miał podobno nawet kiedyś powiedzieć, że to doskonałość i precyzja gramatyki łacińskiej uczyniła zeń matematyka. Ale znajomość języka francuskiego okazała się mu szczególnie przydatna, gdyż w omawianym okresie językiem najbardziej używanym w kontaktach międzynarodowych, w tym naukowych, był francuski. Toteż w tym właśnie języku publikowane były przeważnie najnowsze osiągnięcia w dziedzinie matematyki.

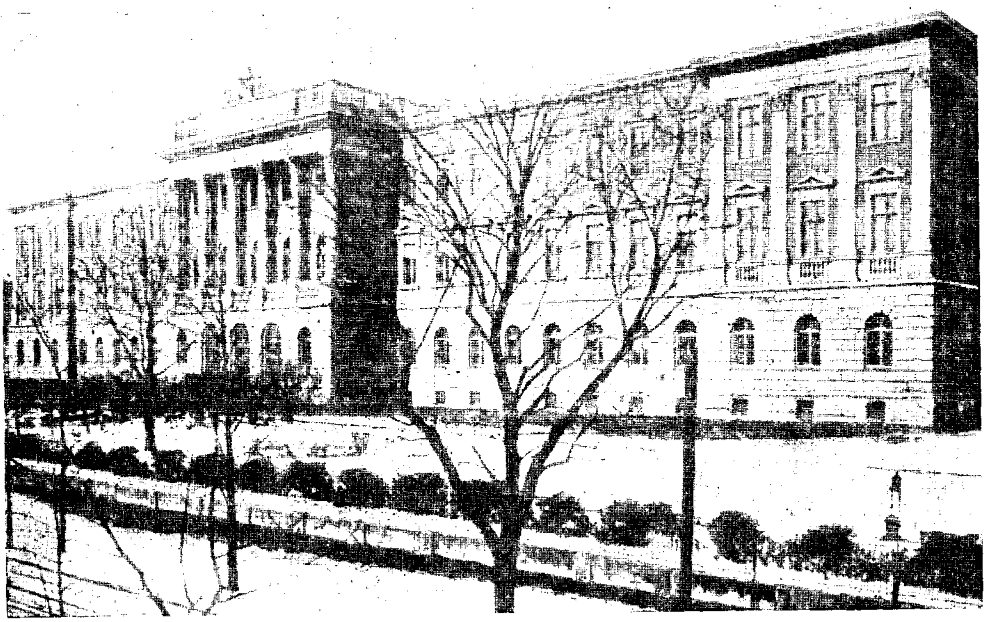
Zaabsorbowany studiowaniem matematyki wyższej, Banach zaniedbał się w nauce w maturalnej klasie i groziło mu kilka ocen niedostatecznych (podobno osiem). Na maturze zdenerwowany nauczyciel matematyki podjął próbę ratowania Banacha, tłumacząc komisji egzaminacyjnej, że mają do czynienia z geniuszem matematycznym, ale niewiele by z pewnością wskórał, gdyby nie przyszedł mu w sukurs ksiądz katecheta, z którego opinią w owych czasach bardzo się liczono. Nie byłoby może w tym nic aż tak szczególnego, gdyby nie fakt, że ów ksiądz postąpił iście po chrześcijańsku, bowiem Banach na lekcjach religii nieraz dokuczał mu stawianiem kłopotliwych pytań w rodzaju: *„Czy Pan Bóg Wszechmogący mógłby stworzyć taki kamień, którego nie mógłby Sam udźwignąć?"*, a poza tym był przewodniczącym szkolnego kółka wolnomyślicieli.

2. Lata studiów.

Po otrzymaniu w 1910 r. matury, Stefan Banach przez krótki czas pracował w księgarni jako sprzedawca. Pogłębiał oczywiście nadal samodzielnie swoją wiedzę matematyczną. Jesienią tegoż roku wyjechał do Lwowa, gdzie rozpoczął studia na Politechnice. Rzecz znamienna — fascynując się matematyką wybrał studia inżynierskie.

Lwów, obok Krakowa, już od drugiej połowy XIX w. był znanym ośrodkiem kultury i nauki polskiej. Zawdzięczał to w dużej mierze Uniwersytetowi oraz Politechnice, na których to uczelniach prowadzono wykłady wyłącznie w języku polskim (na Uniwersytecie od 1871 r., na Politechnice — od 1872 r.), jak również prężnie działającym licznym polskim towarzystwom naukowym. Powstały też tu liczne muzea i biblioteki polskie ze słynnym Zakładem Narodowym im. Ossolińskich („Ossolineum") — wspaniałym ośrodkiem polskiej myśli twórczej, założonym już w 1817 r. Działali tu wybitni artyści, pisarze, uczeni i myśliciele.

Gmach Politechniki mieścił się przy ul. Leona Sapiehy 12. Był budynkiem okazałym i pięknym, wzniesionym w 1877 r. w stylu neorenesansu wg projektu prof. Zacharyewicza. Studia na Politechnice Lwowskiej, zwanej wówczas Lwowską Szkołą Politechniczną,



Politechnika Lwowska (Zdjęcie z 1932 r.)
(Zdjęcie Politechniki z: Politechnika Lwowska, Praca zbiorowa, Lwów 1932).

trwały na Wydziale Inżynierskim 4 1/2 roku. Od 1912 r., na mocy rozporządzenia austriackiego Ministerstwa Oświaty, obowiązywały w toku tzw. egzaminy kursowe, w celu wykazania postępu w poszczególnych przedmiotach, oraz dwa egzaminy państwowe — pierwszy, ogólny, po ukończeniu dwóch pierwszych lat studiów, drugi, zawodowy, po ukończeniu całego studium (ten system obowiązywał jeszcze w początkowych latach odrodzonej Polski).

Stefan Banach zdał egzaminy kursowe, obowiązujące na I i II roku, oraz pierwszy egzamin państwowy, co świadczy o zaliczeniu przez niego połowy studiów inżynierskich. Dalszą jego naukę przerwała wojna światowa. Zaraz po jej wybuchu Stefan powrócił do Krakowa. Już bowiem w kilka dni po rozpoczęciu działań wojennych, w sierpniu 1914 r., gmach główny Politechniki został zajęty na szpital wojenny przez wojska austriackie, a po cofnięciu się armii austriackiej na zachód w pierwszych dniach września 1914 r. — przez wojsko rosyjskie. W roku 1914/1915 wykładów na Politechnice Lwowskiej nie było zupełnie. Po ponownym zajęciu Lwowa przez wojska austriackie w czerwcu 1915 r.

wykłady wznowiono. Tok studiów nie był jednak normalny aż do roku 1920, najpierw z powodu toczącej się wojny, później walk z Ukraińcami we wrześniu 1918 r., a następnie wojny z bolszewikami w roku 1920. Cały czas w gmachu głównym mieścił się szpital wojskowy. Dopiero 10 grudnia 1920 r. odbyła się pierwsza uroczysta inauguracja roku akademickiego.

Stefan Banach nie powrócił jednak do Lwowa, by dokończyć studia na Politechnice, aczkolwiek możliwość taka istniała. Nigdy już zresztą żadnej wyższej uczelni nie ukończył. Indagowany później przez syna, dlaczego nie studiował na Uniwersytecie Jagiellońskim, Banach odpowiedział: *„Nie interesował mnie kurs uniwersytecki; miałem go w małym palcu; byłem już zupełnie daleko"*. Będąc zaś profesorem Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie, zwierzył się pewnego razu Stanisławowi Ulamowi, że jako młody człowiek znał trzy tomy *„Geometrii różniczkowej"*, napisanej przez wybitnego matematyka francuskiego Darboux.

Można zatem zaryzykować twierdzenie, że główną przyczyną niechęci Banacha do studiów wyższych w ogóle było zainteresowanie się, i to w bardzo młodym wieku, powstającymi dopiero działami matematyki, inicjowanymi przez Volterrę, Hadamarda, Lebesgue'a, Riesza, Fredholma i Frécheta, oraz rodzenie się pod ich wpływem w jego umyśle nowych idei, które zaowocowały później rewelacyjnymi pracami.

3. „Największe matematyczne odkrycie" H. Steinhausa.

Po powrocie do Krakowa Banach zamieszkał ponownie u swojej opiekunki przy ul. Grodzkiej 71. Utrzymywał się z korepetycji, przygotowując młodzież wyłącznie z matematyki do egzaminu dojrzałości. Pogłębiał nadal samodzielnie swoją wiedzę matematyczną, sięgając do różnych dzieł i najnowszych publikacji. Często też prowadził dyskusje na tematy matematyczne ze swymi kolegami, Ottonem Nikodymem (późniejszym znanym profesorem Uniwersytetu Jagiellońskiego) oraz Witoldem Wilkoszem.

W Krakowie całkiem przypadkowo zwrócił uwagę na Banacha Hugo Steinhaus, który był już po doktoracie, obronionym w Getyndze w 1911 r., miał opublikowanych wiele prac z zakresu matematyki wyższej, a pracował w sekcji technicznej Centrali Odbudowy Kraju (Oddział c.k. Namiestnictwa). Pomimo toczącej się wojny życie w mieście płynęło w miarę normalnie i można było wieczorem spacerować po krakowskich Plantach. Właśnie podczas takiego spaceru latem 1916 roku H. Steinhaus usłyszał rozmowę dwóch młodych ludzi, w której padły słowa *„całka Lebesgue'a*[1]). Były to słowa w tym czasie

---

[1]) *Całka Lebesgue'a* była świeżym wtedy, a niezwykle doniosłym odkryciem, które przy ówczesnym stanie wiedzy niełatwo było pojąć. Stało się ono źródłem bardzo wielu nowych twierdzeń, pojęć i problemów. Niektóre z nich dotyczyły zbieżności ciągów i szeregów, których wyrazami są funkcje. Zbieżność takiego ciągu lub szeregu do jakiejś funkcji f można rozmaicie rozumieć, na przykład tak, że w ustalonym przedziale $[a, b]$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0,$$

gdzie f_n oznacza n-ty wyraz ciągu, bądź też n-tą sumę szeregu.

Dopiero jednak pojęcie całki wprowadzone przez Lebesgue'a ukazało wagę i przydatność tego pojęcia zbieżności (*„według całki"*). W szczególności stosuje się ono do szeregów trygonometrycznych, to jest szeregów postaci $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Każdej funkcji f okresowej z okresem 2π

i miejscu tak nieoczekiwane, że Steinhaus podszedł do rozmawiających i zapoznał się z nimi. Byli to Stefan Banach i Otto Nikodym. To właśnie przypadkowe spotkanie Banacha miał nieco później Steinhaus nazwać swoim *„największym odkryciem matematycznym"*. Zaowocowało ono wieloletnią przyjaźnią i współpracą.

Hugo Steinhaus mieszkał w 1916 r. w Krakowie w pensjonacie przy ul. Karmelickiej 9. Po znamiennym spotkaniu z Banachem i Nikodymem zaproponował im częstsze widywanie się u niego w mieszkaniu, a że w owym czasie przebywali w Krakowie Władysław Ślebodziński, Leon Chwistek i Włodzimierz Stożek, którzy również odwiedzali Steinhausa, spotkania te przekształciły się w regularne posiedzenia naukowe. W toku dyskusji zapisy czyniono na ceratowej tablicy, którą Steinhaus przybił gwoździami do ściany ku zgrozie Francuzki — właścicielki pensjonatu, lamentującej, że właściciel kamienicy będzie miał pretensje za niszczenie ściany, co istotnie później nastąpiło. W trakcie tych posiedzeń powstał pomysł powołania do życia Towarzystwa Matematycznego, który został zrealizowany dopiero po upływie trzech lat. Drugiego kwietnia 1919 r. w lokalu Seminarium Filozoficznego przy ul. św. Anny 12 odbyło się zebranie założycielskie Towarzystwa Matematycznego w Krakowie. W zebraniu uczestniczyło 16 osób, nauczycieli szkół średnich i pracowników naukowych Uniwersytetu Jagiellońskiego. Jednym z nich był Stefan Banach. Wygłosił on na zebraniach Towarzystwa dwa odczyty: *„Z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej"* (7.05.1919 r.) oraz *„Z teorii funkcji linii"* (17.12.1919 r.). Towarzystwo Matematyczne w roku następnym przekształciło się w Polskie Towarzystwo Matematyczne.

4. Niezwykła kariera naukowa Stefana Banacha.

W roku 1919 katedrę matematyki na Wydziale Mechanicznym Politechniki Lwowskiej objął prof. Antoni Łomnicki. W roku 1920 katedrę matematyki na Uniwersytecie im. Jana Kazimierza we Lwowie objął prof. Hugo Steinhaus, który w 1917 r. habilitował się na tym Uniwersytecie. Obaj znali się bardzo dobrze, jeszcze z czasów studenckich we Lwowie, gdzie Steinhaus rozpoczynał studia, a potem z Getyngi. Na Politechnice brakowało młodszych kadr naukowych. Steinhaus zaproponował Łomnickiemu, aby zatrudnił Stefana Banacha w charakterze asystenta. Łomnicki przystał na tę propozycję i Banach w 1920 r. przybył do Lwowa. Od tego momentu rozpoczyna się jego błyskotliwa kariera

---

całkowalnej w sensie Lebesgue'a można przyporządkować szereg tego kształtu, tzw. *szereg Fouriera,* odpowiednio wyznaczając współczynniki Fouriera a_n i b_n, mianowicie

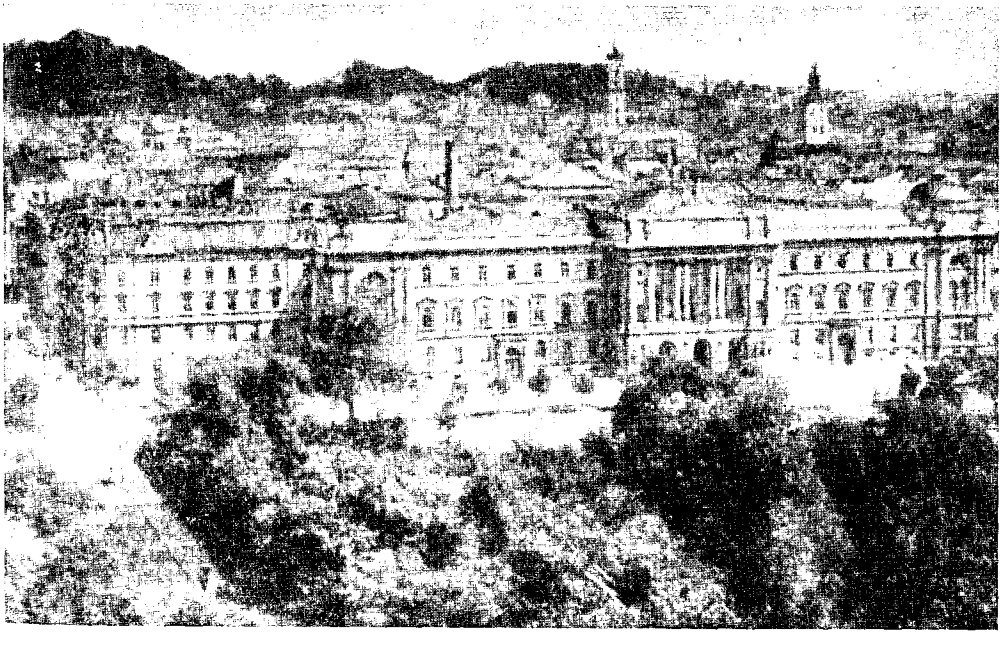
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ntdt\,(n > 0).$$

(wartość b_0 jest obojętna)

Jeśli funkcja f ma „dobre własności", np. jeżeli jest ograniczona, to jej szereg Fouriera jest do niej zbieżny według całki. A jeśli tylko tyle o niej wiadomo, że jest całkowalna w sensie Lebesgue'a? Czy wtedy też zachodzi taka zbieżność? To zagadnienie zakomunikował Steinhaus Banachowi. Sam przedtem próbował je rozwiązać, ale bez skutku. Zdumienie go ogarnęło, gdy po kilku dniach Banach przyniósł mu rozwiązanie — negatywne: istnieje funkcja całkowalna (nawet w węższym, tradycyjnym sensie, tj. według Riemanna), której szereg Fouriera nie jest zbieżny według całki. Było tam jeszcze coś do poprawienia. Rezultat opublikowali obaj w Biuletynie Akademii Krakowskiej. Od tego momentu datuje się ich bliższa znajomość, która wkrótce przekształciła się w serdeczną i trwałą przyjaźń. Hugo Steinhaus, będąc już profesorem, lubił często powtarzać, że Stefan Banach jest jego największym matematycznym odkryciem.

(przypis *Stanisława Hartmana*)

naukowa. W tym samym roku przedstawił na Uniwersytecie Lwowskim pracę pt. *„O operacjach na zbiorach abstrakcyjnych i ich zastosowaniach do równań całkowych"*. Mimo braku ukończonych studiów nadano mu za tę pracę, z pominięciem regulaminowych przepisów, tytuł doktora, co było niemałą rewelacją. Co więcej, opublikowana w dwa lata później, praca ta stała się fundamentem nowej dyscypliny matematycznej — analizy funkcjonalnej. Nadmienić należy, że była to już siódma jego publikacja naukowa. W roku 1922 S. Banach habilitował się i wkrótce został mianowany profesorem nadzwyczajnym Uniwersytetu Lwowskiego. W 1924 r. powołany został na członka--korespondenta Polskiej Akademii Umiejętności. Po upływie dalszych trzech lat, w 1927 r., otrzymał nominację na profesora zwyczajnego. Od momentu uzyskania habilitacji do wybuchu II wojny światowej prowadził wykłady na Uniwersytecie Lwowskim. Był kierownikiem Katedry Matematyki „C". Jego gabinet mieścił się na pierwszym piętrze w starym gmachu Uniwersytetu przy ul. św. Mikołaja 4, nazywanym przez studentów „Starym Uniwerkiem", obok gabinetu prof. H. Steinhausa, który kierował Katedrą Matematyki „B". Do ich gabinetów wchodziło się przez wspólny mały przedpokój. Wykłady matematyki odbywały się też w „Starym Uniwerku". Sale wykładowe, jak wspomina Wiktor Frantz, były numerowane rzymskimi cyframi i przypominały klasy szkolne: ławki z otworami na kałamarze, pocięte scyzorykami, katedra profesorska na drewnianym podium i czarna tablica; pod nią gąbka i kreda, pod ścianą wieszadło. Największą z sal była sala nr XIV. Ze starym gmachem sąsiadowała Biblioteka Uniwersytecka. Z czasem połączono nawet obydwa budynki krytą galeryjką na wysokości pierwszego piętra i w czasie godzinnej lub kilkugodzinnej przerwy między wykładami można było w czytelni Biblioteki zająć się lekturą naukową, w którą była dobrze wyposażona.



Uniwersytet im. Jana Kazimierza we Lwowie (Zdjęcie z lat 1928—1930)
(Zdjęcie Uniwersytetu z: J. Stecielowa, Ilustrowany przewodnik po Lwowie, Lwów 1938).

Stefan Banach nie zerwał z Politechniką i prowadził tam wykłady zlecone z matematyki i mechaniki. Owocem tych ostatnich był wydany w 1938 r. podręcznik w dwóch tomach

„Mechanika w zakresie szkół akademickich". Nawiasem mówiąc, program matematyki na Wydziale Ogólnym Politechniki prawie nie różnił się w owym czasie od uniwersyteckiego, zaś różnorodnością wykładanych tam przedmiotów matematycznych wykraczał poza ramy zwykłych studiów uniwersyteckich. S. Banach napisał też słynne dzieło *„O operacjach liniowych"*, o którym szerzej będzie mowa w następnym rozdziale, jak również kilka podręczników dla szkół powszechnych, średnich i wyższych. Toteż był kilkakrotnie nagradzany, m. in. w 1930 r. został laureatem Nagrody Naukowej miasta Lwowa, a w 1939 r. otrzymał Wielką Nagrodę Polskiej Akademii Umiejętności. Nie został jednak członkiem rzeczywistym Akademii. *„Trudno dziś zrozumieć* — powiedział H. Steinhaus na uroczystym posiedzeniu w 15-tą rocznicę zgonu Stefana Banacha — *że w tejże Akademii nie znalazł się fotel dla dziecka ulicy krakowskiej"*.

W 1931 r. przyjęto go w poczet członków Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. W okresie lat 1932—1936 pełnił funkcję wiceprezesa Polskiego Towarzystwa Matematycznego, a w 1939 r. wybrano go prezesem tegoż Towarzystwa.

Godzi się jeszcze nadmienić, że w 1936 r. została powołana do życia Rada Nauk Ścisłych i Stosowanych, przy której 29 listopada tegoż roku utworzono Komitet Matematyczny. Na wiceprezesa Komitetu powołano Banacha (prezesem został Wacław Sierpiński). Komitet wspólnie z PTM opracował memoriał *„O stanie i potrzebach matematyki w Polsce"* w trosce o jej dalszy rozwój. (Postulaty zawarte w tym „Memoriale" nie zostały niestety zrealizowane).

Powierzanie S. Banachowi tych funkcji świadczy o autorytecie, jaki zyskał wśród matematyków polskich.

5. Doniosłość prac naukowych Stefana Banacha.

Stefana Banacha interesowała przede wszystkim nowa, dopiero wówczas powstająca dyscyplina matematyczna — *analiza funkcjonalna*, zajmująca się badaniem przestrzeni funkcji metodami analizy matematycznej, algebry i topologii. Banach był jednym z twórców analizy funkcjonalnej. Od niego pochodzi podstawowe dla tego działu pojęcie *przestrzeń Banacha*, nazwane tak na jego cześć przez wybitnego matematyka francuskiego R. M. Frécheta i przyjęte w międzynarodowej terminologii matematycznej. *Przestrzeń Banacha* jest to przestrzeń liniowa, unormowana i zupełna, w której określona jest odległość dowolnych jej dwóch elementów, zwana metryką przestrzeni. Trzy najważniejsze twierdzenia analizy funkcjonalnej związane są z nazwiskiem Banacha. Są to: *twierdzenie Hahna-Banacha o przedłużaniu funkcjonałów liniowych, twierdzenie Banacha-Steinhausa o jednostajnej ograniczoności ciągów operatorów liniowych* i *twierdzenie Banacha o ciągłości operatora odwrotnego*. Udowodnił on też wiele innych twierdzeń. Prof. Stanisław Mazur — uczeń Banacha — mówiąc o doniosłości jego dokonań stwierdził m. in.: *„Rok 1922, w którym Stefan Banach w polskim czasopiśmie „Fundamenta Mathematicae" ogłosił swą rozprawę doktorską pt. „Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations integrales" (O operacjach na zbiorach abstrakcyjnych i ich zastosowaniach do równań całkowych) jest datą przełomową w historii matematyki XX wieku. Ta kilkudziesięciostronicowa rozprawa ugruntowała bowiem ostatecznie podstawy analizy funkcjonalnej, nowej dyscypliny matematycznej, która — jak wykazały rezultaty badań Stefana Banacha i innych — posiada kapitalne znaczenie dla dalszego rozwoju nie tylko samej matematyki, ale również nauk przyrodniczych a w szczególności fizyki"*. Jest ewenementem na skalę światową w historii matematyki XX wieku fakt, że praca o tak fundamentalnym charakterze jest dziełem samouka.

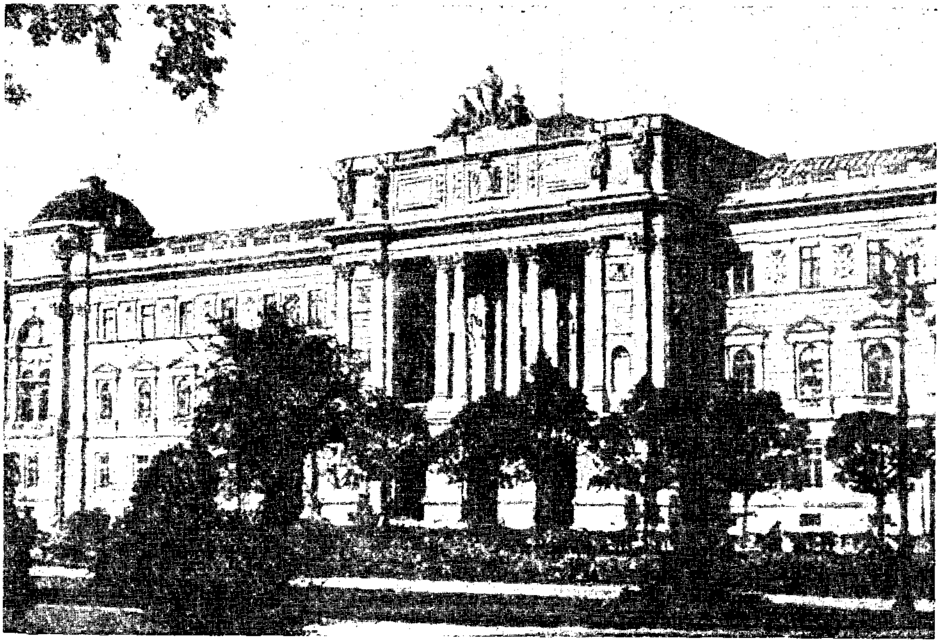
Warto dodać, że Banach opublikował swoją pracę kilka miesięcy wcześniej niż znakomity amerykański matematyk Norbert Wiener, zwany *„ojcem cybernetyki"*, który zajmował się również tymi zagadnieniami i doszedł do tego samego układu aksjomatów. Wiener napisał nawet kilka prac z tej dziedziny, ale zaniedbał dalszych badań, ponieważ wydawało mu się wówczas, że owa teoria jest czczym formalizmem. Później, po 34 latach od momentu ukazania się publikacji Banacha, przyznał w swoich wspomnieniach, że się omylił, że teoria Banacha jest bardzo ważnym narzędziem analizy i *„dopiero teraz zaczyna rozwijać swoją pełną skuteczność jako metoda naukowa"*. Przyznał również, że przestrzeń funkcyjną słusznie nazwano imieniem samego tylko Banacha (początkowo teoria nosiła przez pewien czas miano *teorii przestrzeni Banacha-Wienera*). Tak więc intuicja Banacha okazała się lepsza od przewidywań Wienera.

W 1929 r. Banach napisał słynną monografię *„Teoria operacji liniowych"*, która opublikowana w 1931 r. w języku polskim i przetłumaczona na język francuski w następnym roku była pierwszą na świecie książką traktującą ogólnie o przestrzeniach liniowo-metrycznych. Stała się ona klasycznym, podstawowym dziełem w zakresie analizy funkcjonalnej. Jego doniosłość polega na tym, że dzięki przestrzeniom Banacha można rozwiązywać w sposób ogólny wiele zagadnień, które przedtem wymagały indywidualnego traktowania i niemałej pomysłowości; pozwoliło to na unifikację różnych działów analizy, teorii równań, rachunku wariacyjnego, teorii aproksymacji, metod numerycznych itp. Np. opracowane przez analizę funkcjonalną metody rozwiązywania równań odnoszą się do równań algebraicznych, całkowych, różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych a także do pewnych równań funkcyjnych z jedną lub wieloma niewiadomymi. Stefan Banach w przedmowie do swego dzieła napisał m. in.: *„Piękno teorii operacji leży głównie w tym, że w niej łączą się w harmonijną całość metody matematyki klasycznej z metodami nauki nowożytnej (...) Są działy matematyki, których głębsze zrozumienie możliwe jest tylko przy pmocy znajomości teorii operacji. Takimi działami są: teoria funkcji zmiennej rzeczywistej, równania całkowe, rachunek wariacyjny itp."*

Jak duże zainteresowanie w kręgach naukowych za granicą wzbudziła *„Teoria operacji liniowych"* może świadczyć wypowiedź wybitnego matematyka radzieckiego S. Ł. Sobolewa: *„Pamiętam, jak w chwili pojawienia się „Teorii operacji liniowych" na początku lat trzydziestych wytworzyła się długa kolejka czekających na pierwsze, rzadkie egzemplarze tej książki, jakie znalazły się w Moskwie i Leningradzie. Były czytane z zachwytem i entuzjazmem..."*. Zawarte w tej monografii rezultaty, osiągnięte głównie przez Banacha i częściowo przez jego uczniów, postawiły go w rzędzie największych matematyków świata.

Nic zatem dziwnego, że świat naukowy zwrócił na niego uwagę. Świadczy o tym m. in. fakt zaproszenia Banacha do wygłoszenia plenarnego odczytu na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Oslo w 1936 r. Był również kilkakrotnie namawiany przez działającego w USA wybitnego węgierskiego matematyka Johna von Neumanna, z inspiracji Norberta Wienera, do wyemigrowania do Stanów Zjednoczonych. Proponowano mu luksusowe warunki. Banach nie dał się jednak skusić nęcącą perspektywą.

Jako profesor Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie Banach rozwinął dużą aktywność dydaktyczną i naukowo-badawczą. Posiadał wyjątkowy dar skupiania wokół siebie młodych ludzi, wybitnie uzdolnionych matematycznie. Toteż dokoła niego skoncentrowała się plejada młodych talentów. Wraz z prof. H. Steinhausem oraz swymi uczniami — Stanisławem Mazurem, Władysławem Orliczem, Stanisławem Ulamem i Juliuszem Pawłem Schauderem — stworzył słynną na całym świecie Lwowską Szkołę Matematyczną, przyczyniając się w olbrzymim stopniu do wydźwignięcia matematyki polskiej na czołowe miejsce w skali światowej. Działalność tej Szkoły bardzo obrazowo scharakteryzował w swych wspomnieniach prof. Stanisław Ulam: *„Jeśliby rozważać matematykę jako drzewo, to grupa lwowska oddawała się studiowaniu korzeni i pni, być może nawet głównych konarów, mniej interesując się bocznymi pędami, liśćmi i kwiatami"*. Toteż w owym czasie najważniejszy ośrodek analizy funkcjonalnej na świecie znajdował się w Polsce.



Fragment Uniwersytetu im. Jana Kazimierza we Lwowie. (Reprodukcja z: S. Wasylewski, Lwów, Poznań 1932).

W 1929 r. Banach wspólnie ze Steinhausem założył i redagował czasopismo *„Studia Mathematica"*, był też jednym z inicjatorów powstania *„Monografii Matematycznych"*. Dzięki publikacjom prac Banacha i jego uczniów *„Studia Mathematica"* stały się wkrótce jednym z najpoważniejszych w świecie czasopism w dziedzinie analizy funkcjonalnej.

Stefan Banach położył również duże zasługi w wielu innych działach matematyki, m. in. w teorii funkcji rzeczywistych, teorii szeregów ortogonalnych, opisowej teorii mnogości. Dorobek naukowy S. Banacha obejmuje 58 prac, z których 6 zostało opublikowanych pośmiertnie.

Wielką sensację wywołała jego praca, napisana wspólnie z Alfredem Tarskim (w latach 1925—1939 profesorem Uniwersytetu Warszawskiego, później w USA), o rozkładzie zbiorów na części przystające. Twierdzenie tam udowodnione brzmi wręcz szokująco: powierzchnię kuli można przedstawić jako sumę 2 zbiorów rozłącznych, z których każdy przystaje przez rozkład do całej tej powierzchni.[2])

---

[2]) Należy tu wyjaśnić, co się przez takie przystawanie rozumie. Otóż jeśli przez *K* oznaczymy powierzchnię kuli, a przez *E* — jedną z tych jej części, to istnieje podział *E* i *K* na taką samą (skończoną) liczbę części, które parami do siebie przystają, tzn. można jedną przeprowadzić na drugą przez obrót dookoła środka kuli. W ten sposób z jednej sfery powstają dwie takie same sfery.

Jest to wniosek paradoksalny, przeczący na pozór naszym wyobrażeniom o pojęciu pola

Stefan Banach (Zdjęcie z lat 1920—1922) (Fotokopia z: „Wiadomości Matematycznych", XII, 1969)

6. Osobowość Banacha.

Prof. Stefan Banach był blondynem o niebieskich oczach, wysokiego wzrostu i budowy nieco ciężkiej. Posiadał niezwykle interesującą i wręcz niespotykaną osobowość. Będąc do głębi realistą nigdy nie liczył na szczęśliwy traf. Często mawiał, że „Nadzieja to matka głupców". Znał swoją wartość i nie miał żadnych kompleksów. Do zaszczytów nie przywiązywał żadnej wagi. Polityką się nie interesował, ale przywiązany był do kraju, czego najlepszym dowodem jest odmowa wyemigrowania z Polski. Podczas ostatniego spotkania z von Neumannem we Lwowie w 1937 r. na kolejną propozycję wyjazdu z Polski, zniecierpliwiony Banach spytał: „Ile daje profesor Wiener?". John von Neumann wyjął czek, na którym wypisana była jedynka oraz widniał podpis prof. Wienera, i powiedział: „Proszę dopisać taką ilość zer, jaką pan uzna za stosowne". Banach chwilę się zastanowił i odparł: „To za mała suma, jak za opuszczenie Polski". Przed samym wybuchem II wojny światowej prof. Stanisław Ulam proponował Banachowi ucieczkę do Stanów Zjednoczonych; jemu też Banach kategorycznie odmówił i pozostał w kraju.

Autora *„Operacji liniowych"* cechowała prostota w obejściu — nie miał nic w sobie z tzw. profesorskiego splendoru i zachował do końca życia, jak wspomina prof. H. Steinhaus, pewne cechy krakowskiego andrusa w sposobie bycia i w mowie. Wesołego usposobienia, niezwykle życzliwy i koleżeński, cenił sobie bardzo dobrane towarzystwo przy kieliszku koniaku czy filiżance czarnej kawy. Jego humor zawierał często pewną dozę ironii i nieraz tchnął pesymizmem. Lubił oryginalne i dowcipne powiedzonka. S. Ulam powiedział mu kiedyś, że von Neumann, będąc w Princeton (USA), zanim przedstawił kilka matematycznych rezultatów, użył następującego zdania: *„Die Goim haben den folgenden Satz bewiesen"* (goje udowodnili następujące twierdzenia). *„Banach, który był prawdziwym gojem* — relacjonuje Ulam — *uważał to zdanie za jedno z najbardziej dowcipnych powiedzeń, jakie kiedykolwiek słyszał; (...)"*

Uroczyste zebrania męczyły Banacha i chronicznie ich nie znosił. Gdy otrzymywał zaproszenie na jakieś oficjalne posiedzenie, to zwykle mawiał: „Wiem, gdzie nie będę".

---

powierzchni. Należy jednak pamiętać, że pole potrafimy obliczać dla figur w pewnym sensie regularnych. Twierdzenie to pokazuje, że pojęcie to nie jest określone dla wszystkich zbiorów punktów położonych na powierzchni kuli. Gdyby tak bowiem było, trzeba by uznać, że $2 = 1$.

Na płaszczyźnie też istnicją zbiory, którym nie można przypisać pola powierzchni, jednak taki, jak opisany wyżej, paradoksalny rozkład, nie jest możliwy dla żadnej figury płaskiej. Udowodnił to Banach w 1923 roku.

(przypis *Stanisława Hartmana*)

O problemach matematycznych mógł dyskutować całymi godzinami. Ulubionym miejscem takich dyskusji były kawiarnie, o czym będzie jeszcze mowa w następnym rozdziale. Podczas dysput lubił popijać czarną kawę i prawie bez przerwy palił papierosy. Polemizując, unikał przeważnie wyrażania wprost swego sprzeciwu. Jeśli jednak nie zgadzał się z wywodami dyskutanta, to dawał temu wyraz za pomocą stawianych przez siebie pytań. Posiadał jasność myślenia, którą znany profesor matematyki i trzykrotny późniejszy premier Kazimierz Bartel nazywał „aż nieprzyjemną". Chętnie uczestniczył, jak wspomina Kazimierz Szałajko — ówczesny asystent Banacha — w imprezach organizowanych przez Studenckie Koło Matematyczno-Fizyczne, działające przy Uniwersytecie we Lwowie w latach 1922–1939. Opiekuna koła, tzw. kuratora, powoływał Senat Akademicki. S. Banach pełnił tę funkcję w latach 1931—1933. Koło organizowało tradycyjne herbatki w Czytelni Akademickiej przy ul. Łozińskiego oraz wycieczki po okolicach Lwowa. Częstym uczestnikiem wycieczek był też prof. H. Steinhaus. Warto dodać, że podczas „herbatek" prowadzono ożywioną dyskusję na tematy naukowe i wygłaszano referaty, zaś stroną kulinarną zajmowały się obok studentek również panie profesorowe.

Według opinii wyrażonej przez H. Steinhausa, S. Banach był świetnym dydaktykiem — wykładał przejrzyście i nigdy nie gubił się w szczegółach. Nie lubił zapisywać tablicy skomplikowanymi i mnogimi wzorami, dbając o to, aby forma nie przeważała nad treścią. Natomiast S. Ulam, który słuchał wykładów Banacha z kilku przedmiotów podczas swoich studiów na Wydziale Ogólnym Politechniki Lwowskiej w latach 1927—1932, twierdzi w swoich wspomnieniach, że wykłady te nie były zbyt dobrze przygotowane. Pisze: *„Zdarzało się, że on* (Banach) *przypadkowo robił błędy lub coś przeoczył. Było coś podniecającego, gdy się patrzyło, jak pracował przy tablicy i zmagał się z problemem i jak niezmiennie dawał sobie radę".* Ulam pisze dalej, że ze wszystkich wykładów, których słuchał na Politechnice, wykłady Banacha najbardziej go fascynowały, pobudzając do myślenia, i im w dużej mierze zawdzięcza, że zainteresował się matematyką. *„Wraz z rozpoczęciem trzeciego roku studiów* — relacjonuje dalej Ulam — *większość mojej matematycznej pracy tak naprawdę rozpoczynała się od rozmów z Banachem i Mazurem".*

H. Steinhaus wspomina z kolei: *„Sformułowanie myśli na piśmie sprawiało mu* (Banachowi) *duże trudności. Pisał swoje manuskrypty na luźnych kartkach wyrwanych z zeszytu; gdy trzeba było zmienić część tekstu, wycinał zbędne miejsca i podklejał resztę czystą kartką, na której pisał nową wersję".* Ten charakterystyczny sposób opracowywania przez niego rękopisów był prawdopodobnie wynikiem chęci zaoszczędzania czasu, który wolał poświęcić na tworzenie nowych koncepcji, jak i niechęci do pisania w ogóle, o czym świadczy m. in. fakt, na że otrzymywane listy przeważnie nie odpowiadał. Gdyby nie pomoc jego przyjaciół i asystentów, a w szczególności Stanisława Mazura, który często dopracowywał szczegóły rozwiązanego problemu, to niektóre prace Banacha nie ukazałyby się w druku. *„Nie pociągały go także* — twierdzi Steinhaus — *praktyczne zastosowania matematyki, choć z pewnością mógłby się nimi zająć, gdyby chciał – przecież już w rok po doktoracie wykładał mechanikę na Politechnice (...)"* Nie przyzwyczajony do wygód, potrafił pracować wszędzie i we wszelkich warunkach — nawet w więzieniu, po aresztowaniu go przez Niemców w czasie okupacji, udowodnił pewne twierdzenie.

St. Banach był zupełnie pozbawiony zmysłu oszczędzania, co przy jednoczesnym jego trybie życia — zamiłowaniu do posiedzeń kawiarnianych — było powodem częstego popadania w długi. Aby z nich wybrnąć, zaczął pisać podręczniki arytmetyki i algebry dla szkół podstawowych i średnich. Niektóre z nich napisane są wspólnie z profesorami Wacławem Sierpińskim i Włodzimierzem Stożkiem. Wydał też podręcznik dla szkół wyższych *"Rachunek różniczkowy i całkowy"* w dwóch tomach oraz wspomnianą już *„Mechanikę w zakresie szkół akademickich"*. Napisane przez niego podręczniki nie były nigdy kopiowaniem cudzych książek, odznaczają się jasnością i przejrzystością wykładu. O dużej i trwałej wartości napisanych przez Banacha podręczników świadczy fakt kilkakrotnego ich wznawiania po wojnie. Tak więc ujemna cecha jego charakteru — brak umiejętności racjonalnego gospodarowania pieniędzmi — dała pozytywne rezultaty społeczne.

Dzięki swoim doświadczeniom korepetytora rozumiał doskonale trudności, na jakie napotyka młody człowiek studiujący matematykę. Pewnego razu oświadczył Steinhausowi: „Wiesz bracie, co ci powiem? Humanistyka jest w szkole średniej ważniejsza od matematyki — matematyka to za ostry instrument, to nie dla dzieci...".

Jako matematyka cechowała Stefana Banacha pasja tworzenia, połączona z uwielbieniem dla uprawianej przez niego dyscypliny. Ciągle stawiał sobie nowe problemy, poszukując ich rozwiązań. Pewnego razu powiedział: „Dobrzy matematycy widzą analogie między twierdzeniami, lepsi między teoriami, ale najlepsi widzą analogie między analogiami". Był przekonany jednocześnie, że logiczna analiza problemu musi w końcu doprowadzić do udowodnienia lub obalenia twierdzenia. Toteż problemy matematyczne „atakował" wprost, po wyeliminowaniu poprzez przykłady wszelkich dróg ubocznych. Według słów Stanisława Ulama: *„Geniusz w odnajdywaniu ukrytych i nieoczekiwanych dróg charakteryzował go w sposób unikalny jako przenikliwego i oryginalnego matematyka"*. Oto jeden z przykładów „nieoczekiwanych dróg", przytoczone przez Steinhausa rozumowanie, które mu bardzo zaimponowało. Jest to krótka praca opublikowana w 1923 r. w angielskim czasopiśmie *„Proceedings of the London Mathematical Society"*. Zagadnienie polegało na znalezieniu układu ortogonalnego zupełnego w przestrzeni $\mathbf{L}^2$, ale niezupełnego w przestrzeni $\mathbf{L}^1$.[3])

---

[3]) Przez $\mathbf{L}^1$, a dokładniej $\mathbf{L}^1(a, b)$, gdzie (a, b) jest odcinkiem, oznacza się zbiór wszystkich funkcji całkowalnych w przedziale (a, b), tzn. takich, że $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$. Podobnie $\mathbf{L}^2(a, b)$ jest zbiorem funkcji całkowalnych z kwadratem w (a, b) — czyli takich, dla których $\int_a^b (f(x))^2 dx < \infty$. Oba te zbiory są przestrzeniami liniowymi — są zamknięte względem dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę.

Układ funkcji $\{\gamma_n : n = 0, 1, 2...\}$ w przestrzeni $\mathbf{L}^2(a, b)$ nazywa się *ortogonalny*, jeśli

$$\int_a^b \gamma_n(x)\gamma_m(x)dx = 0 \text{ dla } n \neq m.$$

Układ taki nazywa się *zupełny*, jeśli dla każdej funkcji $\varphi \in \mathbf{L}^2(a, b)$ z równości $\int_a^b \varphi(x)\gamma_n(x)dx = 0$ dla wszystkich $n = 0, 1, 2, ...$ wynika, że $\int_a^b |\varphi(x)|dx = 0$ (czyli $\varphi = 0$ „prawie wszędzie").

Przestrzeń $\mathbf{L}^1(a, b)$ jest większa niż $\mathbf{L}^2(a, b)$ — na przykład funkcja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ należy do $\mathbf{L}^1(0, 1)$, ale nie do $\mathbf{L}^2(0,1)$.

A zatem powstaje pytanie, czy istnieje układ ortogonalny $\{\gamma_n\}$, zupełny w $\mathbf{L}^2(a, b)$ i taka funkcja $f \in \mathbf{L}^1(a, b)$, że

Banach wypowiedział też wielce znaczące zdanie: „Matematyka legitymuje się specyficznym pięknem i nie da się nigdy sprowadzić do sztywnego systemu dedukcyjnego, gdyż prędzej czy później rozsadza każdą ramę formalną i tworzy nowe pryncypia".

7. Słynna „Księga Szkocka"

Lwów okresu międzywojennego wyróżniał się wśród innych miast polskich specyficznym twórczym klimatem. Kwitło tu życie towarzyskie, literackie i naukowe w kawiarniach, gdzie spotykali się systematycznie pisarze, muzycy, pracownicy naukowi wyższych uczelni i inne grupy inteligencji twórczej, by w nieskrępowanej atmosferze przy filiżance czarnej kawy, nieraz „wzmocnionej", podyskutować o nurtujących ich problemach.

W każdy niemal sobotni wieczór na Uniwersytecie Jana Kazimierza odbywały się posiedzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Tak zwana „część oficjalna" trwała na ogół nie dłużej niż godzinę, podczas której podawano zazwyczaj kilka komunikatów, po czym większość uczestników udawała się do pobliskich kawiarni lub cukierni, których we Lwowie było mnóstwo, by pograć w szachy, a przede wszystkim porozmawiać na tematy naukowe, w czym szczególnie wyróżniał się Banach. Upodobał on sobie

---

$$\int_a^b f(x)\gamma_n(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ dla każdego } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\text{ale } \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x > 0.$$

Oczywiście funkcja f nie może wtedy należeć do $\mathrm{L}^2(a, b)$.

Banach odpowiedział na to pytanie twierdząco. Oto szkic jego dowodu.

Ustawmy funkcje $\sin kx$, $\cos kx$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ w jeden ciąg w jakikolwiek sposób i oznaczmy wyrazy tego ciągu przez $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Jest to układ ortogonalny i zupełny w przestrzeni $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$. Niech $f \in \mathrm{L}^1(0, 2\pi)$ i $f \notin \mathrm{L}^2(0, 2\pi)$. Jest wtedy $\int_a^{2\pi} |f(x)|\mathrm{d}x > 0$.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$c_n = \int_a^{2\pi} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \varphi_n(x) = \varphi_n(x) - c_n.$$

Wtedy

$$(*) \qquad \int_a^{2\pi} f(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

chociaż

$$\int_a^{2\pi} |f(x)|\mathrm{d}x > 0$$

Tworząc odpowiednie kombinacje liniowe γ_n funkcji ψ_n można otrzymać ortogonalny układ funkcji w przestrzeni L^2 $(0, 2\pi)$. Łatwo dowieść, że będzie on też zupełny w tej przestrzeni (wynika to z zupełności układu $\{\varphi_n\}$). Wobec (*) będzie tak, że

$$\int_a^{2\pi} f(x)\gamma_n(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ dla każdego } n = 0, 1, 2, \ldots$$

a więc układ $\{\gamma_n\}$ nie jest zupełny w $\mathrm{L}^1(0, 2\pi)$.

Oryginalność tego dowodu — ta „nieoczekiwana droga" — polega na tym, że wprowadzony do konstrukcji układ $\{\varphi_n\}$ sam nie ma tej własności, której żądamy od układu szukanego.

(przypis *Stanisława Hartmana*)

dyskusje kawiarniane do tego stopnia, że przekształcił je w specyficzne sesje naukowe. Jego rozważania dotyczyły, jak to dowcipnie określił von Neumann, „matematyki i reszty wszechświata". Tak więc kawiarnie stały się, obok Uniwersytetu, jednym z głównych miejsc pracy twórczej Banacha. Znaczną część niemal każdego dnia, po wykładach, spędzał w kawiarni wraz ze swymi studentami lub współpracownikami. Rozstrzygano tu ważne problemy matematyczne, głównie z zakresu analizy funkcjonalnej, stawiane najczęściej przez Banacha. Zdarzało się nieraz, że o ile na takiej sesji jakiś problem szczególnie zainteresował Banacha, a nie został rozstrzygnięty, to następnego dnia zjawiał się z naszkicowanym na luźnych kartkach schematem rozwiązania; rzecz znamienna — szczegóły go na ogół nie interesowały i zazwyczaj starannie dopracowywał je Stanisław Mazur.

Godzi się w tym miejscu podkreślić, że ten styl pracy Banacha możliwy był dzięki wyrozumiałości ze strony jego żony, która była kobietą nie tylko pełną wdzięku, ale także inteligentną i wielce tolerancyjną. Pani Łucja Janina z domu Braus pochodziła ze środowiska drobnomieszczańskiego. Trzech jej braci i szwagier byli drukarzami (zecerami). Ukończyła szkołę handlową. Będąc panną pracowała jako sekretarka — stenografowała i pisała na maszynie. Banach pojął ją za żonę w 1920 r., a więc w roku uzyskania doktoratu. Zamieszkali w „Starym Uniwerku". Po zamążpójściu nie pracowała zawodowo. W latach 30-tych zdała maturę w trybie eksternistycznym. Doceniając wyjątkowe zdolności swego męża, starała się mu nie przeszkadzać w oryginalnym trybie jego pracy[4]), biorąc na siebie ciężar obowiązków prowadzenia domu i wychowywania syna, który urodził się 14 października 1922 r. Na cześć ojca otrzymał imię Stefan. (Stefan-jr nie poszedł w ślady ojca — nie został matematykiem, tylko lekarzem).

Początkowo owym osobliwym miejscem sesji naukowych Banacha i jego najbliższych współpracowników była kawiarnia „Roma", położona niedaleko Uniwersytetu przy ul. Akademickiej 25. Po upływie mniej więcej roku Banach zadecydował przenieść swoje sesje do kawiarni „Szkockiej" przy ul. Fredry 9, mieszczącej się niedaleko „Romy". Obydwie kawiarnie zaliczały się do średniej kategorii, ale „Szkocka" była kawiarnią modną. I może dlatego upodobali ją sobie matematycy. Banach zajmował tam stolik, najczęściej ze Stanisławem Mazurem i Stanisławem Ulamem. Gwar kawiarniany zupełnie nie przeszkadzał mu w myśleniu, a co dziwniejsze, lubił wybierać miejsce przy orkiestrze. Jak pisze barwnie w swych „*Wspomnieniach z Kawiarni Szkockiej*" Stanisław Ulam: „(...) *tego typu sesje z Banachem, a częściej z Banachem i Mazurem uczyniły atmosferę lwowską czymś jedynym w swoim rodzaju. Tak intymna współpraca była prawdopodobnie czymś zupełnie nowym w życiu matematycznym*(...) *i w takiej intensywności. W naszych matematycznych rozważaniach częstokroć słowo lub gest bez żadnego dodatkowego wyjaśnienia wystarczały do zrozumienia znaczenia. Czasem cała dyskusja składała się z kilku słów rzuconych w ciągu długich okresów rozmyślania. Widz, siedzący przy innym stoliku, mógł zauważyć nagłe krótkie wybuchy konwersacji, zapisanie kilku wierszy na stole, od czasu do czasu śmiech jednego z siedzących, po czym następowały okresy długiego milczenia, w czasie których*

---

[4]) Żona Stefana Banacha, Łucja, zmarła po wojnie we Wrocławiu. Na jej grobie na cmentarzu przy ul. Bujwida jest niekonwencjonalny, ale najwięcej mówiący napis:

Łucja Banachowa
Żona Matematyka

(przypis *Stanisława Hartmana*)

piliśmy kawę i patrzyliśmy nieprzytomnie na siebie. Tak wytworzony nawyk wytrwałości i koncentracji, trwającej czasami godzinami, stał się dla nas jednym z najistotniejszych elementów prawdziwej pracy matematycznej". Wyniki rozważań zapisywano ołówkiem na marmurowym blacie stolika. Toteż wiele cennych wyników przepadło bezpowrotnie, startych przez sprzątaczkę kawiarni. St. Ulam wspomina też, że taki los spotkał m. in. rozwiązanie jakiegoś trudnego problemu z dziedziny analizy funkcjonalnej, nad którym głowiono się podczas jednej z takich sesji kawiarnianych przez 17 godzin, z przerwami na posiłki. Nikt tego rozwiązania nie zapisał na papierze i nikt nie potrafił go potem odtworzyć. Dlatego niewątpliwie wielką zasługą pani Łucji Banachowej było założenie grubego zeszytu, przechowywanego stale w kawiarni, aby takim sytuacjom zapobiec na przyszłość. Zeszyt ten, który Banach nazwał „*Księgą Szkocką*" (od nazwy kawiarni), był przynoszony przez kelnera na żądanie każdemu, kto chciałby zapisać tam jakiś problem matematyczny do rozwiązania. Treść problemu wpisywano na prawej kartce zeszytu, z podaniem daty i nazwiska autora, pozostawiając lewą kartkę na ewentualne rozwiązanie, za które wyznaczano nieraz nietypowe nagrody: małe piwo, dwa małe piwa, pięć małych piw, butelkę wina, butelkę szampana, flaszkę brandy, obiad u „George'a" (najelegantszy a zarazem najdroższy hotel i restauracja we Lwowie), kilo bekonu, 100 g kawioru, lunch w Cambridge, „fondue" w Genewie, a nawet... żywą gęś. Warto dodać, że tę ostatnią nagrodę wyznaczył Stanisław Mazur za rozwiązanie postawionego przezeń w 1936 r. w „*Księdze Szkockiej*" problemu istnienia bazy w przestrzeniach Banacha. Rozwiązał go dopiero w 1972 r., a więc po upływie 36 lat, 28-letni szwedzki matematyk Per Enflo. Żywą gęś wręczył osobiście zdobywcy nagrody, w tym samym roku, prof. Stanisław Mazur w Międzynarodowym Centrum Matematycznym w Warszawie.

W okresie międzywojennym współpraca między ośrodkami matematycznymi na świecie, a w Polsce szczególnie między lwowskim i warszawskim, była bardzo ożywiona. Z Warszawy częstymi gośćmi we Lwowie byli m. in. Wacław Sierpiński, Karol Borsuk, Stefan Mazurkiewicz i Alfred Tarski. Z Wilna przyjeżdżał nieraz Antoni Zygmund. Z zagranicy bawili w tym pełnym uroku mieście m. in. tacy znakomici matematycy jak Henri Lebesque, Emil Borel, Paul Montel (wszyscy z Francji), Leon Lichtenstein i Ernst Zermelo (z Niemiec), a nawet John von Neumann ze Stanów Zjednoczonych. W latach 1935—1941 wpisano do „*Księgi Szkockiej*" 193 problemy, z których kilka rozwiązano dopiero niedawno, a część wciąż czeka na rozwiązanie. Pierwszy zapis nosi datę 17 lipca 1935 r. i był dokonany przez S. Banacha; ostatni wpisał się H. Steinhaus 31 maja 1941 r.

Oto niektóre nazwiska autorów tych problemów:
Stefan Banach, Stanisław Mazur, Stanisław Ulam, Juliusz Paweł Schauder, Władysław Orlicz, Józef Schreier, Herman Auerbach, Hugo Steinhaus, Stanisław Ruziewicz, Z. Łomnicki, Kazimierz Kuratowski, Józef Marcinkiewicz, Leopold Infeld, Marek Kac, Władysław Nikliborc, Stanisław Saks, Bronisław Knaster, Karol Borsuk, Stefan Kaczmarz, Antoni Zygmund, Leon Sternbach, René Maurice Fréchet, Samuel Eilenberg, Nikołaj Bogolubow, Paweł Aleksandrow, Siergiej Sobolew, Łazar Lusternik.

Legendarna „*Księga Szkocka*", o dużej wartości naukowej, emocjonalnej i historycznej, została uratowana z zawieruchy wojennej przez żonę Banacha i jest w posiadaniu ich syna dr med. Stefana Banacha. Na prośbę prof. H. Steinhausa przesłał mu on fotokopię „*Księgi*". Steinhaus z kolei przesłał ją Stanisławowi Ulamowi do Stanów Zjednoczonych, Ulam przetłumaczył ją na język angielski i w wielu odpisach rozesłał swoim przyjaciołom na całym świecie. W 1958 r. przekład „*Księgi Szkockiej*" autorstwa Ulama był udostępniony uczestnikom Międzynarodowego Kongresu Matematycznego w Edynburgu, wywołując wielkie zainteresowanie. Ulam opublikował swój przekład w 1967 r. w Stanach Zjednoczonych i w wersji amerykańskiej nosi on tytuł „*The Scottish Book: A Collection of Problems*". „Księgę Szkocką" przetłumaczył na angielski także R. D. Mauldin i wraz z licznymi komentarzami opublikował ją w 1981 r. w formie specjalnego, niezwykle starannie opracowanego wydawnictwa pt. „*The Scottish Book*", w Bostonie.

8. Ostatnie lata życia.

22 września 1939 r. Lwów został zajęty przez wojska sowieckie, po czym został włączony do Ukraińskiej SRR. W listopadzie tegoż roku siedmioosobowa komisja z Moskwy dokonała reorganizacji Uniwersytetu, a 2-go grudnia 1939 r. senat uczelni przyjął nowy statut. 8 stycznia 1940 r., na mocy dekretu Prezydium Rady Najwyższej USRR, Uniwersytet przemianowano nadając mu imię Iwana Franki, poety ukraińskiego. Do uczelni sprowadzono 45 pracowników naukowych z Kijowa i Charkowa. Pozostała na uczelni większość pracowników Uniwersytetu Jana Kazimierza. 15 stycznia 1940 r. rozpoczął się nowy rok akademicki. Podobnie jak na innych wyższych uczelniach, specjalną opieką otoczono matematykę, przywiązując duże znaczenie do jej rozwoju.

Stefan Banach został profesorem tego Uniwersytetu, piastując jednocześnie w latach 1939—1941 stanowisko dziekana Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego. Powołano go też na członka—korespondenta Akademii Ukraińskiej SRR. Był zapraszany wraz ze swymi współpracownikami na konferencje, sympozja i wykłady do Moskwy i Leningradu. W 1940 r. Komitet Organizacyjny Światowego Kongresu Matematyków w Nowym Jorku zaprosił Banacha na przewodniczącego sekcji. W tymże roku został wybrany członkiem Rady Miejskiej Lwowa. S. Banach, jak już wiemy, nie lubił wszelkich oficjalnych posiedzeń i prac administracyjnych, a pełnienie funkcji dziekana i członka Rady Miejskiej zabierało mu sporo czasu. Toteż w owym okresie opublikował tylko dwie prace.

Wiadomość o wybuchu wojny niemiecko-sowieckiej zastała Banacha w Kijowie, dokąd przyjechał w celach naukowych. Troska o losy rodziny spowodowała, że nie zastanawiając się ani chwili wsiadł do ostatniego odchodzącego jeszcze do Lwowa pociągu i powrócił do żony i syna. Niebawem został aresztowany przez Niemców i przez kilka tygodni przebywał w więzieniu. Podejrzewano go o przemyt marek niemieckich, ponieważ w jego mieszkaniu zastano osoby trudniące się tym zajęciem. Ze względu na niezwykle ciężkie warunki materialne — brak środków do życia — zmuszony był zostać karmicielem wszy w Instytucie Bakteriologicznym prof. Rudolfa Weigla. Produkowano tam szczepionki przeciwko durowi plamistemu, które preparuje się z osłabionych zarazków tej strasznej choroby, wyhodowanych w jelitach wszy. Jest oczywiste, że karmiciel też jest narażony na tę chorobę, pomimo szczepień ochronnych. To niebezpieczne zajęcie było stosunkowo dobrze płatne. Poza tym karmiciele otrzymywali przydziały żywnościowe oraz legitymacje, które chroniły przed łapankami. Toteż S. Banach przetrwał okupację. Godzi się w tym miejscu zaznaczyć, że w Instytucie R. Weigla pracowało wiele osób, będących członkami Armii Krajowej i część szczepionek przekazywana była potajemnie tej Armii.

Po ponownym zajęciu Lwowa przez Armię Czerwoną w lipcu 1944 r. Stefan Banach zabrał się, pomimo dręczącej go już nieuleczalnej choroby, do organizowania pracy naukowej i pedagogicznej w radzieckim Lwowskim Uniwersytecie Państwowym. Objął ponownie funkcję przewodniczącego Lwowskiego Towarzystwa Matematycznego. Był też członkiem redakcji pisma „*Matematiczeskij Sbornik*". Został również wybrany członkiem Prezydium Wszechsłowiańskiego Antyfaszystowskiego Komitetu z siedzibą w Sofii. Napisał jeszcze kilka prac, których nie zdążył już opublikować. W roku zakończenia wojny przebywał pewien czas w domu wypoczynkowym radzieckiej Akademii Nauk w pobliżu Moskwy. Tam odwiedził go wybitny matematyk radziecki Siergiej L. Sobolew, który wspominał: *„Mimo ciężkiej choroby podcinającej jego siły jego oczy były żywe. To był wciąż ten sam towarzyski, wesoły, niezwykle życzliwy i uroczy Stefan Banach, pełen humoru, energiczny człowiek o pięknej duszy i wielkim talencie (...) Zawsze i wszędzie wnosił ze sobą żywy ogień i zapał"*.

S. Banach zamierzał po powrocie do Polski objąć katedrę na Uniwersytecie Jagiellońskim. Prowadzono w tej sprawie zakulisowe rozmowy. Niestety, choroba dokonała dzieła zniszczenia w jego organizmie i 31 sierpnia 1945 r. zmarł we Lwowie na raka oskrzeli w wieku 52 lat. Pochowany został na cmentarzu Łyczakowskim we Lwowie.

Zakończenie.

Powstanie każdej nowej dyscypliny naukowej jest efektem długiego procesu badawczego. Tak też rzecz się miała z analizą funkcjonalną. Do jej powstania przyczyniły się prace wielu znakomitych matematyków — Vito Volterry, Dawida Hilberta, Jacques'a Hadamarda, René Maurice Frécheta, Frigyesa Riesza i Norberta Wienera. Ale żaden z nich nie dostrzegł tego, co zauważył Stefan Banach: wykorzystał on po mistrzowsku metody topologii do otrzymania głębokich, fundamentalnych twierdzeń analizy funkcjonalnej, ugruntowując ostatecznie jej podstawy. *„Istnienie analizy funkcjonalnej jako samodzielnej dyscypliny naukowej zawdzięczamy geniuszowi Stefana Banacha... Analiza funkcjonalna — to wspaniały pomnik jej twórcy"* powiedział prof. Stanisław Mazur.

Książka S. Banacha *„Teoria operacji liniowych"* wywarła olbrzymi wpływ na rozwój matematyki współczesnej. Rozwinięta w niej teoria objęła dużą różnorodność zagadnień, traktując je w sposób prosty i jednolity oraz stworzyła m. in. właściwy aparat pojęciowy do konstrukcji matematycznych modeli dla wielu zjawisk, których badaniem zajmuje się współczesna fizyka.

W uznaniu wielkich zasług Stefana Banacha, ustanowiona została w Polsce nagroda jego imienia, przyznawana rokrocznie przez Polskie Towarzystwo Matematyczne polskim matematykom za wybitne osiągnięcia. Imię Stefana Banacha nosi również Międzynarodowe Centrum Matematyczne przy Polskiej Akademii Nauk w Warszawie. Są też szkoły, które wybrały go na swego patrona — Szkoła Podstawowa nr 172 w Łodzi i Liceum Ogólnokształcące w Żaganiu (województwo zielonogórskie).

Należy wyrazić zdziwienie, dlaczego zaledwie dwie szkoły noszą imię wielkiego polskiego matematyka, którego nazwisko znane jest na całym świecie i widnieje wśród najwybitniejszych postaci w Muzeum Narodów w Chicago. Ministerstwo Edukacji Narodowej odpowiadając na list autora niniejszego opracowania w sprawie wykazu szkół, którym nadano imię S. Banacha, napisało: *„Informujemy... że w ostatnich latach niektóre szkoły zmieniają imiona swoich patronów i być może wybiorą imię Stefana Banacha. Działania powyższe pozostają w gestii rad pedagogicznych, lokalnych środowisk oraz właściwego terenowego kuratora oświaty i wychowania"*. Miejmy nadzieję, że z racji stulecia urodzin tego geniusza XX wieku ta sugestia nie pozostanie bez echa. Warto też wspomnianą wyżej nagrodę im. S. Banacha, która jest dość skromna i na ogół mało znaczna, uczynić nagrodą międzynarodową. Godziło by się wreszcie na budynku w Krakowie, gdzie mieszkał S. Banach, umieścić tablicę pamiątkową.

W matematyce nazwisko Banacha noszą przyjęte w międzynarodowej terminologii, oprócz omówionego podstawowego pojęcia analizy funkcjonalnej[5]) — *„przestrzeni Banacha”*, również inne ważne pojęcia jak *„algebry Banacha”* (nazwane tak na jego cześć przez znanego matematyka M. Zorna), *„funkcjonał Banacha-Mazura”*, *„struktura Banacha”* oraz liczne twierdzenia przez niego udowodnione.

Wybitny amerykański matematyk M. H. Stone powiedział: *„Geniusz Stefana Banacha stworzył dla nas tyle problemów, ile twierdzeń sam udowodnił”.*

Stefan Banach, przyczyniając się w olbrzymim stopniu do rozwoju matematyki XX wieku, jest jednym z tych wielkich Polaków, którzy na zawsze weszli do historii nauki światowej.

---

[5]) Stefana Banacha uważa się za twórcę dyscypliny matematycznej zwanej *analizą funkcjonalną*. Ten przymiotnik pochodzi pośrednio od słowa „funkcja”, ale bezpośrednio od słowa *„funkcjonał”*, które także oznacza funkcję, lecz w ogólniejszym sensie niż funkcja zmiennej rzeczywistej lub zespolonej. Istotą tej nowej matematyki było geometryczne ujęcie różnych działów i problemów analizy matematycznej. Geometria kojarzy się z pojęciami „punkt”, „prosta”, „przestrzeń”, „Euklides” (to bardziej pojęcie niż człowiek). Przestrzeń może być jednowymiarowa (linia prosta), dwuwymiarowa (płaszczyzna), trójwymiarowa (ta, w której żyjemy), czterowymiarowa (gdy dochodzi jeszcze czas) i tak dalej. Na co komu to pomnażanie wymiarów? Wiążą się z nim różne ciekawe zagadnienia geometryczne, ale oddalamy się w ten sposób od praktyki. Jednakże nowe wspaniałe światy i nowe możliwości otwierają się, gdy wymiar sięgnie nieskończoności.

Wektor w przestrzeni n-wymiarowej to układ n liczb: $(x_1, ..., x_n)$. Jego długość to $\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$. Liczby x_i to składowe wektora, a także współrzędne jego końca, jeśli jego początek jest w punkcie $(0, ..., 0)$. Odległość dwóch punktów $(x_1, ..., x_n)$ i $(y_1, ..., y_n)$ równa się $\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}$. A teraz wyobraźmy sobie nieskończenie wiele prostopadłych do siebie osi, choć trudno to sobie wyobrazić. Każdy wektor będzie miał nieskończenie wiele składowych: $(x_1, x_2, x_3, ...)$. Jego długością będzie $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$. I tu sygnał „stop”. Żeby to miało sens, szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ musi być zbieżny.

A więc teraz przestańmy myśleć o osiach. Naszą przestrzenią niech będzie zbiór ciągów $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...)$ o tej własności, że $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$. Każdemu ciągowi $\mathbf{x}$ przypiszemy „normę” $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}$. Wtedy mamy $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ (warunek trójkąta). Sumą dwóch ciągów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ jest ciąg $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_i+y_i)_{i=1}^{\infty}$. Podobnie określamy ich różnicę. Dla każdej liczby a ciąg $a\mathbf{x}$ oznacza $(ax_i)_{i=1}^{\infty}$. W ten sposób nasza przestrzeń staje się przestrzenią liniową. Nadto mamy $\|a\mathbf{x}\| = |a|\cdot\|\mathbf{x}\|$ (jednorodność normy).

Tak określoną przestrzeń oznacza się przez l^2. Można spytać jaki z niej pożytek. A więc na przykład: przestrzeń ta okazuje się izometryczna z przestrzenią $\mathbf{L}^2$, o której już była mowa. Przypomnijmy, że mówiąc o ortogonalności funkcji wprowadziliśmy pojęcie przestrzeni $\mathbf{L}^2([0, 1])$ funkcji całkowalnych wraz z kwadratem (w sensie Lebesgue'a) w przedziale $[0, 1]$. Tutaj wygodnie nam będzie zastąpić ten przedział przez $[0, 2\pi]$ (to tylko zmiana skali). Tak określona przestrzeń jest liniowa, gdyż

1° suma dwóch funkcji całkowalnych jest całkowalna, a stąd łatwo wywnioskować, że suma dwóch funkcji całkowalnych wraz z kwadratem ma nadal tę własność,

2° wraz z funkcją f także funkcja af jest całkowalna wraz z kwadratem.

Ściślej mówiąc, to nie poszczególne funkcje są elementami przestrzeni $\mathbf{L}^2([0, 2\pi])$ (krócej $\mathbf{L}^2$): trzeba utożsamić ze sobą każde dwie funkcje f i g, które są sobie równe *„prawie wszędzie”*, co znaczy, że $\int_0^{2\pi} |f-g|dt = 0$. Mają one wtedy te same współczynniki Fouriera:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ntdt \ (n > 0).$$

W przestrzeni $\mathbf{L}^2$ wprowadzamy normę podobnie jak przed chwilą w przestrzeni l^2, mianowicie przyjmujemy $\|f\| = \left(\int\limits_0^{2\pi} [f(t)]^2 dt\right)^{1/2}$. Nietrudno udowodnić, że spełnia ona warunek trójkąta (inaczej nie zasługiwałaby na nazwę normy) i jest jednorodna.

Otóż okazuje się *(twierdzenie Riesza-Fischera)*, że dla każdej funkcji $f \in \mathbf{L}^2$ zachodzi równość:

$$\|f\|^2 = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_1^\infty a_n^2 + \pi \sum_1^\infty b_n^2 \tag{1}$$

i że każdy ciąg $\mathbf{x} \in l^2$, którego kolejne wyrazy oznaczymy teraz jak następuje

$$\mathbf{x} = (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots), \tag{2}$$

jest ciągiem współczynników Fouriera pewnej funkcji z $\mathbf{L}^2$.

Tożsamość (1) wyznacza właśnie izometrię między przestrzeniami l^2 i $\mathbf{L}^2$. Istotnie: przyporządkujmy każdemu ciągowi (2) ciąg

$$\sqrt{\pi}a_0, \sqrt{\pi}a_1, \sqrt{\pi}b_1, \sqrt{\pi}a_2, \sqrt{\pi}b_2, \ldots$$

Będzie to pewien element z l^2, odpowiada mu więc na podstawie równości (1) pewien element z $\mathbf{L}^2$ o tej samej normie. Jest to zapowiadana izometria między tymi dwiema przestrzeniami. Trzeba jeszcze tylko zauważyć, że zachowane są działania, tzn. że współczynniki Fouriera funkcji $f+g$ są sumami odpowiednich współczynników dla f i g, a przy pomnożeniu funkcji przez liczbę a jej współczynniki także mnożą się przez a.

Dzięki tej izometrii każda własność arytmetyczna ciągu z l^2, na przykład absolutna zbieżność sumy jego wyrazów, odpowiada jakiejś własności funkcji z $\mathbf{L}^2$, która jest jej obrazem izometrycznym. Ma to wielkie znaczenie w teorii całki i w teorii funkcji w ogóle.

Przestrzeń l^2 wprowadził Dawid Hilbert, toteż przestrzenie o podobnych własnościach (np. przestrzeń $\mathbf{L}^2$) nazywają się przestrzeniami Hilberta. Można w nich wprowadzić pojęcie *ortogonalności*. Jest to rodzaj prostopadłości. Dwa wektory na płaszczyźnie są prostopadłe, jeśli ich składowe spełniają równość $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ czyli jeśli ich *iloczyn skalarny* równa się zeru. W przestrzeni l^2 podobnie można wprowadzić iloczyn skalarny dowolnych wektorów **x** i **y**. Jest nim wyrażenie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, oznaczane przez $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Łatwo dowieść, że ta suma jest skończona. Ortogonalność wektorów x i y oznacza, że $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

W przestrzeni $\mathbf{L}^2([0, 1])$ iloczynem skalarnym funkcji f i g jest całka $\int\limits_0^1 f(t)g(t)\, dt$ (zawsze skończona!). Jeśli ona znika, to mówi się, że funkcje f i g są *ortogonalne*. Wprowadziliśmy to pojęcie już wcześniej mówiąc o układach ortogonalnych.

Banach wprowadził pojęcie ogólniejsze od przestrzeni Hilberta. Niech **X** będzie przestrzenią liniową, w której określona jest norma jednorodna.

Tak samo, jak w przestrzeni Hilberta, odległość wektorów **x** i **y** określamy jako $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. Od normy żądamy, żeby równość $\|\mathbf{x}\| = 0$ zachodziła wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = 0$. W przestrzeni **X** można określić zbieżność ciągów podobnie jak dla liczb. Można też określić warunek Cauchy'ego: spełnia go ciąg wektorów $(\mathbf{x}_n)$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N, że dla $m \geqslant N$ i $n \geqslant N$ mamy $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| < \varepsilon$.

Każdy ciąg zbieżny spełnia ten warunek. Żądamy, żeby w przestrzeni **X** był on nie tylko konieczny, ale i dostateczny dla zbieżności. Tak jest w przestrzeni liczb rzeczywistych. Tak nie jest w przestrzeni liczb wymiernych. Przestrzeń, w której to żądanie jest spełnione, nazywa się *zupełna* (nie należy mylić tego pojęcia z zupełnością układu ortogonalnego).

Otóż przestrzeń Banacha ma być zupełna. I to już wszystko. A zatem *przestrzeń Banacha* jest to przestrzeń liniowa z jednorodną normą i zupełna względem tej normy.

Przestrzeń Hilberta także jest zupełna, a więc jest przestrzenią Banacha, ale w przestrzeni Banacha niekoniecznie musi być określony iloczyn skalarny, a więc i pojęcie ortogonalności.

Przykładem przestrzeni Banacha, która nie jest przestrzenią Hilberta, jest przestrzeń l^1 ciągów liczb rzeczywistych $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, których suma jest bezwzględnie zbieżna. Normę elementu $\mathbf{x} = (x_i)$ określamy jako $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$. Nie należy sądzić, że przestrzeń l^1 jest izometryczna z przestrzenią $\mathbf{L}^1$ funkcji całkowalnych według Lebesgue'a w $[0, 1]$ z normą $\int_0^1 |f|$, podobnie jak przestrzeń l^2 jest izometryczna z $\mathbf{L}^2$. Analogii nie ma tutaj. Ale $\mathbf{L}^1$ też jest przestrzenią Banacha (lecz nie Hilberta).

W matematyce najczęściej spotykamy się z przestrzeniami Banacha, których elementami są funkcje. Oprócz $\mathbf{L}^1$ i $\mathbf{L}^2$ można tu wymienić na przykład przestrzenie $\mathbf{L}^p$ funkcji całkowalnych w przedziale $[0, 1]$ z p-tą potęgą $(p > 1)$ z normą $\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, a także bardzo ważną przestrzeń funkcji ciągłych w przedziale skończonym lub nieskończonym z normą $\sup |f(t)|$.

Bardzo często istotna okazuje się znajomość takich funkcji określonych w przestrzeni Banacha, których wartościami są liczby, czyli tzw. *funkcjonałów* (nazwa powstała zapewne dlatego, żeby nie mówić o „funkcjach funkcji"). Szczególną rolę grają *funkcjonały liniowe*, to jest spełniające równość $F(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}) = aF(\mathbf{x})+bF(\mathbf{y})$ dla dowolnych $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ z danej przestrzeni Banacha $\mathbf{X}$ i dowolnych liczb a i b, a przytem takie, że $|F(\mathbf{x})| \leqslant C\|\mathbf{x}\|$, gdzie C nie zależy od $\mathbf{x}$.

Każdy funkcjonał liniowy F w przestrzeni $\mathbf{L}^1([0, 1])$ wyznaczony jest przez funkcję całkowalną i ograniczoną f w ten sposób, że $F(x) = \int_0^1 x(t)f(t)\mathrm{d}t$, i na odwrót, każda taka funkcja f wyznacza funkcjonał liniowy w $\mathbf{L}^1$. W przestrzeni $\mathbf{L}^p$ $(1 < p < \infty)$ funkcjonały liniowe wyznaczone są przez ustalone funkcje f całkowalne z q-tą potęgą, gdzie $q = p/p-1$, w taki sam jak poprzednio sposób. Zauważmy, że dla $p = 2$ mamy $q = 2$, a więc funkcjonały liniowe w przestrzeni $\mathbf{L}^2$ wyznaczone są przez elementy tejże przestrzeni. Tak samo jest oczywiście w l^2. Funkcjonały liniowe w przestrzeni funkcji ciągłych trudniej jest opisać.

Operacją liniową w przestrzeni Banacha X nazywa się takie jej odwzorowanie $\mathbf{U}$ w przestrzeń Banacha $\mathbf{Y}$ (może być $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$), że $\mathbf{U}(a\mathbf{x}_1+b\mathbf{x}_2) = a\mathbf{U}\mathbf{x}_1+b\mathbf{U}\mathbf{x}_2$ i że $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\| \leqslant C\|\mathbf{x}\|$, gdzie $\| \ \|$ po prawej stronie oznacza normę w $\mathbf{X}$, a po lewej normę w $\mathbf{Y}$, natomiast C jest pewną stałą. W ten sposób funkcjonał liniowy jest szczególnym przypadkiem operacji liniowej, takim mianowicie, że $\mathbf{Y}$ jest przestrzenią liczb rzeczywistych lub zespolonych.

Operacje liniowe grają w przestrzeni Banacha doniosłą rolę i posłużyły za tytuł klasycznej książki S. Banacha (Théorie des opérations linéaires). Albowiem Banach nie ograniczył się bynajmniej do utworzenia kilku nowych pojęć, ale zbudował także ich teorię i wyciągnął z niej daleko idące konsekwencje. Żeby dać jeden choćby przykład ważnego twierdzenia o operacjach liniowych przytoczmy następujące:

Jeśli operacja liniowa $\mathbf{U}$ przeprowadza przestrzeń Banacha $\mathbf{X}$ wzajemnie jednoznacznie na przestrzeń Banacha $\mathbf{Y}$, to funkcja do niej odwrotna jest też operacją liniową, tym razem z $\mathbf{Y}$ do $\mathbf{X}$.

Odkrycia Banacha pozwoliły w sposób zadziwiająco krótki i efektowny rozwiązać pewne stawiane w tym czasie zagadnienia albo uprościć trudne dowody znanych już wcześniej twierdzeń.

Dla przykładu: Weierstrass znalazł funkcję ciągłą, która w żadnym punkcie nie ma pochodnej. Przykład ten nie był łatwy do skonstruowania. Natomiast korzystając z pewnych twierdzeń Banacha można w kilku wierszach udowodnić, że funkcje takie istnieją. Inne twierdzenie typu egzystencjalnego dla każdego zbioru przeliczalnego na odcinku istnieje funkcja ciągła, której szereg Fouriera jest w punktach tego zbioru rozbieżny (w całym odcinku rozbieżny być nie może). Tutaj w dowodzie używa się pewnego twierdzenia o operacjach liniowych, które udowodnili Banach i Steinhaus.

Nazwisko Banacha znane jest każdemu matematykowi na świecie, a pojęcie przestrzeni Banacha, czyli jak się teraz przeważnie mówi i pisze, przestrzeni *B* (*B*-space, *B*-Raum i t.d.) wchodzi do każdego uniwersyteckiego kursu matematyki. Nazwa *„analiza funkcjonalna"* oznaczała dawniej (przed II wojną światową) osobny zaawansowany dział matematyki oparty na odkryciach Banacha i rozwinięty przez jego uczniów i współpracowników. Można było „skończyć matematykę" nie znając go. Obecnie nie można. W klasyfikacji działów i poddziałów matematyki analizę funkcjonalną jeszcze się wyodrębnia dla określenia pewnych specjalnych badań (np. geometrii przestrzeni Banacha), ale uprawiać analizy matematycznej bez znajomości jej głównych pojęć i twierdzeń dzisiaj nie można — weszły one, jak wszystkie wielkie odkrycia, w żywy krwiobieg matematyki.

(przypis *Stanisława Hartmana*)

Bibliografia

[1] Albiński M.: *Wspomnienia o Banachu i Wilkoszu.* „Wiad. Mat." XIX, 1976, s. 133—135.
[2] Derkowska A.: *Otton Marcin Nikodym,* „Wiad. Mat.", XXV, 1984, s. 75—83.
[3] Frantz W.: *Odlamki wspomnień,* Kraków 1972.
[4] Iwiński T.: *Ponad pól wieku dzialalności matematyków polskich, Zarys historii PTM,* Warszawa 1975.
[5] Krysicki W.: *Poczet wielkich matematyków,* Warszawa 1975.
[6] Kuratowski K.: *Pól wieku matematyki polskiej 1920—1970,* Warszawa 1973.
[7] Kuratowski K.: *Notatki do autobiografii,* Warszawa 1981.
[8] Leja F.: *Powstanie Polskiego Towarzystwa Matematycznego,* „Wiad. Mat.", XII, 1969, s. 3—15.
[9] Mazur S.: *Przemówienie wygłoszone na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha,* „Wiad. Mat.", IV, 1961, s. 249—250.
[10] Nahlik S.: *Przesiane przez pamięć,* Kraków 1987.
[11] Orlicz W.: *Stefan Kaczmarz,* „Wiad. Mat.", XXXI, 1985, s. 161.
[12] Pełczyński A., Semadeni Z.: *Uwagi o rozwoju analizy funkcjonalnej w Polsce,* „Wiad. Mat.", XII, 1969, s. 83—108.
[13] *Pól wieku wspomnień uczniów Gimnazjum im. B. Nowodworskiego (św. Anny) w Krakowie,* Kraków 1938.
[14] Sobolew S. Ł.: *Przemówienie wygłoszone na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha,* „Wiad. Mat.", IV. 1961, s. 261—264.
[15] Steinhaus H.: *Stefan Banach,* „Wiad. Mat.", IV, 1961, s. 251—259.
[16] Steinhaus H.: *Wspomnienia,* Kraków 1970.
[17] Szałajko K.: *Wspomnienia o Kole Matematyczno-Fizycznym Studentów UJK we Lwowie,* „Wiad. Mat.", XXVI, 1984—85, s. 86—88.
[18] Szökefalvi-Nagy B.: *Przemówienie wygłoszone na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha,* „Wiad. Mat.", IV, 1961, s. 269—270.
[19] Stone M. H.: *Nasz dlug wobec Stefana Banacha,* „Wiad. Mat.", IV, 1961, s. 265—268.
[20] Slebodziński W.: *Polskie Towarzystwo Matematyczne w latach 1919—1963,* „Wiad. Mat.", VIII, 1960, s. 85—106.
[21] Ulam S.: *Wspomnienia z Kawiarni Szkockiej,* „Wiad. Mat.", XII, 1969, s. 49—50.
[22] Ulam S.: *Adventures of a Mathematician,* New York 1976.
[23] Wiweger A.: *Stefan Banach, Mies. „Delta"* nr 2, 1974, s. 4—5.
[24] *Wyjątki z księgi protokołów Towarzystwa Matematycznego w Krakowie, Faksymile Zebrania Konstytucyjnego,* „Wiad. Mat.", XXII, 1979, s. 155—157.