SUR L'OEUVRE SCIENTIFIQUE DE STEFAN BANACH

I. THÉORIE DES OPÉRATIONS ET THÉORIE DES SÉRIES ORTHOGONALES

PAR

W. ORLICZ (POZNAŃ)

Deux domaines de l'Analyse mathématique ont surtout intéressé le feu professeur Banach durant toute la période de son activité scientifique: la théorie des fonctions réelles et la théorie des opérations. Bien qu'il fût parvenu dans la théorie des fonctions réelles, particulièrement dans celle de la mesure et de l'intégrale, à des résultats importants qui lui ont valu un nom durable dans l'histoire des mathématiques des dernières dixaines d'années, ce sont avant tout ses recherches fondamentales dans la théorie des opérations grâce auxquelles son nom est devenu universellement connu dans le monde scientifique et qui ont fait parler de l'École mathématique de Lwów comme d'un centre représentatif, à côté de l'École de Varsovie, de la pensée mathématique polonaise de nos jours.

Ici, je me propose d'exposer brièvement les principaux résultats de Banach dans la théorie des opérations; je rappellerai aussi ses recherches dans la théorie des séries orthogonales car elles sont basées en grande partie sur celle des opérations.

On connaît le fort développement que la théorie des équations intégrales et celle des équations à infinité d'inconnues a pris au cours de la première quinzaine d'années de notre siècle. Ces belles théories mathématiques présentent une certaine synthèse — bien qu'incomplète encore — des méthodes algébriques et de celles de la géométrie analytique, convenablement généralisées. Banach, alors au début de sa carrière scientifique, n'a pas manqué d'apercevoir l'absence d'un formalisme mathématique capable de saisir d'un même point de vue les diverses classes de fonctions, de suites infinies etc. et les différentes notions de convergence qu'on définissait jusqu'alors *ad hoc*, selon le cas, au cours des recherches sur les équations intégrales et les systèmes d'équations à infinité d'inconnues. Il s'était occupé de ces problèmes d'abord dans sa thèse de doctorat [7].

Le point de départ pour les considérations de Banach est l'introduction axiomatique de certaines classes d'éléments. Il a remarqué notamment que ce sont les vecteurs à n dimensions qui constituent le prototype de bien des classes d'éléments utiles en Analyse. On effectue avec les vecteurs deux opérations fondamentales: l'addition vectorielle et la multiplication par un nombre réel. C'est pourquoi Banach postule qu'on ait un ensemble abstrait X pour les éléments duquel l'addition $x+y$ et la multiplication par nombres réels $\lambda \cdot x$ soient définies; il postule que ces opérations d'addition et de multiplication aient une série de propriétés élémentaires, analogues à celles des opérations sur les vecteurs. Je ne vais pas énumérer ici la liste des axiomes, qui peut être donnée d'ailleurs dans des formes bien variées. Il suffit de noter que l'ensemble X doit être un groupe commutatif par rapport à l'addition et que celle-ci doit être liée avec la multiplication par les lois de distributivité. Mais les vecteurs sont caractérisés en outre par la propriété qu'à chacun d'eux un nombre est attaché, à savoir sa longueur. Conformément à ce fait, Banach postule qu'à tout élément x de l'ensemble X vienne correspondre un nombre réel qu'il appelle la *norme* de cet élément et qu'il désigne par $\|x\|$, en l'assujettissant aux conditions:

$$\|x\| \begin{cases} = 0 & \text{pour } x = 0 \\ \neq 0 & \text{pour } x \neq 0, \end{cases}$$

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \qquad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|;$$

enfin, il admet que la condition de Cauchy

$$\|x_p - x_q\| \to 0 \quad \textit{lorsque} \quad p \to \infty \quad \textit{et} \quad q \to \infty$$

entraîne l'existence d'un *élément-limite* x, à savoir tel que

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty.$$

C'est ainsi que certaines classes linéaires d'éléments se trouvent distinguées axiomatiquement et, en même temps, une notion de convergence est convenablement introduite: une suite d'éléments $x_1, x_2, \ldots$ est dite *convergente vers* x *(suivant la norme)* si $\|x_n - x\| \to 0$ avec $n \to \infty$.

Fréchet a appelé dans son livre [1]) *espaces de Banach* les classes d'éléments qui ont été distingués par Banach de la façon

[1]) M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Paris 1928, p. 141.

qui vient d'être décrite. Dès lors cette dénomination s'est universellement installée dans la littérature mathématique mondiale. En abrégé, on parle des espaces *du type* (*B*).

Or, est-il légitime d'appeler du nom de Banach ce type d'espaces? On pourrait objecter que le premier groupe d'axiomes, concernant l'addition et la multiplication, était déjà employé à l'occasion de certaines considérations géométriques. C'est ainsi que Weyl, par exemple, avait donné dans son livre[2]) les axiomes analogues pour les buts d'une conception abstraite de la géométrie affine. Presque simultanément à Banach, le mathématicien américain Wiener [3]) a proposé un pareil système d'axiomes. Faut-il donc reconnaître à Banach une priorité pour la seule raison que sa thèse de doctorat a précédé de quelques mois la conférence de Wiener?

Il me semble que, dans ce cas, la question de priorité chronologique n'est point essentielle. Ce qui est décisif, c'est que Banach ne s'était pas borné à proposer une liste d'axiomes, mais a édifié à l'aide d'eux toute une théorie des espaces du type (*B*). Il a construit une théorie amplement ramifiée et riche en résultats fort intéressants. Sa thèse de doctorat n'est qu'un fragment de cette théorie; le vrai édifice en est constitué par une série des publications ultérieures, surtout par sa monographie capitale [38]. Cette monographie est très connue à l'heure actuelle.

Banach a montré aussi l'importance des espaces du type (*B*) pour maints problèmes de l'Analyse classique, à savoir pour la théorie des équations intégrales, des équations différentielles, de la sommabilité etc. On voit donc qu'il ne s'agit pas seulement d'une introduction occasionnelle de certains axiomes, mais bien d'une vaste étude des espaces en question, d'un programme de recherches, de toute une méthode d'investigation.

Voyons donc de quoi s'agit-il dans les recherches de Banach sur les espaces qui portent son nom. D'une façon générale, ces recherches peuvent être caractérisées comme une étude méthodique des propriétés des espaces du type (*B*) et de quelques espaces plus généraux, faite du point de vue de la théorie des ensembles, ainsi que l'étude des propriétés de ces espaces du

---

[2]) H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie,* 4-me édition, Berlin 1921, p. 15.

[3]) N. Wiener, *Note on a paper of M. Banach,* Fundamenta Mathematicae (1923), p. 136-143, en particulier p. 143, renvoi.

point de vue de leur structure. Il s'agit notamment d'une théorie de fonctions définies dans ces espaces et dont les valeurs appartiennent aussi à l'espace du type (B), par exemple. Banach appelle *opérations* les fonctions de ce genre (pour les distinguer des fonctions ordinaires d'une variable réelle). Il se sert aussi du terme *fonctionnelle*, en le réservant aux opérations dont l'argument parcourt un espace du type (B) et dont les valeurs sont des nombres réels.

L'effort de Banach s'est concentré presque entièrement sur l'étude d'ainsi dites opérations linéaires. L'opération $U(x)$ s'appelle *additive* si $U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2)$ pour $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$. L'opération additive et continue s'appelle *linéaire*; la notion de convergence (suivant la norme) étant définie dans l'espace X des arguments et dans l'espace Y des valeurs de l'opération, il est clair ce qu'il faut entendre par la continuité d'une opération. Les exemples d'opérations linéaires sont, entre autres, les expressions intégrales figurant dans les équations intégrales linéaires.

Banach ne s'occupe dans ses travaux des opérations non-linéaires que sporadiquement. Aussi la monographie précitée est-elle entièrement consacrée aux opérations linéaires. Banach songeait à en publier le second volume qui devait traiter des opérations non-linéaires et tenir compte tout particulièrement des méthodes topologiques. A ce but, il préparait des matériaux dont une partie seulement a trouvé place dans ses publications (voir [49], par exemple). Mais ses brèves communications à la Section de Lwów de la Société Polonaise de Mathématique et ses entretiens privés nous ont fait entrevoir qu'il possédait une série des résultats sur les opérations analytiques, polynômiales etc. déstinés à entrer dans la deuxième partie de sa monographie. Malheureusement, sa mort prématurée l'a empeché de réaliser ce projet.

Les années 1922-1929 n'apportent que relativement peu de publications de Banach consacrées à la théorie des opérations. Cependant, même à cette époque, tout en s'occupant surtout des problèmes de la théorie de la mesure, des fonctions réelles et des ensembles, il n'a point cessé de s'intéresser vivement aux problèmes de la théorie des opérations. C'est ainsi que son premier cours fait à l'Université de Lwów en 1923 a été consacré au développement de la théorie de l'équation linéaire $y=x-\lambda\cdot U(x)$, mais sous l'hypothèse que x et y sont des fonctions à carré sommable. Pour construire une théorie plus générale, il a fallu surmonter au préalable certaines difficultés essentielles.

Vers l'année 1929 les difficultés principales ont été surmontées et c'est alors qu'a commencé pour lui la période d'une activité intense à laquelle ses collaborateurs les plus proches ont vivement participé. C'est au cours de ces années qu'il a publié, outre quelques travaux parus dans des périodiques spéciaux et contenant les principaux résultats de ses recherches, un livre [36] en polonais dont sa monographie précitée, écrite un an plus tard en français pour la collection „Monografie Matematyczne", constituait précisément un élargissement considérable.

Pour donner une idée plus précise de l'oeuvre scientifique de Banach dans le domaine de la théorie des opérations, il faut que j'envisage de plus près cette monographie, car elle contient non seulement ses résultats antérieurs, mais aussi une série de nouveaux théorèmes, non publiés ailleurs. Je vais me borner aux espaces du type (B), malgré que Banach se serve dans sa monographie aussi d'une généralisation très importante de ces espaces, nommée par lui *espaces du type* (F). Cette généralisation consiste en ce que la notion de norme est assujettie à une condition plus faible que celle d'homogénéité $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Banach fait l'usage dans sa monographie des notions empruntées avant tout à la théorie des espaces métriques. X étant un espace du type (B), on peut y définir la distance en posant $(x, y) = \|x - y\|$. Pourvu de cette métrique, X constitue un espace complet, ce qui permet d'appliquer à l'étude des espaces du type (B) l'appareil des notions et des méthodes de la théorie des espaces métriques. Surtout les notions simples de séparabilité et de compacité y jouent un rôle important. Il en est de-même des notions relevant de la théorie de Baire, comme la condition de Baire, les ensembles de I-e catégorie etc.

Soient X et Y deux espaces du type (B) et $y = U(x)$ une opération linéaire avec $x \in X$ et $y \in Y$. Banach a établi le théorème important; *l'ensemble des valeurs de* $U(x)$ *est soit identique à* Y, *soit de I-e catégorie dans* Y. En appliquant la méthode employée dans la démonstration de ce théorème, il en a déduit la conclusion: *lorsque l'opération* $y = U(x)$ *est biunivoque et que l'ensemble de ses valeurs est identique à* Y, *l'opération inverse* $V(y) = U^{-1}(y)$ *est également linéaire.* Il fait observer que cette proposition reste valable en prenant pour X et Y des espaces du type (F) complets. Il a élargi ainsi le champ d'application de son théorème: il a montré qu'on peut s'en servir p. ex. pour démontrer la continuité des solutions d'équations différentielles partielles du 2^{me} ordre à partir des valeurs-limites préscrites d'avance à la frontière du domaine donné.

Il a examiné les conditions pour que l'opération additive soit continue, c. à d. linéaire. P. ex. la condition suffisante en est la semi-continuité inférieure de la norme $\|U(x)\|$; en formule:

$$\underline{\lim}_{x_n \to x} \|U(x_n)\| \geqslant \|U(x)\|.$$

Ce théorème se trouve déjà dans sa thèse de doctorat. Dans sa monographie, il a donné en outre une série d'autres conditions fort générales. Ces théorèmes admettent de belles applications dans la théorie des séries orthogonales.

Il a examiné également les suites d'opérations linéaires $U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x), \dots$ Il a démontré, par exemple, que si une telle suite est bornée pour tout $x \in X$, elle est uniformément bornée dans toute sphère fermée, donc en particulier pour $\|x\| \leqslant 1$. C'est un théorème très général et particulièrement riche en applications; beaucoup de résultats de Haar, Hahn, Hobson, Lebesgue et autres se laissent réduire facilement à ce théorème. On peut l'appliquer, par exemple, à démontrer l'existence des fonctions continues pour lesquelles la série de Fourier diverge, à l'étude de la divergence d'interpolations linéaires et des suites de quadratures mécaniques, aux méthodes linéaires de sommation etc.

Il a démontré avec Steinhaus [19] que *toute suite d'opérations linéaires est bornée soit dans l'espace X tout entier, soit seulement dans un ensemble de I-e catégorie.* Ce théorème permet de formuler certaines propositions sur les suites doubles d'opérations linéaires — propositions que les auteurs appellent *principe de condensation des singularités* — et qui admettent à leur tour des applications intéressantes dans la théorie des séries orthogonales.

En vue de développer la théorie de l'équation linéaire, et aussi pour d'autres problèmes, Banach a étudié les propriétés des fonctionnelles linéaires définies dans un espace X du type (B). Etant donné un ensemble linéaire G contenu dans X, soit $f(x)$ une fonctionnelle additive (c.-à-d. telle que $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$)

et homogène (c.-à-d. telle que $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ pour λ réel) définie dans G. En admettant que $f(x)$ est majorée par une autre fonctionnelle $\varphi(x)$, non négative, définie dans l'espace X tout entier et assujettie à certaines conditions supplémentaires fort simples, on montre que *la fonctionnelle $f(x)$ peut alors être prolongée à une fonctionnelle additive dans l'espace X tout entier, la majoration par $\varphi(x)$ étant sauvegardée.* Banach a déduit une série des corollaires de ce théorème très général. Il l'a appliqué à l'ainsi dit problème des moments, par exemple. Il a montré qu'à l'aide du théorème sur le prolongement des fonctionnelles additives, il est aisé d'établir l'existence de l'intégrale simplement additive, définie pour toutes les fonctions bornées — et par suite aussi de mesures simplement additives dans la classe de tous les ensembles linéaires (en assignant la même mesure aux ensembles congruents). Il a retrouvé ainsi, et d'une façon très simple, ses résultats antérieurs publiés en 1923 dans son ouvrage d'habilitation et qui sont universellement connus aujourd'hui [4]) . Le théorème sur le prolongement des fonctionnelles peut être appliqué aussi pour démontrer la possibilité de faire correspondre à toute suite bornée une limite généralisée simplement additive et pour résoudre d'autres problèmes de ce genre. Ces exemples montrent combien le rôle du théorème en question est important.

Banach a créé la notion d'*espace conjugué* avec l'espace X donné. C'est l'espace Ξ dont les points sont les fonctionnelles linéaires $f(x)$ définies dans X. Il a étudié les propriétés de l'espace conjugué en se servant, entre autres, de la notion bien fine de fermeture transfinie, qu'il a introduite.

L'importante théorie de l'équation linéaire $y=U(x)$, due à Banach, où x et y appartiennent respectivement à des espaces X et Y du type (B), procède par l'introduction d'une opération linéaire, dite *opération conjuguée avec* $U(x)$, qu'on définit dans l'espace conjugué avec Y. La recherche des conditions pour la résolubilité de l'équation $y=U(x)$ se ramène à l'étude de l'opération conjuguée. Ces recherches de Banach embrassent comme cas particuliers toute une série des résultats de la théorie classique des équations intégrales. Dans le cas de ces équations, ses opérations conjuguées sont des ainsi dites équations intégrales transposées. Toute la théorie classique de Fredholm (dans sa forme

[4]) Cf. ce fascicule, p. 99-100.

affranchie de déterminants) se laisse également généraliser aux équations linéaires $y = x - \lambda \cdot U(x)$.

Il est impossible d'exposer, même d'une façon la plus succinte, tous les groupes importants de problèmes traités par Banach dans sa monographie. Les exemples qui viennent d'être cités permettent déjà de se rendre compte de sa tendance à formuler les théorèmes assez généraux pour qu'on puisse les appliquer par spécialisation aux problèmes concrets de l'Analyse mathématique dans ses aspects les plus variés.

Mais outre cela, sa monographie apporte une foule de problèmes d'un genre tout à fait nouveau et qui y ont été formulés et examinés pour la première fois. Ce sont avant tout les problèmes concernant la *structure* des espaces du type (B), tels que, par exemple, ceux d'isomorphie, d'isométrie et de comparabilité de la dimension linéaire de deux espaces du type (B). Je vais illustrer ce genre de problèmes par un théorème qu'il a établi avec Mazur [38], p. 185. Ce théorème me paraît particulièrement frappant car il permet, pour ainsi dire, de „concretiser" tous les espaces du type (B) séparables. En voici l'énoncé:

A tout espace séparable X du type (B), on peut faire correspondre de manière biunivoque un ensemble linéaire fermé composé de fonctions continues définies dans un intervalle $a \leqslant t \leqslant b$, cette correspondance ayant en outre les propriétés suivantes:

1^0 *à la somme $x_1 + x_2$ d'éléments de X vient correspondre la somme $x_1(t) + x_2(t)$ de fonctions qui correspondent à ces éléments.*

2^0 *la fonction $x(t)$ correspondant à l'élément x de X, on a* $\|x\| = \max |x(t)|$.

Il s'agit donc ici d'une transformation isométrique (c. à d. conservant les distances) de l'espace linéaire X en un certain espace linéaire composé de fonctions continues.

J'espère que ces quelques exemples suffisent pour se faire l'idée de la diversité, de la richesse et de la grande importance des problèmes traités par Banach dans sa théorie des opérations. Qu'il me soit encore permis de caractériser l'importance de ses résultats par une comparaison de la théorie créée par lui à d'autres théories inspirées par des tendances similaires.

Au cours du dernier demi-siècle, plusieurs tentatives ambitieuses ont été entreprises ayant pour but de créer une Analyse d'ordre supérieur à partir non pas des nombres, comme dans l'Analyse classique, mais à partir des êtres analytiques déjà prêts, comme les suites, les fonctions etc. On se proposait donc d'étudier non pas les fonctions numériques ordinaires, mais les fonctions abstraites de ces êtres. L'une des voies de ces recherches a été inaugurée par Volterra et magnifiquement développée en France par Fréchet, Gateaux, Paul Lévy et autres. Elle diffère des recherches de Banach aussi bien par le but principal, qui consiste à former avant tout une sorte du calcul différentiel généralisé et certaines autres théories telles que la théorie des équations différentielles, le calcul des variations etc. — que par le manque d'une base convenable, qui ne comprend d'habitude (à l'exception des recherches fondamentales de Fréchet sur les espaces abstraits) que quelques espaces spéciaux. Par contre, Banach a trouvé dans ses espaces du type (B) et du type (F) le point de départ qui convient le mieux aux besoins d'une vraie Analyse généralisée. Il a lié fort heureusement les méthodes algébriques à celles empruntées à la théorie moderne des espaces métriques, ce qui fait complètement défaut chez les représentants de l'Ecole de Volterra. Il est vrai qu'il s'était borné surtout aux opérations linéaires, mais cette classe d'opérations est particulièrement importante au point de vue d'applications, et d'ailleurs la plupart de ses idées fondamentales gardent leur valeur aussi pour les opérations non-linéaires. D'autre part, ses généralisations des problèmes classiques ne sont pas poussées trop loin, ce qui lui a permis d'obtenir un grand nombre des théorèmes susceptibles d'applications aux maints problèmes d'Analyse classique. On ne peut pas dire le-même en ce qui concerne la direction américaine, par exemple, de l'Analyse généralisée élaborée par E. H. Moore. En discutant le volume I du livre consacré à ses recherches[5]), le mathématicien allemand Doetsch a écrit la phrase suivante[6]):

„Seit dem Auftreten der Mooreschen General Analysis ist die Funktionalanalysis nun allerdings andere Wege gegangen und hat einerseits in der von der Quantenmechanik beeinflussten Theorie

---

[5]) E. H. Moore, *General Analysis*, Part I, Memoirs of the American Philosophical Society, vol. 1, Philadelphia 1935.

[6]) G. Doetsch, *E. H. Moore, General Analysis, Part I*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 49 (1939), p. 58-59.

der Operatoren im Hilbertschen Raum, anderseits in der hauptsächlich von der polnischen Schule (Banach u. a.) kultivierten Theorie der linearen Operationen derartig viele wichtige und vielseitige Resultate erbracht, dass erst die volle Veröffentlichung der Mooreschen Theorie wird erweisen können, ob es sich bei ihr um einen lebensfähigen und notwendigen Zweig der mathematischen Wissenschaft handelt, der neben oder gar über jenen Disziplinen Existenzberechtigung hat".

Aussi crois-je que tous ceux qui connaissent les principaux résultats de la théorie de Banach partageront mon avis, à savoir qu'elle est la plus parfaite et la plus riche en beaux résultats parmi les diverses tentatives de créer une „Analyse de l'Analyse". Son rôle n'est guère diminué par le fait qu'elle n'a pas été achevée en tout détail. Au contraire, il nous arrive bien souvent d'admirer une théorie mathématique dont la construction est close, si bien que nous n'y trouvons plus rien à ajouter et, faute de sujet pour le travail personnel, nous tournons notre attention ailleurs. La théorie de Banach n'en est pas menacée. Au contraire, sa publication a suscité un intérêt croissant pour la théorie des opérations, de sorte qu'en peu de temps cette théorie est devenue populaire dans plusieurs centres mathématiques. A Lwów, sous l'influence de Banach, une pléiade des mathématiciens, Mazur et Schauder en tête, s'est occupée de divers problèmes de la théorie des opérations. L'Ecole mathématique de Lwów s'était formée. Elle a commencé en 1929 à éditer sous la rédaction de Banach et Steinhaus son périodique „Studia Mathematica", consacré en premier lieu à la publication des recherches sur la théorie des opérations et ses applications. Les discussions interminables dont Banach était l'âme, l'extraordinaire accessibilité de ce maître, son amour pour le travail collectif — tout cela a créé une atmosphère scientifique particulière, inoubliable à jamais pour qui — comme moi — a eu la chance de la respirer. A l'étranger, un vif intérêt pour la théorie des opérations s'accusait dès le début, surtout à l'Union Soviétique et aux Etats Unis d'Amérique. En feuilletant tout récemment les annuaires mathématiques du temps de la guerre, j'ai constaté avec satisfaction que l'intérêt pour cette théorie non seulement a gardé pendant la guerre son intensité primitive, mais même — à juger d'après le nombre des noms nouveaux — s'est intensifié encore. Il n'y a pas de doute que la théorie des opérations va attirer, grâce à sa fraîcheur et à la richesse de sa problématique, le nombre de plus en plus croissant de jeunes mathématiciens qui, même dans le développement ultérieur de la théorie, s'appuyeront sur les résultats fondamentaux du professeur Banach. C'est ce qui assure la longévité à son oeuvre.

En ce qui concerne les travaux de Banach sur la théorie des séries orthogonales, ils ont eu pour l'objet surtout l'étude des phénomènes de la divergence de ces séries et des séries dites lacunaires. Les résultats auxquels ils est parvenu se distinguent, comme ceux qui lui sont dus dans les autres domaines des mathématiques, par leur généralité, l'élégance des raisonnements et l'ingéniosité des méthodes employées.

Soit Φ le système orthogonal $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$, c'est-à-dire tel que

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \neq j \\ 1 \text{ pour } i = j. \end{cases}$$

Toute série de la forme

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots$$

s'appelle *série orthogonale de la fonction* $f(x)$ *par rapport au système* Φ si l'on a

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx \qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots$$

Soit $f(x)$ une fonction telle que $\int_a^b |f(x)|\,dx \neq 0$. Banach a construit d'une façon ingénieuse un système orthogonal Φ complet dans l'ensemble des fonctions à carré sommable et par rapport auquel la série orthogonale de $f(x)$ a tous les coefficients a_n nuls [8]. En s'appuyant sur l'un de ses théorèmes concernant les suites d'opérations linéaires, il en a déduit l'existence de fonctions sommables dont les séries orthogonales par rapport à ce système divergent dans un ensemble de mesure positive [17]. Plus tard, en appliquant une méthode tout à fait différente, il est parvenu dans l'un de ses derniers travaux (publié déjà pendant la guerre) aux résultats sur la divergence beaucoup plus avancés. Il a démontré notamment un théorème très général qui entraîne en particulier, pour toute fonction continue $f(x)$ non identiquement nulle, l'existence d'un système orthogonal Φ tel que la série orthogonale de $f(x)$ par rapport à lui est presque partout divergente [52].

Les séries orthogonales de la forme $a_1\varphi_{n_1}(x)+a_2\varphi_{n_2}(x)+\dots$ présentent diverses singularités lorsque les suites d'indices $n_1, n_2, \dots$ sont suffisamment „raréfiées". Ce sont précisément les séries *lacunaires*, auxquelles Banach a appliqué, entre autres, ses méthodes opératives. Sous l'hypothèse que les fonctions $\varphi_n(x)$ sont bornées dans leur ensemble, il a montré par exemple (voir [43]) que, *pour des suites $n_1, n_2, \dots$ convenablement choisies, la condition $a_{n_1}^2+a_{n_2}^2+\dots<+\infty$ entraîne la convergence en moyenne de la série orthogonale lacunaire avec un exposant aussi élevé qu'on le veut.*

On ne peut pas juger les facultés créatrices de Banach que d'après ses travaux publiés. C'était un talent mathématique de grande taille qui, entraîné par un besoin interne, travaillait sans cesse, même pendant la maladie mortelle. Il n'attachait pas beaucoup d'importance à la prompte publication de ses résultats, toujours plein de nouvelles idées, toujours modifiant la direction de ses pensées et les problèmes qui l'intéressaient.

J'espère qu'on pourra reconstruire, à l'aide des notes qu'il a laissées, un certain nombre de ses résultats connus à ses collaborateurs intimes grâce aux entretiens personnels avec lui. L'année prochaine, l'édition des „Studia Mathématica" sera reprise. La tradition de Banach et de son école va être continuée. Ce sera alors le devoir — sinon le besoin de coeur — de ses disciples rescapés aux calamités de la guerre, que de publier l'héritage scientifique de leur maître.