— et H. Steinhaus, *Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier,* Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Série A, 1918, p. 87-96.*

C'est la première publication de Banach, parue lorsqu'il était encore étudiant. Deux ans plus tôt, Hahn publia (voir Hahn [1]) un travail dans lequel il établit, entre autres, l'existence d'une fonction intégrable dont la série de Fourier ne converge pas vers elle dans la métrique de l'espace L^1. Ce résultat mit en évidence la différence essentielle entre la façon dont se comportent les séries de Fourier dans l'espace L^1 et celle dont elles se comportent dans les espaces L^p où $p>1$, vu le théorème de Riesz et Fischer pour $p=2$ et les théorèmes analogues pour d'autres $p>1$ (voir Zygmund [6], volume I, p. 266). Le résultat de Hahn fut inconnu à Banach et Steinhaus dans des conditions d'alors (c'était le temps de la première guerre mondiale); or le théorème qu'ils démontrèrent dans leur travail va plus loin: ils y construisirent une fonction intégrable au sens de Lebesgue et dont la série de Fourier converge vers elle presque partout sans être convergente dans L^1. Il résulte donc du théorème classique de Banach et Steinhaus (voir [*19*]) que l'ensemble des fonctions dont les séries de Fourier divergent dans L^1 est résiduel dans cet espace. Ici, ces auteurs construisirent aussi un exemple de fonction qui n'est pas à carré intégrable, mais dont la série de Fourier est convergente dans L^1. On y trouve en outre des conséquences se rapportant à d'autres problèmes de ce genre, à savoir un exemple de deux fonctions, $f\in L^1$ et g bornée, pour lesquelles l'égalité de Parseval concernant l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$$

est en défaut (un pareil exemple est contenu également dans le travail précité de Hahn) et une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité

* Voir p. 31

de Parseval soit satisfaite par une fonction $f \in L^1$ quelconque lorsque la fonction bornée g est fixée d'avance.

Les recherches proches de celles du travail commenté concernaient la divergence d'intégrales singulières, en particulier liées à des systèmes orthogonaux. Les travaux sur les suites d'opérations linéaires, comme l'ouvrage classique de Banach et Steinhaus [*19*] et celui de Banach [*17*], peuvent être regardés comme des généralisations des mêmes idées.

Z. Zahorski

Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales, Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Série A, 1919, p. 66-72*.

Ce travail contient une généralisation de la propriété élémentaire du système trigonométrique, à savoir que la moyenne arithmétique de n premières fonctions du système (dans leur ordre naturel) tend à 0 partout sauf aux points $2k\pi$ où $k = 0, 1, 2, \ldots$ lorsque n croît à ∞. Banach établit un théorème analogue pour une suite arbitraire de fonctions d'une variable, orthogonale et normée dans un segment $a \leqslant x \leqslant b$; d'après une remarque de Steinhaus, citée dans ce travail, l'hypothèse que le système est complet n'est pas nécessaire. Les fonctions en question étant supposées arbitraires, ce théorème de Banach n'affirme évidemment que la convergence des moyennes vers 0 presque partout; on peut parvenir à la convergence vers 0 partout par une modification des fonctions qui n'est pas essentielle (dans un ensemble de mesure nulle).

Le résultat est bien plus profond que la propriété mentionnée du système trigonométrique et s'appuie sur le théorème de Hobson d'après lequel les fonctions φ_n formant un système orthonormal et la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon} a_n^2$ étant convergente pour un $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ converge presque partout. Banach n'a pas remarqué que son théorème se laisse déduire de celui de Hobson d'une manière plus simple en appliquant le théorème de Kronecker d'après lequel la série

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varphi_n(x)$$

* Voir p. 40.