de Parseval soit satisfaite par une fonction $f \in L^1$ quelconque lorsque la fonction bornée g est fixée d'avance.

Les recherches proches de celles du travail commenté concernaient la divergence d'intégrales singulières, en particulier liées à des systèmes orthogonaux. Les travaux sur les suites d'opérations linéaires, comme l'ouvrage classique de Banach et Steinhaus [*19*] et celui de Banach [*17*], peuvent être regardés comme des généralisations des mêmes idées.

Z. Zahorski

Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales, Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Série A, 1919, p. 66-72*.

Ce travail contient une généralisation de la propriété élémentaire du système trigonométrique, à savoir que la moyenne arithmétique de n premières fonctions du système (dans leur ordre naturel) tend à 0 partout sauf aux points $2k\pi$ où $k = 0, 1, 2, \ldots$ lorsque n croît à ∞. Banach établit un théorème analogue pour une suite arbitraire de fonctions d'une variable, orthogonale et normée dans un segment $a \leqslant x \leqslant b$; d'après une remarque de Steinhaus, citée dans ce travail, l'hypothèse que le système est complet n'est pas nécessaire. Les fonctions en question étant supposées arbitraires, ce théorème de Banach n'affirme évidemment que la convergence des moyennes vers 0 presque partout; on peut parvenir à la convergence vers 0 partout par une modification des fonctions qui n'est pas essentielle (dans un ensemble de mesure nulle).

Le résultat est bien plus profond que la propriété mentionnée du système trigonométrique et s'appuie sur le théorème de Hobson d'après lequel les fonctions φ_n formant un système orthonormal et la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon} a_n^2$ étant convergente pour un $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ converge presque partout. Banach n'a pas remarqué que son théorème se laisse déduire de celui de Hobson d'une manière plus simple en appliquant le théorème de Kronecker d'après lequel la série

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varphi_n(x)$$

---

* Voir p. 40.

convergeant presque partout (par suite de la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+0,1}$), on a

$$\frac{1\cdot\frac{1}{1}\varphi_1(x)+2\cdot\frac{1}{2}\varphi_2(x)+\ldots+n\cdot\frac{1}{n}\varphi_n(x)}{n}\to 0 \text{ presque partout.}$$

Plus tard, le théorème de Hobson fut généralisé: Rademacher démontra que le facteur n^{ε} peut y être remplacé par $\log^2 n$, facteur qui, comme le prouva Menchoff (voir Menchoff [1]), ne se laisse pas, en général, réduire davantage car quelle que soit la suite $w(n)$ pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w(n)}{\log^2 n}=0,$$

il existe un système orthonormal de fonctions $\varphi_n(x)$ bornées dans leur ensemble et telles qu'une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ diverge presque partout, tandis que la série $\sum_{n=1}^{\infty} w(n)a_n^2$ est convergente.

L'application du théorème de Rademacher au lieu de celui de Hobson permet d'améliorer le résultat de Banach en remplaçant $1/n$ dans (*) par exemple par $n^{1/2}(\log n^{3/2+\varepsilon})$ (voir Kaczmarz et Steinhaus [1], p. 165). En particulier, lorsqu'on prend pour les fonctions $\varphi_n(x)$ celles de Rademacher, le théorème de Banach a pour conséquence celui de Borel sur la répartition des signes: sauf dans un ensemble de mesure nulle, la densité des chiffres 0 et 1 est la même dans le développement binaire d'un nombre réel quelconque. L'interprétation probabiliste de ce résultat donne le théorème de Cantelli: le gain moyen au jeu de pile ou face après n parties (les probabilités étant supposées constantes, égales à $\frac{1}{2}$ et indépendantes) tend à 0 avec la probabilité 1 lorsque n tend à ∞.

D'ailleurs, le théorème de Borel, celui de Cantelli et le cas particulier de celui de Banach pour le système de Rademacher sont équivalents (voir Kaczmarz et Steinhaus [1], p. 129).

Plus récemment, les généralisations du théorème en question de Banach furent appliquées dans la théorie des méthodes de limitation (voir Zeller [1]).

Des résultats analogues à ceux qui viennent d'être discutés peuvent être déduits également par un choix convenable des coefficients de la série et par l'application subséquente du théorème de Kronecker en s'appuyant sur le résultat de Zygmund (voir Zygmund [1]) concernant la convergence presque partout de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n[\delta_n^{(r)}(x)-\delta_{n-1}^{(r)}(x)]^2$$

où $\delta_n^{(r)}$ sont les moyennes de Cesàro d'ordre $r > \frac{1}{2}$ des sommes partielles d'une série orthogonale d'une fonction quelconque à carré intégrable, résultat qui n'est pas en rapport direct avec le théorème de Banach.

Z. Zahorski

Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$, Fundamenta Mathematicae 1 (1920), p. 123 et 124*.

Les fonctions réelles définies pour tout x réel et qui satisfont à l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \tag{1}$$

portent d'ordinaire le nom de *fonctions additives*. Cauchy montra déjà en 1821 (voir Cauchy [1]) que toute fonction additive satisfait à l'équation

$$f(rx) = rf(x) \tag{2}$$

pour tout x réel et tout r rationnel. En y ajoutant la continuité de f, il en résulte aussitôt que cette fonction est linéaire:

$$f(x) = xf(1).$$

Remarquons que (1) et (2) entraînent pour toute fonction f additive l'égalité

$$f\Big(\sum_{k=1}^{N} r_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{N} r_k f(x_k) \tag{3}$$

où N est fini et r_k est un nombre rationnel arbitraire. La question s'impose s'il existe des fonctions additives qui ne sont pas linéaires. Hamel s'occupa de cette question dans son travail [1] où il démontra (d'ailleurs par des moyens non effectifs, à savoir en admettant la possibilité de bien ordonner le continu numérique) l'existence de telles fonctions et établit une méthode pour les construire. Cette méthode consistait à construire d'abord une base de nombres réels (dite dès lors *base de Hamel*), c'est-à-dire un ensemble de ces nombres tel que tout x réel puisse être représenté d'une façon univoque sous la forme d'une somme finie

$$x = \sum_{k=1}^{N} r_k x_k \tag{4}$$

* Voir p. 47.