où $\delta_n^{(r)}$ sont les moyennes de Cesàro d'ordre $r > \frac{1}{2}$ des sommes partielles d'une série orthogonale d'une fonction quelconque à carré intégrable, résultat qui n'est pas en rapport direct avec le théorème de Banach.

Z. Zahorski

Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$, Fundamenta Mathematicae 1 (1920), p. 123 et 124*.

Les fonctions réelles définies pour tout x réel et qui satisfont à l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \tag{1}$$

portent d'ordinaire le nom de *fonctions additives*. Cauchy montra déjà en 1821 (voir Cauchy [1]) que toute fonction additive satisfait à l'équation

$$f(rx) = rf(x) \tag{2}$$

pour tout x réel et tout r rationnel. En y ajoutant la continuité de f, il en résulte aussitôt que cette fonction est linéaire:

$$f(x) = xf(1).$$

Remarquons que (1) et (2) entraînent pour toute fonction f additive l'égalité

$$f\Big(\sum_{k=1}^{N} r_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{N} r_k f(x_k) \tag{3}$$

où N est fini et r_k est un nombre rationnel arbitraire. La question s'impose s'il existe des fonctions additives qui ne sont pas linéaires. Hamel s'occupa de cette question dans son travail [1] où il démontra (d'ailleurs par des moyens non effectifs, à savoir en admettant la possibilité de bien ordonner le continu numérique) l'existence de telles fonctions et établit une méthode pour les construire. Cette méthode consistait à construire d'abord une base de nombres réels (dite dès lors *base de Hamel*), c'est-à-dire un ensemble de ces nombres tel que tout x réel puisse être représenté d'une façon univoque sous la forme d'une somme finie

$$x = \sum_{k=1}^{N} r_k x_k \tag{4}$$

---

* Voir p. 47.

où r_k sont rationnels et x_k appartiennent à cette base. Alors, en se donnant arbitrairement une fonction $f(x)$ définie pour les x de la base de Hamel et en prolongeant cette fonction à l'aide de (3) et (4) à tous les autres x réels, la fonction ainsi formée résulte additive. On obtient par cette voie toutes les fonctions additives et il est clair qu'il y a parmi elles des fonctions non-linéaires.

Les fonctions additives continues étant nécessairement linéaires, il était naturel de continuer l'étude des fonctions additives en vue de trouver des conditions aussi faibles que possibles qui suffiraient pour conclure, en leur assujettissant une fonction additive, qu'elle est continue (ou — ce qui revient au même — linéaire). En d'autres mots, il s'agissait d'étudier les propriétés pathologiques des fonctions additives discontinues. Certaines investigations sur les fondements de la mécanique (essais de bien fonder la loi du parallélogramme des forces; voir Voss [1]) contribuèrent également à déclencher ces recherches. En voici les principaux résultats: chacune des cinq conditions qui suivent suffit pour la continuité d'une fonction additive.

(a) Que cette fonction soit bornée, ne fût-ce que dans un intervalle et ne fût-ce que d'un côté (Darboux [1]).

(b) Qu'elle n'ait, ne fût-ce que dans un intervalle, aucune valeur appartenant à un certain intervalle (Hamel [1], où ce résultat a la forme de constatation que le diagramme d'une fonction additive discontinue est dense dans le plan).

(c) Qu'elle soit mesurable L (Fréchet [1], Banach [*3*], Sierpiński [1], Kac [1], Alexiewicz et Orlicz [1]).

(d) Qu'elle ait une majorante mesurable L (Sierpiński [2]).

(e) Qu'elle n'ait, ne fût-ce que dans un ensemble de mesure positive, aucune valeur appartenant à un certain intervalle (Ostrowski [1], Kestelman [1]).

Les implications entre les conditions (a)-(e) se laissent représenter par le schéma

$$\begin{matrix} (a) \rightarrow (b) \searrow & \\ & (e). \\ (c) \rightarrow (d) \nearrow & \end{matrix}$$

Suffisantes sont aussi les conditions que deviennent (c) et (d) en y remplaçant la mesurabilité par la propriété de Baire (Sierpiński [2], Braun, Kuratowski et Szpilrajn [1], p. 240).

On peut considérer comme appartenant au même ordre d'idées les travaux de Jones [1] et [2] consacrés à l'étude des diagrammes de fonctions additives discontinues au point de vue de leur connexité.

Si l'équation (1) est satisfaite sauf au plus pour un ensemble de couples (x, y) de mesure (plane) nulle et la fonction f est mesurable, elle coïncide presque partout avec une fonction linéaire (voir par exemple Jensen [1]). Si l'équation (1) est satisfaite sauf au plus pour un ensemble de couples (x, y) dans lesquels x ou y appartient à un ensemble de mesure (linéaire) nulle, cette équation est satisfaite partout (voir Hartman [1]). Si enfin l'équation (1) est satisfaite sauf au plus pour un ensemble de couples (x, y) de mesure (plane) nulle, la fonction f coïncide presque partout avec une fonction satisfaisant partout à cette équation (voir de Bruijn [1]). C'est la solution d'un problème de P. Erdös.

Le travail de Banach commenté ici eut pour son but la démonstration de la suffisance de (c). Comme le montre la bibliographie des travaux précités, les démonstrations de la suffisance de cette condition furent données également par d'autres auteurs et à des époques différentes. La brève et élégante démonstration de Banach utilise le théorème de Lusin sur les fonctions mesurables d'après lequel il existe, pour toute fonction mesurable, une fonction continue qui coïncide avec elle sauf dans un ensemble de points de mesure aussi petite que l'on veut.

Notons encore une généralisation des fonctions additives due à Jensen. Il appela *convexes* les fonctions f définies dans un intervalle ouvert quelconque et assujetties à la relation

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{5}$$

Il montra que toute fonction continue et convexe dans ce sens est convexe au sens ordinaire, c'est-à-dire que tout arc de son diagramme se trouve au-dessous de la corde tendue sur cet arc (voir Jensen [1], p. 180). Or toute fonction additive discontinue est convexe au sens de Jensen sans l'être au sens ordinaire.

Tout comme dans le cas de fonctions additives, on peut demander dans celui de fonctions assujetties à la condition (5) quelles sont les conditions qui en assurent la continuité, donc aussi la convexité au sens ordinaire. On en trouva plusieurs (en général les mêmes que pour les fonctions additives) qui, au fur et à mesure des progrès dans les recherches, furent de plus en plus affaiblies. Sans en citer ici toute la bibliographie du sujet, mentionnons les travaux d'Ostrowski [1] et [2] qui contiennent des résultats généraux embrassant d'autres, connus antérieurement.

Remarquons enfin que les problèmes de l'étude des fonctions additives se transmettent aux espaces abstraits (voir le livre de Banach [*38*], p. 23, 54 et 78).

H. Fast