Sur les ensembles de points où la dérivée est infinie*

M. Lusin a démontré que l'ensemble de points où la dérivée d'une fonction continue $f(x)$ est $+\infty$ est de mesure nulle [1]. M. Ruziewicz m'a communiqué une idée comment on pourrait démontrer ce théorème pour toute fonction d'une variable réelle (mesurable ou non). Le but de cette Note est de démontrer un théorème, un peu plus général, que voici:

L'ensemble de points x, où la dérivée à droite $f'_+(x) = +\infty$, est de mesure nulle pour toute fonction $f(x)$ d'une variable réelle.

Soit $f(x)$ une fonction donnée d'une variable réelle. Désignons par E l'ensemble de points x où la dérivée à droite, $f'_+(x)$, est $= +\infty$. Pour tout point x de E existe évidemment un nombre positif δ_x tel que pour tout nombre ξ intérieur à l'intervalle $(x, x-\delta_x)$ subsiste l'inégalité

$$(1) \qquad f(x) < f(\xi).$$

Désignons par E_n l'ensemble de ces points de E pour lesquels existe un nombre $\delta_n > 1/n$ tel que l'inégalité $x < \xi < x+\delta_x$ entraîne l'inégalité (1). (L'ensemble E_n est évidemment toujours contenu dans E_{n+1} et nous avons $E = E_1+E_2+E_3+\ldots$).

Si chacun des ensembles E_n avait une mesure nulle, notre théorème serait démontré. Admettons donc que l'ensemble E_k ne jouit pas de cette propriété (c'est-à-dire a une mesure positive ou bien est non mesurable). Dans ce cas il existe évidemment un intervalle $\Delta = (a, b)$ de longueur $< 1/k$ tel que l'ensemble ΔE_k (la portion de E_k contenue dans Δ) n'est pas de mesure nulle.

Soient x_1 et $x_2 > x_1$ deux points de l'ensemble ΔE_k. D'après la définition de l'ensemble E_k et la propriété de l'intervalle Δ, nous concluons que l'inégalité (1) subsiste pour $x = x_1$ et $\xi = x_2$, ce qui donne

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Il en résulte que la fonction $f(x)$ est croissante dans l'ensemble ΔE_k.

---

* Commenté sur p. 317.

(1) Comptes Rendus 154 (1912), p. 1688; Recueil de la Société Mathématique de Moscou (Matiematitschesky Sbornik) 28 (en russe). Cf. G.-C. Young, Comptes rendus 162 (1916), p. 909.

Définissons maintenant dans l'intervalle $\Delta = (a, b)$ la fonction $\varphi(x)$ comme borne supérieure de tous les nombres $f(\xi)$ pour $a \leqslant \xi \leqslant x$; $\varphi(x)$ sera évidemment une fonction non décroissante dans (a, b), donc aura, comme l'on sait, presque partout une dérivée finie. L'ensemble $\mathscr{N}$, où la fonction $\varphi(x)$ ne possède pas de dérivée finie, est donc de mesure nulle.

On voit sans peine que pour tout point x de l'ensemble ΔE_k qui est limite d'une suite décroissante de points de cet ensemble, nous avons $\overline{\varphi'_+}(x) = +\infty$ (puisque $f'_+(x) = +\infty$ et $\varphi(t) = f(t)$ dans ΔE_k). Il en résulte que l'ensemble ΔE_k, sauf peut-être un nombre fini ou une infinité dénombrable de points (qui ne sont pas points d'accumulation de droite de ΔE_k) est contenu dans l'ensemble $\mathscr{N}$. Par conséquent ΔE_k est de mesure nulle, ce qui implique une contradiction. Notre théorème est ainsi démontré.