Sur le théorème de M. Vitali*

Cette Note est consacrée à une question posée par M. Carathéodory [1] et concernant le théorème connu de M. Vitali [2] sur le recouvrement des ensembles plans. Voici le théorème:

Soit E un ensemble plan quelconque mais borné et contenu dans un ensemble ouvert et borné Ω; supposons qu'à tout point P de E correspond une suite infinie $\{W_i(P)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ des ensembles fermés $W_i(P)$ contenus dans Ω et remplissant les hypothèses suivantes:

(1) $W_i(P)$ est situé dans un cercle $K_i(P)$ dont P est le centre,

(2) $\lim\limits_{i\to\infty} |K_i(P)| = 0$.

(La notation $|X|$ signifie ici — et dans tout ce qui suit — la mesure lebesguienne de X, si X est mesurable (L).)

(3) il existe un nombre positif a tel que l'inégalité

$$\frac{|W_i(P)|}{|K_i(P)|} > a$$

a lieu pour tout i naturel et pour tout P de E;

alors il existe une suite finie ou infinie $\{P_n\}$ des points appartenant à E et une suite des nombres naturels $\{a_n\}$, telles que les ensembles $W_{a_n}(P_n)$ — désignés plus simplement par Z_n — aient les proprietés

(Π_1) que leur somme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ recouvre *presque tout* l'ensemble E,

(Π_2) $Z_p Z_q = 0$ pour $p \neq q$.

La propriété (Π_1) exprime donc que l'ensemble composé de ces points de E qui sont étrangers à tous les Z_n est de mesure lebesguienne nulle, tandis que (Π_2) enseigne que les Z_n n'ont pas des points communs deux à deux.

---

* Commenté sur p. 323.

(1) *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Teubner 1918), p. 304.

(2) Cf. p. ex. l. c. p. 299-307.

Le théorème subsiste si l'on prend pour $K_i(P)$ des *carrés*, ayant P pour centre. Il est aussi aisé à démontrer que la condition (3) est essentielle. M. Carathéodory demande, si le théorème reste exact, quand on supprime la condition (3), en la remplaçant par une nouvelle restriction, à savoir que les $W_i(P)$ sont rectangles concentriques avec P?

Cette note donne au § 2 une réponse négative à la question ci-dessus; le § 1 contient une démonstration simple du théorème de M. Vitali.

§ 1. Le théorème de M. Vitali

Nous conservons les notations de l'Introduction.

Les suites $\{a_n\}, \{P_n\}$ seront définies par récurrence comme il suit.

Soit a_1 un nombre naturel et P_1 un point de E, tels que l'on ait

$$\frac{|W_i(P)|}{|W_{a_1}(P_1)|} < \frac{3}{2}$$

quels que soient le point P de E et l'indice i (en désignant par M_1 la borne supérieure de $W_i(P)$ pour tous les P de E et tous les i naturels, il suffit de choisir a_1, P_1 satisfaisant à l'inégalité $M_1/|W_{a_1}(P_1)| < 3/2$).

a_j, P_j étant définis pour $j \leqslant n-1$, on choisit a_n, P_n conformément aux conditions suivantes:

(I) $W_{a_n}(P_n) \sum_{j=1}^{n-1} W_{a_j}(P_j) = 0$,

(II) pour tout i naturel et tout P de E la relation

$$W_j(P) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} W_{a_j}(P_j) = 0$$

implique

$$\frac{|W_i(P)|}{|W_{a_n}(P_n)|} < \frac{2}{3}.$$

Si la condition (I) est possible à remplir, on peut évidemment remplir (II) en se servant d'un nombre M_n égal à la borne supérieure de $|W_i(P)|$ pour les i, P obéissant à la relation qui intervient en (II) — et en procédant comme pour $n = 1$. Supposons donc que (I) est impossible pour un certain n, étant possible pour les indices $< n$. L'ensemble fermé $\sum_{j=1}^{n-1} W_{a_j}(P_j)$ aurait alors des points en commun avec tous les $W_i(P)$ et à fortiori avec tous les $K_i(P)$, quel que soit le point P de E et l'indice i. Or, pour $i \to \infty$ le rayon du cercle $K_i(P)$ tend vers zéro d'après (2): le point P — qui est le centre du cercle — est donc un point d'accumulation de l'ensemble fermé $\sum_{j=1}^{n-1} W_{a_j}(P)$, donc un point de cet ensemble. En ce cas le théorème de Vitali serait démontré puisque $\sum_{j=1}^{n-1} W_{a_j}(P_j)$ couvrirait E, et, comme n est le plus petit indice qui rend (I) impossible, les $W_{a_j}(P_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, \ldots, n-1)$ n'auraient pas des points communs deux à deux.

Admettons donc que les suites $\{a_n\}$ et $\{P_n\}$ sont infinies. Il est évident que (I) implique (Π_2). Nous allons démontrer que les $Z_n = W_{a_n}(P_n)$ jouissent aussi de la propriété (Π_1).

Désignons par R_n le cercle concentrique avec $K_{a_n}(P_n)$ et tel que

$$R_n = \left(\sqrt{\frac{3}{2\alpha}} + 1\right)^2 K_{a_n}(P_n).$$

Écrivons, par définition

$$B_n = \sum_{j=1}^{n-1} Z_j + \sum_{j=n}^{\infty} R_j;$$

nous allons établir que B_n contient tous les points P de E. Supposons que le point P_0 de E n'appartient pas à B_n. La distance de P_0 à l'ensemble fermé $\sum_{j=1}^{n-1} Z_j$ étant alors positive, il existe un nombre naturel r, tel que

(a) $$W_r(P_0) \sum_{j=1}^{n-1} Z_j = 0;$$

cette relation implique, d'après (II), que

(b) $$|W_r(P_0)| < \tfrac{3}{2}|Z_n|;$$

or, (Π_2) ayant lieu et Ω étant borné, Z_n tend vers zéro avec $1/n$; d'autre part $|W_r(P_0)| > 0$, d'après (3); il faut donc que (b) et, d'après (II), aussi (a) cessent d'être vraies quand on remplace n par un nombre assez grand. Soit donc $s \geqslant n$ un tel indice que

$$W_r(P_0) \sum_{j=1}^{s-1} Z_j = 0, \qquad W_r(P_0) \sum_{j=1}^{s} Z_j \neq 0,$$

ce qui implique

(c) $$W_r(P_0) Z_s \neq 0$$

et (d'après (II))

(d) $$|W_r(P_0)| < \tfrac{3}{2}|Z_s|.$$

Nous savons que

$$\frac{|W_r(P_0)|}{|K_r(P_0)|} > \alpha, \qquad Z_s \leqslant |K_{a_s}(P_s)|$$

(d'après (1)), ce qui donne, moyennant (d),

$$\text{(e)} \qquad |K_r(P_0)| < \frac{3}{2\alpha} |K_{a_s}(P_s)|;$$

or, (c) fournit

$$\text{(f)} \qquad K_r(P_0) K_{a_s}(P_s) \neq 0.$$

Tenant compte de la définition de R_s, on déduit de (e) et (f) par la géométrie élémentaire que P_0 appartient à R_s, donc à B_n, puisque $s \geqslant n$. B_n recouvre donc tout point P de E; il s'ensuit que $\sum_{j=1}^{n-1} Z_j$ recouvre tous les points P de E à l'exception des certains points dont l'ensemble est de mesure

$$< \sum_{j=n}^{\infty} |R_j| = \left(\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}+1\right)^2 \sum_{j=n}^{\infty} |K_{a_j}(P_j)| < \left(\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}+1\right)^2 \frac{1}{\alpha} \sum_{j=n}^{\infty} |Z_j|,$$

tendant vers 0 pour $n \to \infty$, car la série $\sum_{j=1}^{\infty} |Z_j|$ converge, en vertu de (Π_2). $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ recouvre donc presque tout l'ensemble E, c. q. f. d.

§ 2. La question de M. Carathéodory

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Il existe un ensemble plan F de mesure lebesguienne égale à l'unité, contenu dans un carré Ω, tout point P de F étant le centre rectangles $T_i(P)$ (constituant une suite infinie $\{T_i\}_{i=1,2,\dots}$ correspondante à P) contenus dans Ω et remplissant les conditions suivantes: $T_i(P)$ est situé dans un cercle $S_i(P)$ dont P est le centre et

$$\lim_{i\to\infty} |S_i(P)| = 0;$$

quelque soit la suite $\{P_n\}$ des points de F et la suite des nombres naturels $\{a_n\}$ — pourvu que l'on ait $T_{a_z}(P_z) T_{a_s}(P_s) = 0$ pour $z \neq s$ — on aura

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T_{a_n}(P_n)| \leqslant \frac{1}{2} F = \frac{1}{2}.$$

Ce théorème résout négativement la question de M. Carathéodory formulée à l'Introduction.

Démonstration. Soit $\{\beta_m\}$ une suite à termes positifs, telle que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m+1}$$

converge vers la somme $\frac{1}{8}$ (1). Soit Ω un carré d'aire unité aux côtés parallèles aux axes xOy; à tout point P intérieur à Ω et à tout couple des nombres naturels (i, m) nous faisons correspondre un ensemble fermé $W_i(P, m)$ comme il suit: nous menons par P des axes ξ, η parallèles à x, y et désignons par $W_i(P, m)$ l'ensemble des points (ξ, η) satisfaisant simultanément aux inégalités:

$$\xi\eta \leqslant e^{-\beta_m} \cdot \frac{1}{i^2}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{i}, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant \frac{1}{i}.$$

En désignant par $K_i(P)$ le cercle dont le centre est P et le rayon $2\sqrt{2}/i$ nous déduisons:

($\bar{1}$) $W_i(P, m)$ est situé dans $K_i(P)$ quel que soit m;

($\bar{2}$) $\lim\limits_{i\to\infty} |K_i(P)| = 0$;

($\bar{3}$) $\dfrac{|W_i(P, m)|}{|K_i(P)|} = \dfrac{1}{8\pi} e^{-\beta_m}(\beta_m+1) > 0$.

Il s'ensuit que pour un m invariable le théorème de Vitali s'applique; nous pouvons donc trouver une suite des points $\{P_n^m\}$ et des indices $\{a_n^m\}$, telles qu'en écrivant Z_n^m au lieu de $W_{a_n^m}(P_n^m, m)$, on ait:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n^m$ recouvre presque tout l'ensemble E consistant, par définition, de tous les points intérieurs à Ω.

2) $Z_p^m \cdot Z_q^m \neq 0$ pour $p \neq q$.

Lorsqu'on remarque que l'on peut — pour tout P de E — ne conserver dans les suites $\{K_i\}$ que les K_i d'indices assez élevés pour que K_i soit intérieur à Ω, on voit que le choix des indices a_n^m peut se faire de manière que l'on ait:

3) $K_{a_n^m}(P_n^m)$ et par là Z_n^m appartient à l'intérieur de Ω.

4) $a_n^m > m$.

Définissons F comme $\prod\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n^m$; 1) et 3) donnent $F = 1$; à tout point P de F il correspond une suite des indices $\{r_m(P)\}_{m=1,2,\dots}$ telle que P appartient à tous les ensembles

$$Z_{r_m(P)}^m \equiv W_{a_{r_m(P)}^m}(P_{r_m(P)}^m, m).$$

(1) p. ex. $\beta_m = 2^{m+3}-1$.

Soit $T_m(P)$ le rectangle aux côtés parallèles aux axes xy dont P est le centre et $P^m_{r_m(P)}$ un des sommets; ce rectangle est intérieur au cercle $K_{a^m_{r_m(P)}}(P)$, car le rayon de ce cercle est la double diagonale du carré $0 \leqslant \xi \leqslant 1/i, 0 \leqslant \eta \leqslant 1/i$, qui contient P et $P_{r_m(P)}$ $[i = a^m_{r_m(P)}]$. En appellant ce cercle $S_m(P)$, on pourra écrire

$$\lim_{m\to\infty} |S_m(P)| = 0;$$

en effet, 4) fournit $|K_i| < 8\pi/m^2$ pour $i = a^m_{r_m(P)}$.

L'aire de $T_m(P)$ est le produit quadruple de coordonnées ξ, η de $P^m_{r_m(P)}$; or P appartient à $Z^m_{r_m(P)}$, donc ce produit ne surpasse pas $e^{-\beta_m} \dfrac{1}{(a^m_{r_m(P)})^2}$. Il s'ensuit que

$$5) \quad \frac{|T_m(P)|}{|Z^m_{r_m(P)}|} \leqslant \frac{4e^{-\beta_m}}{(a^m_{r_m(P)})^2} : \frac{e^{-\beta_m}(\beta_m+1)}{(a^m_{r_m(P)})^2} = \frac{4}{\beta_m+1}.$$

Considérons une suite $\{P_n\}$ de points de F telle que — pour un m fixé d'avance — on ait, pour $z \neq s$, $T_m(P_z) T_m(P_s) = 0$. (Il n'importe pas ici, si une telle suite existe.) Les points $P^m_{r_m(P_z)}$ et $P^m_{r_m(P_s)}$ ne coïncident pas alors pour $z \neq s$, car autrement les deux rectangles auraient un sommet commun, contrairement à ce qui a été supposé tout à l'heure; on aura donc $r_m(P_z) \neq r_m(P_s)$, ce qui entraîne avec 2).

6) $Z^m_{r_m(P_z)} \cdot Z^m_{r_m(P_s)} = 0$ pour $z \neq s$;

5) fournit

$$\sum_n |T_m(P_n)| \leqslant \frac{4}{\beta_m+1} \sum_n |Z^m_{r_m(P_n)}|$$

et ceci avec 3) et 6) implique

$$\sum_n |T_m(P_n)| \leqslant \frac{4}{\beta_m+1} |\Omega| = \frac{4}{\beta_m+1}.$$

Maintenant on voit déjà que pour une suite q u e l c o n q u e $\{P_n\}$ des points de F et une suite q u e l c o n q u e $\{a_n\}$ des indices la validité de la relation "$T_{a_z}(P_z) T_{a_s}(P_s) = 0$ pour $z \neq s$" entraîne

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T_{a_n}(P_n)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\beta_m+1} = \frac{1}{2}, \qquad \text{c. q. f.d.}$$