Un théorème sur les transformations biunivoques, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 236-239*.

Ce travail apporta des généralisations du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein concernant l'antisymétrie de la relation $\leqslant$ entre les nombres cardinaux. Des généralisations analogues se laissent établir pour les théorèmes sur les nombres cardinaux de la théorie des algèbres R. A. (voir Tarski [9], théorème 11.28) par une simple analyse des démonstrations. Il n'intervient dans ces généralisations qu'un nombre fini d'ensembles et de transformations; elles appartiennent ainsi à la théorie des congruences par décomposition finie (cf. ce volume, p. 325) et leurs démonstrations n'exigent pas d'axiome du choix. Autres théorèmes de l'arithmétique des nombres cardinaux, n'appartenant pas à la théorie des algèbres R. A., se prêtent également à des généralisations finitistes de ce genre (voir König [1], Kuratowski [1] et Tarski [9], théorème 16.9), mais ces généralisations exigent déjà des moyens non-effectifs, par exemple le théorème de Tychonoff sur la compacité des produits cartésiens d'espaces de Hausdorff compacts. Cependant, si l'on admet une infinité dénombrable d'ensembles et de transformations, c'est-à-dire si l'on fait la théorie des congruences par décompositions dénombrables, les théorèmes en question convenablement modifiés redeviennent effectifs (voir par exemple Kuratowski [1]) et toute l'arithmétique effective des nombres cardinaux, développée surtout par Tarski (dans ses travaux [6] et [9] arithmétique des algèbres cardinales et théorèmes p. 241-243; cf. aussi Sierpiński [28]) est susceptible à des généralisations de ce genre. Autres recherches généralisant les théorèmes 1 et 2 du travail commenté ou établissant des théorèmes analogues à eux sont à trouver dans les publications de Knaster [1], de Lindenbaum et Tarski [1] et de Tarski [1] et [2].

On étudia également la question (voir Hanf [1], Jónsson [1], Sąsiada [1], Sikorski [1] et Tarski [9] et [6]): dans quels cas est-il possible ou impossible de généraliser le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein et ses analogues pour l'arithmétique des produits cartésiens d'algèbres de Boole et de ceux de groupes abéliens?

Pour terminer, ajoutons les démonstrations, aujourd'hui presque immédiates, du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein dans ses formes T1-T3 les plus usuelles (cf. Reichbach [1]) et celle du théorème 1 du travail commenté.

T1. *Si $M \subset N \subset P$ et f est une transformation biunivoque de P en M, où $f(P) = M$, il existe un X tel que*

(1) $$X \subset M \quad et \quad f(N \setminus X) = M \setminus X.$$

---

* Voir p. 114.

On n'a en effet qu'à poser $X = f(P \setminus N) \cup ff(P \setminus N) \cup \ldots$ Les relations (1) sont alors manifestes.

T2. $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ *entraînent* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

Pour l'établir, il suffit de poser sous les hypothèses de T1

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x \in X, \\ f(x) & \text{pour} \quad x \in N \setminus X; \end{cases}$$

d'après (1), g est alors une transformation biunivoque de N en M.

T3. $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ *et* $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ *entraînent* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

On n'a en effet qu'à substituer $\mathfrak{m}$ à $\mathfrak{p}$ dans T2.

Enfin, pour démontrer le théorème 1 du travail commenté, définissons les décompositions

$$A = A_1 \cup A_2 \quad \text{et} \quad B = B_1 \cup B_2 \tag{2}$$

à l'aide de T1 et des formules

$$P = A, \quad N = \psi^{-1}(B), \quad M = \psi^{-1}\varphi(A), \quad f = \psi^{-1}\varphi,$$

$$A_1 = P \setminus (N \setminus X), \quad A_2 = N \setminus X, \quad B_1 = \psi(X), \quad B_2 = \psi(N \setminus X).$$

Les relations $A_1 \cap A_2 = 0 = B_1 \cap B_2$ et (2) sont alors manifestes. On a $\varphi(A_1) = B_1$, car $\psi^{-1}\varphi(A_1) = f\big(P \setminus (N \setminus X)\big) = f(P) \setminus f(N \setminus X) = M \setminus (M \setminus X) = X = \psi^{-1}(B_1)$; on a également $\psi(A_2) = B_2$, ce qui achève la démonstration.

Jan Mycielski

— et A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 244-277*.

Ce travail apporta la célèbre amélioration du résultat de Hausdorff (voir Hausdorff [2]), à savoir la décomposition paradoxale de la sphère, et maints autres théorèmes sur diverses relations d'équivalence entre les ensembles de points dont la plus importante est la relation $\underset{\mathrm{f}}{=}$ (voir définition 2). Les matières de ce travail furent reprises par plusieurs auteurs et développées par eux dans des directions fort variées.

* Voir p. 118.