On n'a en effet qu'à poser $X = f(P \setminus N) \cup ff(P \setminus N) \cup \ldots$ Les relations (1) sont alors manifestes.

T2. $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ *entraînent* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

Pour l'établir, il suffit de poser sous les hypothèses de T1

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x \in X, \\ f(x) & \text{pour} \quad x \in N \setminus X; \end{cases}$$

d'après (1), g est alors une transformation biunivoque de N en M.

T3. $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ *et* $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ *entraînent* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

On n'a en effet qu'à substituer $\mathfrak{m}$ à $\mathfrak{p}$ dans T2.

Enfin, pour démontrer le théorème 1 du travail commenté, définissons les décompositions

$$A = A_1 \cup A_2 \quad \text{et} \quad B = B_1 \cup B_2 \tag{2}$$

à l'aide de T1 et des formules

$$P = A, \quad N = \psi^{-1}(B), \quad M = \psi^{-1}\varphi(A), \quad f = \psi^{-1}\varphi,$$

$$A_1 = P \setminus (N \setminus X), \quad A_2 = N \setminus X, \quad B_1 = \psi(X), \quad B_2 = \psi(N \setminus X).$$

Les relations $A_1 \cap A_2 = 0 = B_1 \cap B_2$ et (2) sont alors manifestes. On a $\varphi(A_1) = B_1$, car $\psi^{-1}\varphi(A_1) = f\big(P \setminus (N \setminus X)\big) = f(P) \setminus f(N \setminus X) = M \setminus (M \setminus X) = X = \psi^{-1}(B_1)$; on a également $\psi(A_2) = B_2$, ce qui achève la démonstration.

Jan Mycielski

— et A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 244-277*.

Ce travail apporta la célèbre amélioration du résultat de Hausdorff (voir Hausdorff [2]), à savoir la décomposition paradoxale de la sphère, et maints autres théorèmes sur diverses relations d'équivalence entre les ensembles de points dont la plus importante est la relation $\underset{\mathrm{f}}{=}$ (voir définition 2). Les matières de ce travail furent reprises par plusieurs auteurs et développées par eux dans des directions fort variées.

---

* Voir p. 118.

Les travaux d'Adams [1], de Dekker [1] et [4], de Dekker et de Groot [1], de Mycielski [1], de Mycielski et Świerczkowski [1], de von Neumann [1], de Robinson [1] et de Sierpiński [15] et [16] furent consacrés à l'étude détaillée du phénomène de décompositions paradoxales des boules, des sphères, des espaces euclidiens, elliptiques et hyperboliques. Robinson démontra par exemple que la boule est congruente par décomposition en 5 parties disjointes au couple de deux boules disjointes de rayon égal au sien et que le nombre 5 est ici le plus petit possible. Sierpiński établit (voir Sierpiński [15]) un décomposition de la boule en $2^{\aleph_0}$ parties disjointes dont chacune lui est congruente par décomposition finie (voir aussi Mycielski [1], théorème (S_2)). Dans ces travaux, on établissait déjà des méthodes générales de décompositions de divers espaces en parties assujetties à un système de congruences arbitrairement donné. Le fond commun de tous ces phénomènes se révéla dans l'existence des groupes libres d'isométries sans point invariant dans les espaces considérés ou de celles satisfaisant à la condition de commutativité locale introduite par Dekker (voir [1] et [4]) et qui est plus faible (ce qui est essentiel par exemple dans le cas du groupe des rotations de la sphère S^2, toutes les rotations de cette sphère ayant des points invariants).

C'est de là que prirent naissance les problèmes d'existence des groupes libres d'isométries assujetties aux conditions mentionnées et, plus généralement, ceux d'existence des sous-groupes libres dans les groupes topologiques (remarquons que tout sous-groupe d'un groupe opère sur lui sans point invariant). Ces problèmes furent examinés assez complètement dans les publications de Balcerzyk et Mycielski [1], de Dekker [1], [3] et [4], de Mycielski et Świerczkowski [1] et de Sierpiński [15] (cf. aussi Balcerzyk et Mycielski [2] et Dekker [2]). Le premier progrès important dans cette série de publications fut apporté par le travail [15] de Sierpiński qui y démontra l'existence d'un groupe libre de rotations de la sphère S^2 de rang $2^{\aleph_0}$. Cette direction de la recherche paraît à l'heure actuelle presque épuisée, les problèmes restés ouverts ne concernant que les groupes des rotations des sphères S^4 et S^5 (voir Dekker [1], [3] et [4] et Mycielski [3]).

Les groupes libres localement commutatifs se montrèrent également constituer le fond d'un autre phénomène géométrique singulier, à savoir de celui des ensembles invariants par rapport aux modifications dénombrables (voir Mycielski [3]).

Autres phénomènes géométriques, semblables aux décompositions paradoxales de la sphère, furent l'objet des travaux de von Neumann [1] et de Sierpiński [19], [21] et [24]. Reste ouvert le problème de Marczewski sur l'existence des décompositions paradoxales de la sphère en parties ayant la propriété de Baire.

Les théorèmes 8-10 du travail commenté, qui concernent la relation $\underset{\mathrm{f}}{=}$, furent généralisés considérablement par Tarski dans sa monographie [9].

Ils appartiennent à l'arithmétique des algèbres R. A. qui y sont introduites par la définition 11.26 et le théorème 11.28. Par contre, les théorèmes 11 et 12 du travail commenté, qui appartiennent à la série de théorèmes étudiés par Kuratowski, König et Tarski (cf. Tarski [9], théorème 16.9), ne sont probablement pas susceptibles à une telle généralisation et en outre, par différence de ceux d'arithmétique R. A., leurs démonstrations semblent exiger des moyens non-effectifs (l'application du théorème de Tychonoff sur la compacité des produits cartésiens d'espaces de Hausdorff compacts). On examinait également la relation $\underset{n}{=}$ de la congruence par décomposition en n parties, qui est plus fine que la relation $\underset{\mathrm{f}}{=}$ (voir Lindenbaum [1], Lindenbaum et Tarski [1], Sierpiński [15], [16], [18] et [25]-[27]. Finalement, les théorèmes 8′-12′ du travail commenté, qui concernent la relation $\underset{\mathrm{d}}{=}$, furent aussi généralisés sensiblement par Tarski dans sa monographie [9] précitée. Il appartiennent à l'arithmétique des algèbres C. A. qui y est développée. Elle est presque effective et constitue également une généralisation de la théorie effective des nombres cardinaux. On ne connaît qu'un seul groupe de théorèmes concernant la relation $\underset{\mathrm{d}}{=}$ et un groupe analogue de théorèmes dans la théorie effective des nombres cardinaux (cf. Tarski [8], théorème 7) dont on ignore la possibilité ou l'impossibilité d'une pareille généralisation (cf. Tarski [4], p. 242 et 243). Quant à ce cycle de problèmes, voir aussi le commentaire au travail [*12*] de Banach, ce volume, p. 321. De même, les données bibliographiques sur les rapports entre les décompositions paradoxales et les problèmes de la mesure, ainsi que sur le degré de non-effectivité des théorèmes I et II qui précèdent le § 1 du travail commenté, sont à trouver dans le commentaire au travail de Banach [*9*], ce volume, p. 318.

Divers théorèmes, remarques et problèmes sur la congruence d'ensembles de points sont dus à Sierpiński (voir Sierpiński [18]-[20], [22] et [25]-[27]; voir aussi Lindenbaum [1], Lindenbaum et Tarski [1] et Mycielski [2]. Autres renseignements sont à trouver dans la plupart des travaux précités ici.

Jan Mycielski

Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), p. 225-236*.

Les résultats contenus dans ce travail jouèrent un rôle important dans l'étude des propriétés de courbes rectifiables, dans les tentatives

---

* Voir p. 149.