Ils appartiennent à l'arithmétique des algèbres R. A. qui y sont introduites par la définition 11.26 et le théorème 11.28. Par contre, les théorèmes 11 et 12 du travail commenté, qui appartiennent à la série de théorèmes étudiés par Kuratowski, König et Tarski (cf. Tarski [9], théorème 16.9), ne sont probablement pas susceptibles à une telle généralisation et en outre, par différence de ceux d'arithmétique R. A., leurs démonstrations semblent exiger des moyens non-effectifs (l'application du théorème de Tychonoff sur la compacité des produits cartésiens d'espaces de Hausdorff compacts). On examinait également la relation $\underset{n}{=}$ de la congruence par décomposition en n parties, qui est plus fine que la relation $\underset{\mathrm{f}}{=}$ (voir Lindenbaum [1], Lindenbaum et Tarski [1], Sierpiński [15], [16], [18] et [25]-[27]. Finalement, les théorèmes 8′-12′ du travail commenté, qui concernent la relation $\underset{\mathrm{d}}{=}$, furent aussi généralisés sensiblement par Tarski dans sa monographie [9] précitée. Il appartiennent à l'arithmétique des algèbres C. A. qui y est développée. Elle est presque effective et constitue également une généralisation de la théorie effective des nombres cardinaux. On ne connaît qu'un seul groupe de théorèmes concernant la relation $\underset{\mathrm{d}}{=}$ et un groupe analogue de théorèmes dans la théorie effective des nombres cardinaux (cf. Tarski [8], théorème 7) dont on ignore la possibilité ou l'impossibilité d'une pareille généralisation (cf. Tarski [4], p. 242 et 243). Quant à ce cycle de problèmes, voir aussi le commentaire au travail [*12*] de Banach, ce volume, p. 321. De même, les données bibliographiques sur les rapports entre les décompositions paradoxales et les problèmes de la mesure, ainsi que sur le degré de non-effectivité des théorèmes I et II qui précèdent le § 1 du travail commenté, sont à trouver dans le commentaire au travail de Banach [*9*], ce volume, p. 318.

Divers théorèmes, remarques et problèmes sur la congruence d'ensembles de points sont dus à Sierpiński (voir Sierpiński [18]-[20], [22] et [25]-[27]; voir aussi Lindenbaum [1], Lindenbaum et Tarski [1] et Mycielski [2]. Autres renseignements sont à trouver dans la plupart des travaux précités ici.

Jan Mycielski

Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), p. 225-236*.

Les résultats contenus dans ce travail jouèrent un rôle important dans l'étude des propriétés de courbes rectifiables, dans les tentatives

---

* Voir p. 149.

variées de définir l'aire de surface, dans la théorie des transformations continues et dans celle des fonctions absolument continues. Ils furent souvent cités et généralisés. Des renseignements détaillés à ce sujet sont à trouver dans les monographies de Radó [2], de lui et Reichelderfer [1], de Cesari [1] et de Saks [6].

La fonction $N(t)$ du § 1. Elle est dite dans la littérature ultérieure *fonction banachienne de multiplicité* („Banach multiplicity function") ou *indicatrice de Banach*. On en emploie plusieurs généralisations et modifications. Morey [1] et Cereteli [1] par exemple adoptèrent comme valeur de l'indicatrice non pas le nombre de points, mais celui de composantes (au sens de connexité) de la contre-image d'un point et Lozinskiĭ [1] définit la notion d'indicatrice aussi pour certaines fonctions discontinues. Banach lui-même généralisa au § 2 sa fonction de multiplicité $N(t)$ définie pour une seule variable à la fonction de multiplicité $N(u, v)$ d'une transformation continue de la forme $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Une modification en est la fonction essentielle de multiplicité („essential multiplicity function") de Radó [1] ayant pour valeur en tout point (u, v) le nombre de certaines composantes dites „essentielles" de la contre-image de ce point. D'autres fonctions de multiplicité sont envisagées dans la monographie précitée de Radó et Reichelderfer [1], p. 145-190 et 232-249.

Théorème 2 *du* § 1. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit à variation bornée, la sommabilité de la fonction $N(t)$ étant remplacée dans cette condition par la convergence d'une série, fut établie aussi un peu plus tard, mais indépendamment, par Vitali [1]. Comme le montra Lozinskiĭ [1], le théorème 2 en question subsiste pour les fonctions discontinues ayant en tout point les limites unilatérales lorsqu'on remplace la fonction $N(t)$ par une autre, plus générale.

Corollaire 1 *du* § 1. La propriété des fonctions exprimée dans la thèse de ce corollaire s'appelle *condition* (T_1) *de Banach*. Différentes propriétés des fonctions satisfaisant à cette condition furent établies dans le travail ultérieur [*18*] de Banach (voir dans le commentaire à ce travail, ce volume, p. 331, une vaste bibliographie concernant cette classe de fonctions).

Théorème 3 *du* § 1. Les fonctions pour lesquelles $|E| = 0$ entraîne $|E_y| = 0$ s'appellent *ayant la propriété* (N) *de Lusin*. D'après le théorème en question, dans la classe des fonctions à variation bornée, la propriété (N) de Lusin équivaut à la continuité absolue. C'est aussi une conséquence directe du théorème de Radon-Nikodym (voir le commentaire au travail [*18*] de Banach, ce volume, p. 331). Menchoff montra (voir Menchoff [2] et Saks [3]) que cette équivalence subsiste dans une classe plus vaste de fonctions, à savoir qui sont continues, différentiables presque partout et ayant la dérivée sommable. Saks prouva (voir Saks [2]) que l'équivalence en question subsiste également dans la classe des fonctions continues ayant en tout point un nombre dérivé médian $\lambda(x)$ qui est une fonction sommable. D'autres généralisations sont dues à Nina Bary (voir Bary [1]) et à Menchoff (voir Menchoff [2]). Les applications du théorème 3 et de ses généralisations furent envisagées par Saks aux chapitres VII (§ 6) et IX (§ 7) de son livre [6].

Définitions et théorèmes de § 2 *et* § 3. Les deux §§ sont consacrés au transport des résultats sur les fonctions d'une variable et sur la rectifiabilité des courbes établis dans le § 1 dans le domaine des transformations continues d'ensembles plans et dans celui de la planification des surfaces. L'idée de Banach de définir la variation et la continuité absolue d'une transformation (définitions 1 et 3 du § 2) de façon qu'elles rappellent les définitions des notions correspondantes dans le cas d'une seule variable s'avéra bien utile. Elle permit de trouver le théorème analogue à celui de Lebesgue sur la différentiabilité des fonctions à variation bornée (théorème 1 du § 2) et les relations entre la sommabilité de l'indicatrice et l'aire finie de la surface (§ 3). Des recherches détaillées et fécondes furent continuées dans cet ordre d'idées surtout par Radó et Reichelderfer; les résultats de ces recherches et leur rapport à la théorie de Banach firent l'objet du chapitre IV de la monographie précitée [2] de ces auteurs, consacré aux transformations continues, et du chapitre IV, 5 de la monographie [2] de Radó, consacré à la théorie de l'aire de surface. La définition banachienne de l'aire fut prise par Young (voir G. C. Young [1]) pour modèle de sa définition de l'aire intrinsèque; cet auteur lia en outre les idées de Banach à la théorie de la mesure de Carathéodory.

Schauder (voir Schauder [1] et [2]) ainsi que Radó et Reichelderfer [1] développèrent les idées de Banach concernant le jacobien généralisé (théorème 1 du § 2) et parvinrent à des résultats plus avancés. La valeur du jacobien généralisé conçue par eux est le produit de celui de Banach et de l'index de point, convenablement défini. Pour des renseignements plus précis à ce sujet, voir la monographie [2] de Radó, p. 414-416.

La notion de rectifiabilité des courbes n'étant pas directement transportable aux surfaces, plusieurs auteurs furent portés à définir diverses classes de surfaces planifiables et les aires de ces surfaces. A l'issue du travail de Banach, ce fut la définition de Lebesgue qui jouait le rôle dominant. Lebesgue traitait l'aire comme une fonctionnelle semicontinue inférieurement. Les définitions de Peano et de Geöcze suivaient la même voie. Les résultats de ces auteurs reléguèrent à l'arrière-plan la théorie dite *projective* de l'aire qui utilisait les relations entre l'aire des surfaces et celles de leurs projections sur les plans du système des coordonnées cartésiennes. Or le travail de Banach, et avant tout ses théorèmes 1 et 2 du § 3, attirèrent à nouveau l'attention sur la théorie projective (voir par exemple Cesari [1], p. 6). Citons à ce propos les paroles suivantes de la monographie de Radó (voir Radó [2], p. 415) sur l'histoire de l'évolution de la théorie de l'aire de surface dans deux directions en questions: „Apparently, the concepts sBV and sAC" (variation bornée d'une transformation et la continuité absolue) „introduced by Banach were too exacting. This becomes strikingly evident if one attempts applications in the theory of surface area: *the fundamental conflict between the projection principle and the lower semi-continuity principle arises immediately, the Banach concepts being found biased in favor of the projection principle*".

J. Lipiński

Sur une propriété caractéristique des fonctions orthogonales, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 180 (1925), p. 1637-1640*.

Cette communication de Banach contient une application du théorème établi par lui dans sa thèse de doctorat (voir [7], p. 153) à la convergence des séries orthogonales suivant la norme dans les espaces $C\langle 0,1\rangle$ et $L^p\langle 0,1\rangle$ où $p>1$. Le théorème appliqué peut être formulé comme suit:

Soient $\langle X, \|\ \|\rangle$ un espace de Banach, $\langle X_0, \|\ \|_0\rangle$ un espace normé quelconque et U une opération distributive transformant X en X_0 et telle que, pour $x_n \in X$ et $x\in X$ arbitraires, $\lim\limits_n \|x_n - x\| = 0$ entraîne $\underline{\lim}_n \|U(x_n)\|_0 \geqslant \|U(x)\|_0$. Alors l'opération U est continue.

Les idées de la communication de Banach se développèrent en ainsi dite *théorie des multiplicateurs* qui constitue actuellement un secteur de celle des séries orthogonales.

Premiers résultats de la théorie générale des systèmes orthogonaux (des multiplicateurs) sont à trouver dans les publications de Steinhaus [4], Orlicz [1], Kaczmarz et Steinhaus [1], Kaczmarz et Marcinkiewicz [1] et Marcinkiewicz [1].

Z. Ciesielski

---

* Voir p. 160.