

Sur une propriété caractéristique des fonctions orthogonales*

Soit $\{f_n\}$ une suite complète de fonctions continues, normales et orthogonales. Soit $\{a_n\}$ une suite des coefficients d'une fonction continue φ , obtenus par l'intermédiaire de la suite $\{f_n\}$. Soit enfin E l'ensemble de toutes les suites $\{a_n\}$ correspondant à toutes les φ continues possibles. Il est clair que deux suites $\{f_n\}$ et $\{\varphi_n\}$ peuvent engendrer le même ensemble E . Nous voulons pourtant démontrer que la seule connaissance de l'ensemble E et de la suite $\{a_n\}$ suffit pour établir si la série $\sum a_n f_n$ converge uniformément, même si la suite $\{f_n\}$ n'est pas connue, pourvu qu'elle engendre l'ensemble E . C'est-à-dire que les séries $\sum a_n f_n$ et $\sum a_n \varphi_n$ sont en même temps convergentes uniformément ou non pourvu que les suites $\{f_n\}$ et $\{\varphi_n\}$ engendrent le même ensemble E .

Des théorèmes pareils sont encore valables dans d'autres champs fonctionnels d'un caractère plus général.

1. Considérons une fonctionnelle $U(x)$ qui, à chaque fonction continue $x(t)$, fait correspondre une fonction continue $y(t)$. La fonctionnelle $U(x)$ est continue si, en posant $\|x\| = \max |x(t)|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ entraîne $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U(x_n) - U(x)\| = 0$. La fonctionnelle est dite *linéaire* si l'on a $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$ quels que soient x_1 et x_2 .

On peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME I ⁽¹⁾. *Si $U(x)$ est une fonctionnelle linéaire et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ implique $\lim \|U(x_n)\| \geq \|U(x)\|$, la fonctionnelle $U(x)$ est continue.*

Le même théorème est vrai, en supposant que $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions de la $(1+p)$ ^{ième} puissance sommable ($p \geq 0$) et en posant

$$\|x\| = \sqrt[1+p]{\int_0^1 |x(t)|^{1+p} dt}.$$

* Commenté sur p. 330.

(1) Ce théorème est démontré dans ma Thèse [7].

THÉORÈME II. Si $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ sont deux suites complètes de fonctions continues, orthogonales et normales et si, à chaque fonction continue $x(t)$, on peut faire correspondre une fonction continue $y(t)$ telle que pour tout n

$$\int_0^1 x(t)\varphi_n(t)dt = \int_0^1 y(t)\psi_n(t)dt,$$

la convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=1}^a a_n \varphi_n(t)$$

entraîne celle de la série

$$\sum_{n=1}^a a_n \psi_n(t),$$

quelle que soit la suite de nombres $\{a_n\}$.

Démonstration. Posons $y(t) = U[x(t)]$. Il est clair que la fonctionnelle U est linéaire. Puisque $\psi_n = U(\varphi_n)$,

$$\int_0^1 [x_1 - x_2]^2 dt = \int_0^1 [U(x_1) - U(x_2)]^2 dt.$$

Donc, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [U(x_n) - U(x)]^2 = 0$$

et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U(x_n)\| \geq \|U(x)\|.$$

Or cette inégalité, d'après le théorème I, prouve que U est continue. Puisque

$$U\left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i,$$

la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ entraîne celle de la série

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$. Le théorème est donc démontré.

2. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite complète de fonctions orthogonales, normales, sommable de la $(1+p)^{\text{ième}}$ puissance ($p > 0$). Supposons en outre que chaque fonction f sommable de la $(1+1/p)^{\text{ième}}$ puissance soit presque

partout nulle, si l'on a pour tout n , $\int_0^1 f\varphi_n = 0$. En s'appuyant sur un théorème de M. F. Riesz ⁽¹⁾, on peut maintenant démontrer le lemme suivant :

Si la fonction f et les fonctions d'une suite $\{f_n\}$ sont des fonctions sommables de la $(1+1/p)^{i\text{ème}}$ puissance, et si l'on a, pour tout i ,

$$\lim \int_0^1 f_n \varphi_i = \int_0^1 f \varphi_i,$$

alors

$$\underline{\lim} \int_0^1 |f_n|^{1+1/p} \geq \int_0^1 |f|^{1+1/p}.$$

En s'appuyant sur le lemme précédent, on peut maintenant démontrer, de la même manière que le théorème II, le théorème suivant :

Si $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ sont deux suites qui remplissent les conditions du lemme et si à chaque fonction $x(t)$ sommable de la $(1+1/p)^{i\text{ème}}$ puissance, on peut faire correspondre une fonction $y(t)$ sommable de la $(1+1/p)^{i\text{ème}}$ puissance telle que pour tout n

$$\int_0^1 x(t) \varphi_n(t) dt = \int_0^1 y(t) \psi_n(t) dt,$$

la convergence en moyenne par $(1+1/p)^{i\text{ème}}$ puissance de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ entraîne celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$.

Remarque. On peut énoncer de pareils théorèmes pour les divers procédés sommatoires.

⁽¹⁾ F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen* (Mathematische Annalen 69 (1910), p. 469-467) : si p et M sont deux nombres positifs et si $\{\varphi_n\}$ est une suite de fonctions telle que $\int_0^1 |\varphi_n|^{1+p} \leq M$, il existe une suite partielle $\{\varphi_{n_k}\}$ et une fonction φ telle que : 1° $\int_0^1 |\varphi|^{1+p} \leq M$; 2° pour chaque fonction f de la $(1+1/p)^{i\text{ème}}$ puissance sommable on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f \varphi_{n_k} = \int_0^1 f \varphi.$$