Sur une classe de fonctions continues, Fundamenta Mathematicae 8 (1926), p. 166-172*.

Dans son mémoire important sur l'intégrale et la série trigonométrique, Lusin [1] introduisit la notion de propriété (N) des fonctions de variable réelle, à savoir que l'image d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle. Il y a des fonctions continues ayant cette propriété sans qu'elles soient absolument continues. Lusin écrivit: „il serait bien intéressant d'étudier d'une manière plus détaillée la classe des fonctions qui ont la propriété (N) ... ou de poser la question d'existence de la dérivée d'une telle fonction". Fichtenholz [1] démontra que la superposition de deux fonctions absolument continues est absolument continue si elle est à variation bornée et seulement dans ce cas. Ce sujet fut repris par Banach dans son travail fondamental [*14*] (voir ici p. 149) où il établit, entre autres, le théorème d'après lequel pour qu'une fonction continue soit absolument continue, il faut et il suffit qu'elle soit à variation bornée et ait la propriété (N). Le théorème précité de Fichtenholz en résulte directement, vu que la propriété (N) est invariante par rapport à la superposition de fonctions. Le théorème de Banach qui vient d'être rappelé fut embrassé ultérieurement par le théorème de Radon-Nikodym d'après lequel une mesure ν qui est σ-finie et absolument continue par rapport à une mesure σ-finie μ s'exprime par $\int_E \varphi(t)\mu(dt)$ $(=\nu(E))$ où φ est μ-intégrable. Pour en déduire qu'une fonction continue, à variation bornée et ayant la propriété (N) est absolument continue, on n'a qu'à remarquer que la mesure engendrée par les accroissements d'une telle fonction est absolument continue relativement à la mesure lebesguienne, donc représentable sous la forme d'une intégrale de Lebesgue.

Dans son travail qui est l'objet de ce commentaire, Banach introduisit une propriété (S) plus forte au point de vue formel que la propriété (N). Une fonction continue a la propriété (S) lorsqu'elle transforme les ensembles de mesure (lebesguienne) suffisamment petite en ensembles de mesure inférieure à un nombre positif donné d'avance. Banach ignorait alors que la propriété (S) est en réalité essentiellement plus forte que (N), comme Fichtenholz le démontra un peu plus tard dans son travail [3]. Plus précisément, ce résultat de Fichtenholz revient à la démonstration de l'existence d'une fonction continue ayant la propriété (N) sans satisfaire à la condition (T_1), à savoir que l'ensemble des valeurs que la fonction prend une infinité de fois soit de mesure nulle. Or c'est seulement la réunion de (T_1) et (N) qui équivaut à (S) pour les fonctions continues; Banach l'établit par le théorème 4 de son travail commenté.

---

* Voir p. 163.

La propriété (N) entraîne la condition (T_2), à savoir que l'ensemble des valeurs prises par la fonction une infinité indénombrable de fois soit de mesure nulle. Ce résultat constitue la première thèse du théorème 3 du même travail de Banach. D'après la seconde thèse de ce théorème, toute fonction ayant la propriété (N) est dérivable dans un ensemble de mesure positive, ce qui est une réponse partielle à la question proposée par Lusin dans ses paroles précitées. Ruziewicz [1] montra que l'ensemble des points où la dérivée d'une fonction continue ayant la propriété (N), et même la propriété (S), n'existe pas peut ne pas être de mesure nulle.

Les conditions (T_1) et (T_2) furent introduites par Banach déjà dans son travail [*14*]. Il y démontra qu'elles sont satisfaites en particulier par les fonctions à variation bornée. C'est une conséquence facile de l'égalité entre la variation d'une fonction et l'intégrale de son indicatrice de Banach, ce qui y fut un des résultats principaux (voir p. 151 de son travail en question). La condition (T_2) est satisfaite également par les fonctions dites à variation bornée généralisée (fonctions VBG, voir Saks [6], Chapter VII). Les deux conditions, (T_1) et (T_2), interviennent aussi dans des travaux postérieurs des autres auteurs. Par exemple, Ridder [1] démontra que la condition (T_1) est suffisante pour qu'une fonction continue au sens de Darboux (c'est-à-dire qui prend toutes les valeurs intermédiaires entre chaque couple de ses valeurs) soit continue. Plus récemment, Marcus fit l'usage des conditions (T_1) et (T_2) dans sa solution d'un problème de Steinhaus (voir Steinhaus [5]) sur les superpositions des fonctions continues ayant certaines propriétés singulières.

S. Hartman et *W. Nitka*

— et S. Saks, *Sur les fonctions absolument continues des fonctions absolument continues*, Fundamenta Mathematicae 11 (1928), p. 113-116*.

Le problème de la superposition de deux fonctions absolument continues (cf. le commentaire au travail [*18*] de Banach, ce volume, p. 331) fut repris par Bary et Menchoff au point de vue d'une caractérisation intrinsèque de la fonction qui résulte par cette superposition (voir leur travail [1]). Ils démontrèrent que pour qu'une fonction continue soit une superposition de deux fonctions absolument continues, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition (V) suivante: l'ensemble des valeurs de

* Voir p. 178.