

Sur certains ensembles de fonctions conduisant aux équations partielles du second ordre

Soit E un ensemble de fonctions remplissant les conditions suivantes :

1° Toute fonction de E est définie et continue dans un cercle K . Nous ne supposons pas que le cercle K soit le même pour toutes les fonctions de E .

2° Toute fonction superposable ⁽¹⁾ à une fonction quelconque de E appartient à E .

3° A tout cercle K de rayon plus petit qu'un nombre $R > 0$ et à toute fonction φ définie et continue sur \bar{K} , \bar{K} désignant la circonférence de K , il correspond une fonction F de E définie et continue dans K , qui se réduit à φ sur \bar{K} . Deux fonctions F_1 et F_2 continues dans K et identiques sur \bar{K} sont identiques dans K et $\varphi = 0$ implique $F = 0$.

4° Si l'on pose $F = U(\varphi/K)$, U est une fonctionnelle continue par rapport à φ et admettant une première variation pour $\varphi = 0$, quelque soit le cercle K ⁽²⁾.

Sous ces conditions, on peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME I. *Soit $f = \delta U(\delta\varphi/K)$ la première variation de U pour $\varphi = 0$. Il existe un nombre réel λ tel que pour chaque $\delta\varphi$, f soit une fonction continue ainsi que ses premières et secondes dérivées à l'intérieur du cercle K et satisfasse à l'équation suivante :*

$$\Delta f + \lambda f = 0, \quad f = \delta\varphi \text{ sur } \bar{K} \quad \left(\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).$$

Remarque 1. On peut démontrer un théorème analogue en supposant que les fonctions de l'ensemble E attribuent aux points des vecteurs de n dimensions.

⁽¹⁾ Deux fonctions F_1 et F_2 définies dans les ensembles D_1 resp. D_2 sont dites *superposables*, s'il existe une translation euclidienne (produit d'un déplacement et d'une rotation) qui transforme D_1 à D_2 de telle manière qu'en des points correspondants F_1 et F_2 aient des valeurs égales.

⁽²⁾ Pour la définition de la première et seconde variation voir les *Leçons d'Analyse fonctionnelle* de Paul Lévy, Paris 1922, p. 50 et p. 79.

Remarque 2. L'état physique d'un corps homogène conduit fréquemment à l'ensemble de fonctions jouissant des propriétés citées ci-dessus. Les fonctions qui définissent les déformations d'un corps homogène peuvent servir d'exemple. Le théorème précédent montre qu'en première approximation ces fonctions sont des fonctions analytiques satisfaisant à l'équation:

$$\Delta f + \lambda f = 0.$$

Définition. $\|f\| = \text{maximum de } |f| \text{ dans } K.$

THÉORÈME II. *Si nous supposons que la deuxième variation $\delta^2 U(\delta\varphi/K)$ existe pour $\varphi = 0$, et qu'il existe un nombre M tel que pour tout K et $\delta\varphi$ on ait*

$$\|\delta^2 U(\delta\varphi/K)\| \leq M \|\delta\varphi\|^2,$$

alors en posant

$$f = \delta U(\delta\varphi/K), \quad \psi = \delta^2 U(\delta\varphi/K)$$

on aura

$$\Delta\psi + \lambda\psi = \alpha f + \beta \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right], \quad \psi = 0 \text{ sur } \bar{K},$$

$$\Delta f + \lambda f = 0, \quad f = \delta\varphi \text{ sur } \bar{K},$$

α et β étant deux nombres constants ne dépendant ni de $\delta\varphi$ ni de K .

On peut établir des équations pareilles pour les autres variations.

Démonstration du théorème I. Supposons que nous ayons deux fonctions continues φ_1 et φ_2 définies dans \bar{K}_1 resp. \bar{K}_2 telles que les fonctions $f_1 = \delta U(\varphi_1/K_1)$ et $f_2 = \delta U(\varphi_2/K_2)$ soient égales dans \bar{K} , K étant contenu dans K_1 et K_2 . Nous allons démontrer que les fonctions f_1 et f_2 sont aussi égales dans K .

En effet, posons dans \bar{K}

$$(1) \quad F_h^{(1)} = U(h\varphi_1/K_1), \quad F_h^{(2)} = U(h\varphi_2/K_2)$$

et nous aurons dans K

$$(2) \quad U(h\varphi_1/K_1) = U(F_h^{(1)}/K), \quad U(h\varphi_2/K_2) = U(F_h^{(2)}/K),$$

en outre

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_h^{(1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{F_h^{(2)}}{h} = f.$$

Mais d'après la définition de la variation

$$(4) \quad \begin{aligned} U(F_h^{(1)}/K) &= \delta U(F_h^{(1)}/K) + \|F_h^{(1)}\| \cdot R_1, \\ U(F_h^{(2)}/K) &= \delta U(F_h^{(2)}/K) + \|F_h^{(2)}\| \cdot R_2, \end{aligned}$$

R_1 et R_2 tendant vers zéro uniformément avec h .

Donc d'après (1), (3) et (4)

$$(5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(F_h^{(1)}/K)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(F_h^{(2)}/K)}{h} = \delta U(f/K).$$

Les relations (1), (2) et (5) nous donnent enfin dans K

$$f_1 = f_2.$$

Soit maintenant K un cercle quelconque et f une fonction définie et continue sur \bar{K} . Posons $V(f/K)$ égale à la valeur de la fonction $\delta U(f/K)$ au centre de K . Il est clair que la fonctionnelle $V(f/K)$ est continue et linéaire et en outre si deux cercles K_1 et K_2 ont des rayons égaux et si f_1 et f_2 sont deux fonctions superposables, continues et définies sur \bar{K}_1 resp. \bar{K}_2 , on a

$$V(f_1/K_1) = V(f_2/K_2).$$

Soit maintenant A un point quelconque de \bar{K} et α l'angle du rayon vecteur joignant le centre de K avec A avec l'axe des x . Nous allons démontrer que pour tout nombre naturel n

$$V(\sin na/K) = V(\cos na/K) = 0.$$

En effet, γ étant un nombre quelconque, les fonctions $\sin na$ et $\sin n(a+\gamma)$ sont superposables, donc

$$V(\sin n(a+\gamma)/K) = V(\sin na/K).$$

Nous aurons alors quelque soit γ

$$\cos \gamma \cdot V(\sin na/K) + \sin \gamma \cdot V(\cos na/K) = V(\sin na/K)$$

et pour tout n naturel

$$V(\sin na/K) = V(\cos na/K) = 0.$$

Soit $\varphi(a)$ une fonction continue, telle que $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ et soit

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos na + b_n \sin na)$$

sa série de Fourier. On sait que la moyenne des sommes partielles tend uniformément vers $\varphi(a)$. Donc en posant

$$V(1/K) = 2\pi c,$$

nous aurons

$$V(\varphi/K) = 2\pi a_0 c = c \int_0^{2\pi} \varphi(a) da.$$

Donc si $f(x, y) = \delta U(\delta\varphi/K)$, nous aurons pour tout couple (x, y) situé à l'intérieur de K et pour tout r suffisamment petit

$$(6) \quad f(x, y) = c(r) \int_0^{2\pi} f(x+r\cos a, y+r\sin a) da,$$

$c(r)$ étant une constante ne dépendante que de r .

Puisque f n'est pas identiquement nul si $\delta\varphi$ ne l'est pas, la formule (6) montre que $\lim_{r \rightarrow 0} c(r) = 1/2\pi$ et que $c(r)$ est continue pour tout r plus petit qu'un nombre positif R .

La formule (6) donne

$$(7) \quad f(x, y) \int_0^R \frac{r dr}{c(r)} = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} f(x+r\cos a, y+r\sin a) da \\ = \iint_{K_R} f(x, y) dx dy,$$

K_R étant un cercle de centre (x, y) et de rayon R .

On voit sans peine que d'après (7) $f(x, y)$ est une fonction remplissant la condition de Lipschitz dans tout cercle au rayon plus petit que R situé dans K . Donc pour presque tous les (x, y)

$$f'_x(x, y) = c(r) \int_0^{2\pi} f'_x(x+r\cos a, y+r\sin a) da$$

et

$$f'_x(x, y) \int_0^R \frac{r}{c(r)} dr = \iint_{K_R} f'_x(x, y) dx dy;$$

$f'_x(x, y)$ est donc continue dans chaque point intérieur de K . De la même manière on peut démontrer l'existence et la continuité des $f'_y(x, y)$, $f''_{x^2}(x, y)$, $f''_{x^2}(x, y)$ dans tout point intérieur de K . D'après (6), la continuité de $f'_x(x, y)$ entraîne l'existence et la continuité de $1/c(r)$ pour r suffisamment petit.

L'égalité (6) fournit

$$-\frac{c'(r)}{c^2(r)}f(x, y) = \int_0^{2\pi} [f'_x(x+r\cos a, y+r\sin a)\cos a + f'_y(x+r\cos a, y+r\sin a)\sin a] da.$$

Donc

$$-\frac{c'(r)}{c^2(r)}f(x, y) = \frac{1}{r} \int_{\bar{K}_R} (f'_x dx - f'_y dy).$$

En employant la formule de Green, nous obtenons

$$-\frac{rc'(r)}{c^2(r)}f(x, y) = - \int \int_{K_R} \Delta f dx dy,$$

ce qui donne

$$\frac{c'(r)}{r\pi c^2(r)}f(x, y) = \frac{1}{r^2\pi} \int \int_{K_R} \Delta f dx dy.$$

Puisque

$$(8) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2\pi} \int \int_{K_R} \Delta f dx dy = \Delta f,$$

$\lim_{r \rightarrow 0} c'(r)/r\pi c^2(r)$ existe; en désignant cette limite par $-\lambda$ nous aurons d'après (8)

$$\Delta f + \lambda f = 0,$$

en tout point de K , λ étant une constante ne dépendant ni de f ni de K .

Soit $B(f, \varphi)$ une fonctionnelle continue qui à chaque couple de fonctions f et φ continues dans $(0, 2\pi)$ et telles que $f(0) - f(2\pi) = \varphi(0) - \varphi(2\pi) = 0$, attribue un nombre réel. Supposons que pour toutes les fonctions f, φ, ψ remplissant les conditions cités ci-dessus, on ait toujours

$$B(f, \varphi) = B(\varphi, f),$$

$$B(f + \psi, \varphi) = B(f, \varphi) + B(\psi, \varphi).$$

La fonctionnelle B remplissant les conditions précédentes est dite symétrique et linéaire.

Dans ce qui suivra nous ferons usage du lemme suivant:

LEMME. Si $B(f, \varphi)$ est une fonctionnelle continue linéaire et symétrique et si la fonctionnelle $A(f) = B(f, f)$ prend les mêmes valeurs pour les fonctions superposables, on a

$$A(f) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_0^{2\pi} A_i^2 da,$$

où les c_i sont des constantes indépendantes de la fonction f et

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \cos ia + b_i \sin ia)$$

est la série de Fourier correspondante à la fonction f .

Démonstration. Posons

$$a_{nr} = B(\sin na, \sin ra), \quad b_{nr} = B(\sin na, \cos ra), \quad c_{nr} = B(\cos na, \cos ra).$$

Si β est un nombre quelconque, un calcul facile montre que

$$\begin{aligned} 2a_{nr} &= (a_{nr} - c_{nr}) \cos(n+r)\beta + (b_{nr} + b_{rn}) \sin(n+r)\beta + \\ &+ (a_{nr} + c_{nr}) \cos(n-r)\beta + (-b_{nr} + b_{rn}) \sin(n-r)\beta; \end{aligned}$$

nous avons donc

$$a_{nr} = b_{nr} = c_{nr} = 0, \quad \text{si } n \neq r$$

et

$$a_{nn} = c_{nn}, \quad b_{nn} = 0.$$

Comme les premières moyennes des sommes partielles de la série de Fourier correspondant à la fonction f tendent uniformément vers f , on a

$$A(f) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_0^{2\pi} A_i^2 da.$$

(Les c_i sont des constantes indépendantes de f .)

Démonstration du théorème II. Si F est une fonction définie dans un ensemble A dont B est un sous-ensemble, nous désignons par F_B une fonction définie seulement dans B , qui prend aux points correspondants les mêmes valeurs que la fonction F . Si K' est un cercle situé dans K nous démontrerons la relation suivante valable dans K' :

$$(9) \quad \delta^2 U(\delta\varphi/K) = \delta U(\psi_{\bar{K}'}/K') + \delta^2 U(f_{\bar{K}'}/K').$$

En effet, soit $U(h\delta\varphi/K) = f^{(h)}$; nous aurons dans K

$$(10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(h)}}{h} = f,$$

$$(11) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(h)} - hf}{h^2} = \frac{1}{2} \psi.$$

Il est clair que d'après (11) il subsiste dans K' la relation suivante:

$$(12) \quad \frac{1}{2} \psi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(f_{\overline{K}'}^{(h)}/K') - h \delta U(f_{\overline{K}'}^{(h)}/K')}{h^2}.$$

D'après la définition de la deuxième variation on a pour tout cercle K :

$$(13) \quad U(\delta\varphi/K) = \delta U(\delta\varphi/K) + \frac{1}{2} \delta^2 U(\delta\varphi/K) + \|\delta\varphi\|^2 R$$

où R tend uniformément vers zéro avec $\|\delta\varphi\|$.

Donc, d'après (10), (12) et (13), nous aurons dans K' :

$$\frac{1}{2} \psi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta U[f_{\overline{K}'}^{(h)}/K'] + \frac{1}{2} \delta^2 U[f_{\overline{K}'}^{(h)}/K'] + \|f_{\overline{K}'}^{(h)}\|^2 R' - h \delta U[f_{\overline{K}'}^{(h)}/K']}{h^2},$$

ce qui prouve la relation (9).

D'après le théorème I et d'après la formule (6), (x, y) étant le centre du K' , la valeur de $\delta U(\psi_{\overline{K}'} / K')$ au point (x, y) est égale à

$$c(r) \int_0^{2\pi} \psi(x+r \cos \alpha, y+r \sin \alpha) d\alpha.$$

Il est clair, que si $V(f_{K'})$ est la valeur de $\delta^2 U(f_{K'} / K')$ au point (x, y) , la fonctionnelle V remplit les conditions imposées à la fonctionnelle A du lemme, donc

$$(14) \quad V(f_{K'}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(r) \int_0^{2\pi} A_i^2(r) d\alpha$$

où les $c_i(r)$ sont des constantes dépendant seulement de r .

On peut donc écrire pour r assez petit

$$(15) \quad \psi(x, y) = c(r) \int_0^{2\pi} \psi(x+r \cos \alpha, y+r \sin \alpha) d\alpha + \sum_{i=0}^{\infty} c_i(r) \int_0^{2\pi} A_i^2(r) d\alpha.$$

Si nous supposons maintenant que

$$\|\delta^2 U(\delta\varphi/K)\| \leq M \|\delta\varphi\|^2$$

(M étant indépendant de K et $\delta\varphi$) nous aurons en posant dans (15) $f_{K'} = \sin n\alpha$,

$$|\pi c_n(r)| \leq M;$$

la relation (15) donne maintenant

$$\psi(x, y) \int_0^R \frac{r}{c(r)} dr = \iint_{K_R} \psi(x, y) dx dy + \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} A_i^2(r) d\alpha \int_0^R \frac{r c_i(r)}{c(r)} dr.$$

Nous rappelons que $\lim_{r \rightarrow 0} c(r) = 1/2\pi$.

Puisque

$$\left| \sum_{i=0}^{i=\infty} \int_0^{2\pi} A_i(r) \frac{\partial A_i(r)}{\partial x} d\alpha \int_0^R \frac{rc_i(r)}{c(r)} dr \right|^2 \\ \leq \left[\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} A_i^2(r) d\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial A_i(r)}{\partial x} \right)^2 d\alpha \right] M^2 \left(\int_0^R \frac{r}{c(r)} dr \right)^2$$

et puisque $f(x, y)$ est une fonctionnelle analytique, on peut démontrer de la même façon que la fonction $\psi(x, y)$ a toutes les dérivées continues ⁽¹⁾. Considérons maintenant que

$$(16) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi(x, y) - c(r) \int_0^{2\pi} \psi(x + r \cos \alpha, y + r \sin \alpha) d\alpha}{r^2 \pi} = \frac{1}{4\pi} (\Delta \psi + \lambda \psi).$$

Or

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \int_0^{2\pi} A_i^2(r) d\alpha}{r^2} \\ = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^{2\pi} f(x + r \cos \alpha, y + r \sin \alpha) d\alpha \right)^2 - \int_0^{2\pi} A_0^2(r) d\alpha - \int_0^{2\pi} A_1^2(r) d\alpha}{r^2} \\ = \pi \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right] - \pi f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \\ - \pi \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] = 0;$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i(r) \int_0^{2\pi} A_i^2(r) d\alpha}{r^2 \pi} \\ = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2c_0(r)}{r^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + r \cos \alpha, y + r \sin \alpha) d\alpha + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{c_1(r) \int_0^{2\pi} A_1^2(r) d\alpha}{r^2 \pi}.$$

En supposant que f_K soit constant, on voit sans peine que $\lim_{r \rightarrow 0} c_0/r^2$ existe. Donc $\lim_{r \rightarrow 0} c_1(r)$ existe.

⁽¹⁾ Il faut remarquer que l'on peut démontrer l'existence de toutes les dérivées de $\psi(x, y)$ sans l'hypothèse que M soit indépendant de r .

Nous obtenons alors

$$(17) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i(r) \int_0^{2\pi} A_i^2(r) d\alpha}{r^2 \pi} = \frac{a}{4\pi} f + \frac{\beta}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right],$$

a et β étant des constantes indépendantes de f , et finalement tenant compte de (15), (16) et (17)

$$\Delta\psi + \lambda\psi = af + \beta \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right],$$

c. q. f. d.