Sur les fonctions absolument continues des fonctions absolument continues*

par

S. Banach et S. Saks

§ 1. Dans une Note de C. R. (¹), Mlle Bary et M. Menchoff ont signalé (sans démonstration) le théorème suivant: *pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit une fonction absolument continue d'une f, absolument continue, il faut et il suffit que l'ensemble de valeurs $f(x)$ où la dérivée (unique et finie) $f'(x)$ n'existe pas, soit de mesure nulle.*

Nous nous proposons ici de prouver qu'une propriété étudiée déjà par S. Banach dans une Note antérieure (²) et appellée la propriété (S) fournit également une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue soit une f. a. c. (³) d'une f. a. c. Il est aisé en déduire le théorème de Mlle Bary et de M. Menchoff.

§ 2. Nous rappellerons d'abord quelques notions utiles pour les considérations qui vont suivre.

$f(x)$ étant une fonction continue et E un ensemble de valeurs x, E_f désigne l'ensemble de valeurs $f(x)$ admises aux points $x \epsilon E$.

La fonction $f(x)$ satisfait à la condition (N) (de M. Lusin), lorsque mes $E = 0$ implique toujours mes $E_f = 0$ On dira encore qu'elle vérifie la condition (S) lorsque, à chaque $\varepsilon > 0$, correspond un nombre $\eta > 0$ tel que mes $E < \eta$ entraîne mes $E_f < \varepsilon$.

Nous désignons, pour chaque nombre y, par $N_f(y)$ le nombre de valeurs différents x vérifiant l'équation $f(x) = y$. Nous disons que la fonction $f(x)$ vérifie la condition (T) lorsque $N_f(y)$ est fini pour presque toute valeur de y.

---

* Commenté sur p. 332.

(¹) C. R. 182, p. 1373.

(²) Banach [*18*], p. 166.

(³) Nous désignons, pour abréger, par f. a. c. toute fonction absolument continue.

On prouve que la condition (S) équivaut à l'ensemble de conditions (N) et (T) (¹).

§ 3. LEMME. *$y = v(x)$ étant une fonction mesurable et presque partout finie dans $(0, 1)$, il existe toujours dans l'intervalle $(0, 1)$ une fonction croissante et absolument continue $\varphi(x)$ $(\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1)$, telle que:*

1° *l'inverse de $\varphi(x)$, $\varphi^{-1}(x)$, est une f. a. c.*

2° *$v[\varphi(x)]$ est sommable dans $(0, 1)$.*

Démonstration. Soit, pour chaque entier $n \geqslant 1$,

$$E_n = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[n-1 < |v(x)| < n],$$

et posons, par définition, pour chaque $x \in E_n$: $\psi(x) = n^{-3}$.

La fonction $\psi(x)$ déterminée ainsi presque partout dans $(0, 1)$ soit encore pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$\theta(x) = \frac{1}{k}\int_0^x \psi(t)\,dt, \qquad \text{où} \qquad k = \int_0^1 \psi(t)\,dt.$$

On voit que $\theta(x)$ est une fonction croissante et absolument continue, et que $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 1$. L'inverse de $\theta(x)$, qu'on désignera par $\varphi(x)$, est donc encore une fonction déterminée et croissante dans $(0, 1)$. De plus, $\theta(x)$ admettant presque partout la dérivée positive $\theta'(x) = \psi(x)$, l'ensemble de valeurs de $\varphi(x)$ où cette fonction $\varphi(x)$ n'admet pas de dérivée finie, est de mesure nulle. La fonction $\varphi(x)$ est par suite (ainsi que $\theta(x)$) absolument continue.

Nous prouverons maintenant que la fonction $v[\varphi(x)]$ est sommable (²) dans $(0, 1)$. Posons, dans ce but, pour tout $n \geqslant 1$:

$$H_n = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[u-1 < |v[\varphi(x)]| \leqslant n].$$

On voit immédiatement que l'ensemble H_n coïncide avec celui de valeurs x pour lesquels $\varphi(x)$ appartient à E_n, ou bien, ce qui équivaut, avec celui de valeurs de la fonction $\theta(x)$ qui correspondent aux valeurs $x \in E_n$. On a donc, en vertu de la définition de la fonction $\theta(x)$:

$$\operatorname{mes} H_n = \int_{E_n} \theta'(x)\,dx = \int_{E_n} \psi(x)\,dx = \frac{\operatorname{mes} E_n}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

(¹) Banach, l. c.

(²) La fonction $v[\varphi(x)]$ est une fonction mesurable et presque partout finie; c'est une conséquence immédiate du fait que $v(x)$ est une telle fonction et que l'inverse de $\varphi(x)$ est absolument continue.

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{mes} H_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

d'où la sommabilité de la fonction $v[\varphi(x)]$.

La fonction $\varphi(x)$ jouit donc de toutes les propriétés désirées.

THÉORÈME. *Pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit une f. a. c. d'une f. a. c., il faut et il suffit qu'elle jouit de la propriété (S).*

Démonstration. La nécessité de la condition (S) étant bien évidente, il suffit de démontrer que toute fonction continue dans $(0,1)$ et vérifiant la condition (S) et une f. a. c. d'une f. a. c. Soit donc $f(x)$ une telle fonction, satisfaisant, par conséquent, aux conditions (N) et (T) à la fois (voir § 2). On peut évidemment supposer que les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ sont égales respectivement à 0 et 1. La fonction correspondante à $f(x)$, $N_f(y)$ étant mesurable [1] et, en vertu de la condition (T), presque partout finie, il existe, d'après le lemme précédent, une fonction croissante et a. c. dans $(0,1)$, $\varphi(x)$ $(\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=1)$ telle que son inverse qu'on désignera par $\theta(x)$, est aussi a. c. et que $N_f[\varphi(y)]$ est sommable dans $(0,1)$.

Posons:

$$u(x) = \theta[f(x)].$$

L'égalité $u(x)=y$ étant évidemment équivalente à $f(x)=\theta^{-1}(y) = \varphi(y)$, on a, pour chaque y:

$$N_u(y) = N_f[\varphi(y)].$$

Or, $N_f[\varphi(y)]$ étant, d'après le précédent, sommable dans $(0,1)$, il en est de même de la fonction $N_u(y)$ et, par suite, $u(x)$ est une fonction à variation bornée [2]. De plus, les deux fonctions f et θ satisfaisant à la condition (N) (la première par hypothèse, et la seconde en vertu de sa continuité absolue), la fonction composée $u=\theta(f)$ vérifie la même condition et, par suite, elle est absolument continue [3]. La fonction

$$f = \theta^{-1}(u) = \varphi(u)$$

est ainsi une f. a. c d'une f. a. c.

---

(1) Banach [*14*], p. 225.

(2) car, pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit à variation bornée, il faut et il suffit que $N_f(y)$ soit sommable. Voir Banach, l. c., p. 228.

(3) Banach, l. c., p. 229.

Remarque. On peut aisément déduire de l'énoncé qu'on vient de prouver la proposition de Mlle Bary et de M. Menchoff. Soit, à cet effet, $f(x)$ une fonction dans $(0, 1)$ satisfaisant à la condition de ces auteurs. En désignant donc par M l'ensemble de tous les points x où $f(x)$ n'admet pas la dérivée finie et unique, on a

$$\text{mes } M_f = 0. \tag{1}$$

Soit E un ensemble quelconque dans $(0,1)$ de mesure nulle. $f(x)$ admettant la dérivée en chaque point de $E-M$, l'ensemble $(E-M)_f$ est, en vertu d'un théorème de M. Lusin (1), de mesure nulle. Donc, en vertu de (1), $E \subset (E-M)_f + M_f$ est aussi de mesure nulle, et la fonction $f(x)$ possède la propriété (N).

Soit maintenant A l'ensemble de valeurs y telles que $N_f(y)$ y est infini. A chaque valeur $y \epsilon A$ on peut donc faire correspondre un point x_y qui soit un point d'accumulation d'une suite de points $x_y^{(n)}$ tels que $f(x_y^{(n)}) = y$. Désignons par B l'ensemble de valeurs $y \epsilon A$ pour lesquels $x_y \epsilon M$. On a donc

$$B \subset M_f, \qquad \text{donc} \qquad \text{mes} B = 0. \tag{2}$$

D'autre part, si x_y n'appartient pas à M, la dérivée $f'(x_y)$ existant en ce point, elle s'y annule nécessairement et, par conséquent, l'ensemble $A-B$ de valeurs correspondant aux tels points est de mesure nulle (2). Donc, d'après (2), on a $\text{mes} A = 0$, c.-à.-d. $f(x)$ satisfait encore à la condition (T).

Les conditions (N) et (T) vérifiées par la fonction $f(x)$, elle est d'après le théorème précédent une f. a. c. d'une f. a. c.

Remarque post scriptum. Après l'envoi par nous de la présente note à la Rédaction des „Fundamenta", Mlle Bary a publié une nouvelle Note (C. R. 183, p. 469) où elle a signalé la même proposition que nous venons d'obtenir. Or, la démonstration de Mlle Bary étant (d'après les renseignements que Mlle Bary a bien voulu nous faire parvenir) essentiellement différente de la nôtre, nous croyons de pouvoir publier cette dernière, d'autant plus qu'elle semble être aussi simple que naturelle.

Les raisonnements complets de Mlle Bary et de M. Menchoff paraîtront dans le recueil italien „Annali di Matematica".

---

(1) Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique* (en russe), Moscou 1915, p. 105. Cf. aussi Saks, *Sur un théorème de M. Lusin*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 111.

(2) l. c.