

Sur une généralisation du problème de la mesure*

par

S. Banach et C. Kuratowski

M. Lebesgue a appelé *problème de la mesure* ⁽¹⁾ le problème suivant: définir une fonction $m(X)$ qui fasse correspondre à chaque ensemble X situé dans l'intervalle $E = 0,1$ un nombre réel $m(X) \geq 0$ de façon que:

I. Si X_1 et X_2 sont superposables, $m(X_1) = m(X_2)$.

II. X_1, X_2, \dots étant une suite finie ou infinie d'ensembles disjoints, on a: $m(X_1 + X_2 + \dots) = m(X_1) + m(X_2) + \dots$

III. $m(E) = 1$.

M. Vitali (en 1905) a prouvé que ce problème *n'admet pas de solution*.

Or, on peut chercher à résoudre ce problème, en imposant à la fonction $m(X)$ des conditions moins restrictives ⁽²⁾. Dans cette note nous allons prouver, en admettant l'hypothèse du continu, que le problème *plus général* ⁽³⁾ qui s'obtient de celui de la mesure en omettant la condition I et en y ajoutant la condition, que pour X composé d'un seul point $m(X) = 0$ (condition qui résulte évidemment de I et II), — *ne possède nonplus de solution*; nous allons nous débarrasser, en même temps, de

* Commenté sur p. 333.

⁽¹⁾ *Leçons sur l'intégration* (Coll. Borel), I-re éd. 1904, II-me 1928, p. 110.

⁽²⁾ Ainsi, si l'on remplace l'additivité complète (énoncée dans la cond. II) par l'additivité finie, le problème de mesure admet une solution (voir Banach [9]); et cela reste encore vrai dans le cas où E est un carré, tandis qu'il n'en est rien, si E est un cube (voir F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 469, et, dans le même ordre d'idées, Banach et Tarski [13] et J. v. Neumann, *Fundamenta Mathematicae* 13).

⁽³⁾ Ce problème fut posé par M. Banach, qui l'a réduit aussi au théorème II. La démonstration du théorème II a été trouvée par les deux auteurs indépendamment et simultanément.

On a, en vertu de (2),

$$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k^1).$$

Il existe, par conséquent, un indice k_1 tel que

$$\left| \sum_{k=k_1+1}^{\infty} m(A_k^1) \right| \leq \frac{|a|}{4},$$

done, en désignant par R^1 la somme $A_{k_1+1}^1 + A_{k_1+2}^1 + \dots$, il vient

$$|m(R^1)| \leq |a|/4.$$

En général, il existe une suite d'entiers $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots$ tels qu'en désignant $R^i = A_{k_i+1}^i + A_{k_i+2}^i + \dots$, on a

$$|m(R^i - R^1 - R^2 - \dots - R^{i-1})| \leq \frac{|a|}{2^{i+1}},$$

puisque la décomposition évidente

$$E - R^1 - R^2 - \dots - R^{i-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^i - R^1 - R^2 - \dots - R^{i-1}$$

entraîne

$$m(E - R^1 - R^2 - \dots - R^{i-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k^i - R^1 - R^2 - \dots - R^{i-1}),$$

done pour k_i suffisamment grand:

$$\left| \sum_{k=k_i+1}^{\infty} m(A_k^i - R^1 - R^2 - \dots - R^{i-1}) \right| \leq \frac{|a|}{2^{i+1}}.$$

On parvient ainsi à la conclusion que

$$\begin{aligned} \left| m \left(\sum_{i=1}^{\infty} R^i \right) \right| &= \left| m \left(\sum_{i=1}^{\infty} R^i - R^1 - R^2 - \dots - R^{i-1} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} m(R^i - R^1 - R^2 - \dots - R^{i-1}) \right| \leq \frac{|a|}{2} \end{aligned}$$

et comme

$$E - \sum_{i=1}^{\infty} R^i = \prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \dots + A_{k_i}^i),$$

il vient

$$\left| m \left(\prod_{i=1}^{\infty} A_1^i + A_2^i + \dots + A_{k_i}^i \right) \right| \geq \frac{|a|}{2} \neq 0,$$

ce qui prouve que l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \dots + A_{k_i}^i)$ est indénombrable, puisque, pour tout X fini ou dénombrable, on a conformément à (1) et (2): $m(X) = 0$.

La condition 3° n'est donc pas remplie.

Il est ainsi établi que, dès que le théorème II va être prouvé, le théorème I le sera aussi.

2, Démonstration du théorème II basée sur l'hypothèse du continu.

Etant données deux suites d'entiers positifs $S = \{k_i\}$ et $T = \{n_i\}$, convenons d'écrire $T \rightarrow S$, lorsque $n_i \leq k_i$ quel que soit i .

Nous allons prouver que

(II') *Il existe une famille \mathcal{F} , de la puissance du continu, ayant comme éléments des suites d'entiers positifs et telle que, pour chaque suite S (qu'elle appartienne à \mathcal{F} ou non), l'ensemble des suites T de \mathcal{F} telles que $T \rightarrow S$ est au plus dénombrable.*

En effet, la famille de toutes les suites infinies d'entiers positifs est, selon l'hypothèse du continu, une famille bien ordonnée:

$$S_0, S_1, \dots, S_\omega, \dots, S_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega),$$

Ω désignant le premier nombre transfini de la troisième classe.

Or, on peut faire correspondre à chaque α un nombre ξ_α tel que, pour $\beta < \alpha$, on n'ait jamais $S_{\xi_\alpha} \rightarrow S_\beta$, ni $S_{\xi_\alpha} = S_{\xi_\beta}$, car, pour chaque famille finie ou dénombrable de suites $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, on peut construire (par un procédé classique de diagonale) une suite S telle qu'on n'ait pour aucun n : $S \rightarrow T_n$.

La famille des suites S_{ξ_α} est donc la famille \mathcal{F} demandée (puisque, pour chaque β , si $S_{\xi_\alpha} \rightarrow S_\beta$, on a $\alpha \leq \beta$; l'ensemble de ces α est par suite au plus dénombrable). La puissance de \mathcal{F} étant égale à celle de l'ensemble $E =$ l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, on peut représenter les suites qui lui appartiennent par T_x de sorte que si $x \neq y$, $T_x \neq T_y$. Soit $T_x = n_1^x, n_2^x, \dots, n_i^x, \dots$

Nous définissons les ensembles A_k^i du théorème II de la façon suivante:

$$x \text{ appartient à } A_k^i \text{ lorsque } k = n_i^x.$$

On voit aussitôt que les conditions 1° et 2° du théorème II sont réalisées. Pour prouver qu'il en est de même de 3°, considérons une suite arbitraire $S = k_1, k_2, \dots, k_i, \dots$ et soit x un élément de l'ensemble

$$\prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \dots + A_{k_i}^i).$$

Il s'agit de démontrer qu'il y en a au plus une infinité dénombrable de ces x .

Pour chaque i , x appartient, par hypothèse, à l'ensemble $A_1^i + A_2^i + \dots + A_{k_i}^i$. Conformément à la définition de A_k^i , il vient $n_i^x \leq k_i$. En d'autres termes: $T_x \rightarrow S$. Or, cette formule ne peut être remplie, selon la propriété de la famille \mathcal{F} énoncée dans (II'), que pour une infinité au plus dénombrable des x .

Ainsi, le théorème II et, par conséquent, le théorème I se trouvent démontrés.

Remarque. Comme nous venons de voir, la proposition (II') entraîne, sans l'aide de l'hypothèse du continu, le théorème II. Nous prouverons, à présent, que l'implication inverse a aussi lieu.

Supposons, en effet, que les ensembles A_k^i satisfont au théorème II. Soit \mathcal{F} la famille de toutes les suites $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$ telles que le produit $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$ ne soit pas vide.

La famille \mathcal{F} ainsi définie a la puissance du continu. Car, d'une part, selon la condition 3° du théorème II, chaque produit $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$ est au plus dénombrable et, d'autre part, selon 1°, l'ensemble-somme de tous les produits de ce genre est égal à E , a donc la puissance du continu.

Soit $S = k_1, k_2, \dots, k_i, \dots$ une suite arbitraire. L'ensemble

$$\prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \dots + A_{k_i}^i)$$

étant, selon 3°, au plus dénombrable, on en conclut que parmi les produits $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$, avec $n_i \leq k_i$, il n'y en a pas plus qu'une infinité dénombrable qui ne soient pas vides (puisque selon 2°, deux produits de ce genre sont toujours disjoints). Cela veut dire, précisément, que l'ensemble des suites T de la famille \mathcal{F} telles que $T \rightarrow S$ est au plus dénombrable.

L'équivalence des propositions II et II' se trouve ainsi démontrée.