Über additive Massfunktionen in abstrakten Mengen*

In einer vor kurzem gemeinsam mit Herrn Kuratowski veröffentlichten Note (1) haben wir, unter Voraussetzung der Richtigkeit der Kontinuumhypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, die folgende Verallgemeinerung eines bekannten Resultats von Herrn Vitali bewiesen:

Es gibt keine total additive nicht identisch verschwindende Mengenfunktion $m(X)$, *welche jeder Teilmenge* X *der Strecke* $(0, 1)$ *eine reelle Zahl zuordnet und für alle aus nur einem Punkte bestehenden Mengen den Wert Null annimmt.*

In diesem Satze kann die Strecke $(0, 1)$ durch eine beliebige Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums ersetzt werden. Die Funktion $m(X)$, welche wir wegen ihrer geometrischen Bedeutung eine Maßfunktion, oder auch ein Maß von X nennen, darf auch negative Werte annehmen.

In der vorliegenden Note beweisen wir einen allgemeineren, für Mengen von beliebiger Mächtigkeit gültigen Satz, *wobei wir die Richtigkeit der sog. Hypothese der Alephs, d. h. das Bestehen der Gleichung*

$$2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$$

ür beliebige Ordnungszahlen ξ *voraussetzen.* Um diesen Satz aussprechen zu können, müssen wir zunächst den Begriff der Maßfunktion allgemein definieren.

Wir sagen, daß in einer Menge E eine additive Maßfunktion definiert ist, falls jeder Teilmenge G von E eine Zahl $|G|$ zugeordnet ist, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. $|G|$ ist nicht identisch null für alle G.
2. Es ist $|G_1+G_2| = |G_1|+|G_2|$, falls $G_1 \cdot G_2 = 0$.
3. Besteht G aus einem einzigen Element von E, so ist $|G| = 0$.

Eine Maßfunktion ist „additiv mit der Mächtigkeit $\aleph_\xi$“, wenn für disjunkte Mengen G_η stets

$$\left|\sum G_\eta\right| = \sum |G_\eta| \qquad (0 < \eta < \omega_\xi).$$

---

* Commenté sur p. 340.

(1) S. Banach et C. Kuratowski [*24*].

Eine Maßfunktion ist vom Typus $\aleph_\xi$, falls sie mit jeder Mächtigkeit kleiner als $\aleph_\xi$, nicht aber mit der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ additiv ist.

Bemerkung 1. Wenn eine Maßfunktion mit einer Mächtigkeit $\aleph_\xi \geqslant \aleph_0$ additiv ist, so ist jede Klasse disjunkter Teilmengen von E, deren jede eine Teilmenge mit von Null verschiedenem Masse enthält, höchstens abzählbar.

Bemerkung 2. Wenn die Menge E von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ ist, so ist jede in E erklärte Maßfunktion höchstens vom Typus $\aleph_\xi$. Anderenfalls wäre nämlich das Maß einer beliebigen Teilmenge von E gleich der Summe der Maße ihrer Elemente, d. h. gleich Null.

Wir formulieren nunmehr unseren Satz:

Wenn in einer Menge E eine Maßfunktion vom Typus $\aleph_\xi$ sich definieren lässt, so ist $\aleph_\xi$ eine unerreichbare Kardinalzahl (1).

Zum Beweise setzen wir zunächst voraus, daß die Menge E die Mächtigkeit $\aleph_\xi$ besitzt.

Nach der Bemerkung 2, kommt jeder Teilmenge von E deren Mächtigkeit kleiner als $\aleph_\xi$ ist, das Maß Null zu. Daher enthält E eine Teilmenge von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ deren Maß von Null verschieden ist. Da es hier nur auf die Mächtigkeit ankommt, dürfen wir annehmen, daß die Menge E selbst ein von Null verschiedenes Maß besitzt. Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, daß $\aleph_\xi$ erreichbar ist. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\aleph_\xi$ eine Grenzzahl ist oder nicht.

Es sei $\aleph_\xi$ eine (erreichbare) Grenzzahl. Die Menge E läßt sich als Summe disjunkter Mengen $\{G_\eta\}$ in der Anzahl $< \aleph_\xi$, welche alle von kleinerer Mächtigkeit als $\aleph_\xi$ sind, darstellen. Da jede dieser Mengen als Summe ihrer Elemente betrachtet werden kann und unsere Maßfunktion dem Typus $\aleph_\xi$ angehört, haben alle diese Mengen das Maß Null, also auch die Menge E, gegen die Voraussetzung.

Es sei jetzt $\aleph_\xi$ $(\xi > 1)$ (2) keine Grenzzahl. Wir bezeichnen mit A die Klasse aller Folgen

$$\{\alpha_\eta\} \qquad (0 < \eta < \omega_{\xi-1}),$$

wo die α_η Ordinalzahlen kleiner als ω_1 sind. Sind $\{\alpha_\eta\}$ und $\{\beta_\eta\}$ zwei Folgen aus A, so schreiben wir

$$\{\alpha_\eta\} < \{\beta_\eta\}$$

---

(1) Eine Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ nennen wir *unerreichbar*, falls sie eine Grenzzahl ist und sich nicht, als Summe von Mengen, welche von Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ sind und deren Anzahl $< \aleph_\alpha$ ist, darstellen lässt; d. h. die Anfangszahl ω_α ist regulär und α ist eine Limeszahl.

Die kleinste unerreichbare Kardinalzahl ist $\aleph_0$. Es ist nicht bekannt, ob es noch andere gibt.

(2) Für den Beweis im Falle $\xi = 1$ verweisen wir auf die zitierte Note.

wenn für alle η, $\alpha_\eta < \beta_\eta$ ist. Die Mächtigkeit von A ist offenbar

$$\aleph_1^{\aleph_{\xi-1}} = \aleph_\xi.$$

Wir nehmen an, daß die Menge A nach dem Typus ω_ξ wohlgeordnet ist. Wir entfernen nun jedes Element $\{\alpha_\eta\}$, für welches ein in A früher vorkommendes Element $\{\beta_\eta\}$ existiert, derart, daß $\{\alpha_\eta\} < \{\beta_\eta\}$ und bezeichnen mit $\bar{E}$ die Menge der übrigen Elemente von A. Diese Menge $\bar{E}$ besitzt folgende zwei Eigenschaften:

1. Sie ist von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$.

2. Ist $\{\alpha_\eta\}$ ein Element aus A, so ist die Menge derjenigen Elemente von $\bar{E}$, welche kleiner als $\{\alpha_\eta\}$ sind, von einer kleineren Mächtigkeit als $\aleph_\xi$.

Unter der Annahme, daß die Mächtigkeit von $\bar{E}$ kleiner als $\aleph_\xi$ ist, kann $\bar{E}$ als eine wohlgeordnete Menge von Folgen $\{\beta_\eta^\vartheta\}$, $0 < \vartheta < \omega_{\xi-1}$, dargestellt werden. Sei $\alpha_\eta = \beta_\eta^\eta + 1$; alsdann existiert keine Folge $\{\beta_\eta\}$ aus $\bar{E}$ für welche $\{\alpha_\eta\} \leqslant \{\beta_\eta\}$ ist, im Widerspruch mit der Definition der Menge $\bar{E}$.

Ist ferner $\{\beta_\eta\} < \{\alpha_\eta\}$ und $\{\beta_\eta\} \subset \bar{E}$, so kommt $\{\beta_\eta\}$ früher in A vor als $\{\alpha_\eta\}$. Die Menge derjenigen Elemente, welche in A früher als $\{\alpha_\eta\}$ vorkommen, ist aber von einer kleineren Mächtigkeit als $\aleph_\xi$.

Es sei $\alpha < \omega_1$. Wir bezeichnen mit E_α^η die Menge derjenigen Folgen $\{\beta_\eta\}$ von $\bar{E}$, für welche $\beta_\eta = \alpha$.

Es ist klar, daß

$$\bar{E} = \sum_{0<\alpha<\omega_1} \bar{E}_\alpha^\eta.$$

Da nach 1 die Mengen E und $\bar{E}$ von gleicher Mächtigkeit sind, so läßt sich in $\bar{E}$ eine Maßfunktion vom Typus $\aleph_\xi$ erklären derart, daß $|\bar{E}| \neq 0$ ist. Die Menge aller α besitzt die Mächtigkeit $\aleph_1$. Daher gibt es nach der Bemerkung 1, eine Ordnungszahl $\alpha_\eta < \omega_1$ derart, daß für jedes η

1. $|\bar{E}_\alpha^\eta| = 0$ für $\alpha \geqslant \alpha_\eta$,

2. $|G| = 0$ für jede Teilmenge G eines $\bar{E}_\alpha^\eta$ $(\alpha \geqslant \alpha_\eta)$.

Wir setzen

$$\bar{E}' = \sum_{0<\eta<\omega_{\xi-1}} \sum_{\alpha \geqslant \alpha_\eta} \bar{E}_\alpha^\eta.$$

Da die Teilmengen von $\bar{E}_\alpha^\eta$ vom Maß Null sind und die obige Summe aus Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_{\xi-1}$ besteht, so ist $|\bar{E}'| = 0$.

Die Menge $\bar{E} - \bar{E}'$ enthält nur diejenigen Folgen von $\bar{E}$, welche kleiner als $\{\alpha_\eta\}$ sind. Die Anzahl dieser Folgen ist, nach der zweiten Eigenschaft der Menge $\bar{E}$, höchstens $\aleph_{\xi-1}$. Daher ist $|\bar{E} - \bar{E}'| = 0$, also

$$|\bar{E}| = |\bar{E}'| + |\bar{E} - \bar{E}'| = 0$$

— gegen die Voraussetzung.

Damit ist der Beweis unseres Satzes für den Fall, daß die Menge E die Mächtigkeit $\aleph_\xi$ besitzt, erledigt. Um daraus den Beweis für den allgemeinen Fall abzuleiten, bemerken wir, daß aus der Voraussetzung unseres Satzes leicht die Existenz einer Klasse disjunkter Teilmengen E_η $(0 < \eta < \omega_\xi)$ von E folgt, für welche:

$$\Big|\sum_{0<\eta<\omega_\xi} E_\eta\Big| \neq \sum_{0<\eta<\omega_\xi} |E_\eta|\,.$$

Nach der Bemerkung 1 haben nur abzählbar viele Mengen E_η ein von Null verschiedenes Maß. Wir bezeichnen die übrigen mit G_η. Es ist klar, daß

$$|G_\eta| = 0$$

und

$$\Big|\sum G_\eta\Big| \neq \sum |G_\eta| = 0$$

ist.

Wir bezeichnen mit W die Menge aller Ordnungszahlen, welche kleiner als ω_ξ sind. In dieser Menge, deren Mächtigkeit $\aleph_\xi$ beträgt, definieren wir eine Maßfunktion vom Typus $\aleph_\xi$ folgendermaßen:

Ist M eine Teilmenge von W, so setzen wir

$$|M| = \Big|\sum G_\eta\Big|,$$

wobei die Summe über alle Ordnungszahlen von M erstreckt ist. Da nach der vorletzten Relation $|W| \neq 0$ ist, so folgt aus unserem früheren Ergebnis, daß $\aleph_\xi$ eine unerreichbare Kardinalzahl ist, w. z. b. w.

Auf Grund dieses Satzes beweist man leicht mit Hilfe der Bemerkung 2 folgendes Korollar:

Es sei $\overline{\aleph}$ die kleinste unerreichbare Kardinalzahl, welche größer als $\aleph_0$ ist. Wenn E eine Menge von einer kleineren Mächtigkeit als $\aleph_0$ ist und wenn in E eine Maßfunktion erklärt ist, so ist diese Maßfunktion vom Typus $\aleph_0$, d. h. es ist nicht immer

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} E_n\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$$

für disjunkte Mengen E_n.