est borné (indépendamment de m et n) et la série $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$ converge, il existe une fonction $x(t)$ continue et satisfaisant aux égalités $a_{k_n} = \alpha_n$ et $b_{k_n} = \beta_n$. Cette généralisation est essentielle, car l'hypothèse sur la suite $\{k_n\}$ est réalisée non seulement lorsque $k_{n+1}/k_n > k > 1$, mais aussi pour certaines suites où $k_n = O(n^4)$ par exemple.

Une esquisse de la démonstration constructive du théorème 1 se trouve également dans la monographie [6] de Zygmund, volume II, p. 131, 7.1, i. Contrairement à la démonstration du théorème 2, elle y est longue et compliquée.

Une nouvelle démonstration constructive du théorème 1, bien plus succinte, est due à Salem et Zygmund [1]. Elle repose sur un raisonnement semblable à celui de la démonstration du théorème 2 par Sidon, à savoir sur l'emploi des produits analogues à ceux de Riesz

$$\prod_{n=1}^{\nu}(1+\alpha_n\cos k_n t+\beta_n\sin k_n t).$$

L'équivalence entre certaines propriétés des séries orthogonales (voir aussi Kaczmarz et Steinhaus [1], p. 250-255, théorèmes [734]-[737]) fut également le point de départ des recherches ultérieures, entre autres, de celles de Hewitt et Zuckerman (voir Hewitt et Zuckerman [1], p. 2, théorème 2.1 et autres) et de celles de Rudin (voir Rudin [1], partie V), qui s'occupa des équivalences pour les exposants finis $p > 1$ (cf. aussi Semadeni [1], p. 177, lemme 5).

J. Musielak

Über additive Maßfunktionen in abstrakten Mengen, Fundamenta Mathematicae 15 (1930), p. 97-101*.

Ce travail contient une généralisation des résultats de Banach et Kuratowski (voir Kuratowski [5]) et concerne le problème qui ne diffère de (*) formulé ici dans le commentaire au travail [*24*] de Banach (voir ce volume, p. 331) que par la puissance arbitraire m de l'ensemble E au lieu de celle du continu, la mesure étant entendue comme une fonction non-négative et dénombrablement additive.

Le théorème fondamental de cette publication est qu'en admettant l'hypothèse du continu généralisée, la réponse au problème est négative lorsque le nombre cardinal m est inférieur aux alephs inaccessibles.

* Voir p. 200.

La démonstration s'appuie sur l'existence d'une décomposition singulière, analogue à celle envisagée dans le travail précité de Banach et Kuratowski. Un élément essentiellement nouveau de la démonstration est représenté par le mode de raisonnement dans le cas où le nombre m n'est pas régulier. L'artifice employé par Banach dans cette démonstration fut appliqué dans des généralisations ultérieures dont il sera question plus loin.

Un pas en avant fait dans le domaine du problème considéré est dû à Ulam (voir Ulam [2]), qui montra (sans avoir recours à aucune hypothèse générale sur les nombres cardinaux) que la réponse est négative pour les nombres cardinaux m inférieurs au premier aleph inaccessible au sens large. La décomposition singulière de l'ensemble E sur laquelle la démonstration est basée sera dite ici *décomposition d'Ulam.* Elle diffère essentiellement de celle de Banach et Kuratowski (cf. Kuratowski [5]). Ulam montra en particulier que la réponse est négative pour la puissance du continu, cette puissance étant supposée inférieure aux alephs inaccessibles. Il y montra en outre que si la réponse est négative pour $m = 2^{\aleph_0}$, elle l'est aussi pour tout nombre cardinal m inférieur aux alephs inaccessibles au sens strict. Pour établir ce théorème, Ulam considérait à part le problème des mesures ne prenant que deux valeurs, 0 et 1, et il prouva (sans aucune hypothèse supplémentaire) que la réponse est négative également pour de telles mesures lorsque le nombre cardinal m est inférieur aux alephs inaccessibles au sens strict. Enfin, il y remarqua que le théorème suivant se présente pour les ensembles E de puissance $\aleph_1$:

Tous les sous-ensembles de E étant divisés en deux classes, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$, de façon qu'il y ait dans $\boldsymbol{M}$ au plus une infinité dénombrable de sous-ensembles disjoints, il existe dans $\boldsymbol{N}$ une suite $\{A_n\}$ telle que l'ensemble $E\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ est au plus dénombrable.

Sierpiński montra (voir Sierpiński [6]; cf. aussi [7], p. 152-159) que ce théorème subsiste pour tous les ensembles E de puissance inférieure aux alephs inaccessibles au sens large. C'est une généralisation du théorème d'Ulam sur l'inexistence de la mesure (pour le voir, on n'a qu'à désigner par $\boldsymbol{M}$ la classe des sous-ensembles de E de mesure positive et par $\boldsymbol{N}$ la classe de ceux de mesure nulle). Ce résultat de Sierpiński fut appliqué par Ulam (voir Ulam [3]) et par Sierpiński (voir Sierpiński [8] et [9]) pour démontrer l'existence de décompositions singulières de certains ensembles de nombres réels en une infinité indénombrable d'ensembles de II^me^ catégorie ou d'ensembles non-mésurables (voir aussi Kuratowski [5], p. 53, 54 et 59).

Maintes généralisations des théorèmes établis dans le travail [2] d'Ulam furent trouvées par Tarski [3]. En voici deux exemples (sous une forme plus restreinte que leurs énoncés originaux):

Le nombre cardinal m étant inférieur aux alephs inaccessibles au sens large, tout idéal dénombrablement additif et dénombrablement saturé dans un corps m-additif d'ensembles est m-additif.

Le nombre cardinal m étant inférieur aux alephs inaccessibles au sens strict, tout idéal premier dénombrablement additif dans un corps m-additif d'ensembles est m-additif.

D'autres généralisations dans le même ordre d'idées sont dues à Smith et Tarski [1]. En voici une (également dans une forme plus restreinte que son énoncé original):

Le nombre cardinal m étant inférieur aux alephs inaccessibles au sens large, si l'idéal I du corps de tous les sous-ensembles de E de puissance ne dépassant pas m satisfait aux conditions

(a) tout sous-ensemble de E composé d'un seul point appartient à I,

(b) toute famille de sous-ensembles de E qui n'appartiennent pas à I est au plus dénombrable,

E est somme d'une suite au plus dénombrable d'appartenant à I.

Dans les généralisations précitées de Sierpiński, Smith et Tarski des théorèmes de Banach, Kuratowski et Ulam, l'hypothèse de l'existence d'une mesure est remplacée par la condition qu'une certaine classe de sous-ensembles de E ne contienne que tout au plus une infinité dénombrable d'ensembles disjoints. La généralisation de Mazur (voir Mazur [2]) dont il sera question à présent prit une voie différente. Pour ne pas rappeler ici les définitions des termes intervenant dans l'énoncé de son théorème, nous n'en citons que le corollaire qui est une généralisation du théorème de Banach et de celui d'Ulam.

Soit μ une fonction réelle d'ensemble, définie dans la classe de tous les sous-ensembles de E de puissance inférieure aux alephs inaccessibles au sens large. Admettons que cette fonction est séquentiellement continue, c'est-à-dire

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

où la convergence de la suite $\{A_n\}$ d'ensembles est entendue comme dans la théorie des ensembles. Alors cette fonction est concentrée dans un sous-ensemble au plus dénombrable (c'est-à-dire qu'il existe un $A_0 \subset E$ tel que $\mu(A) = \mu(A \cap A_0)$ pour tout $A \subset E$ et que $\overline{\overline{A}}_0 \leqslant \aleph_0$).

Mazur se servit de ce corollaire pour montrer que, sous certaines hypothèses, la continuité séquentielle des fonctions définies dans les produits cartésiens indénombrables en implique la continuité ordinaire (par entourages).

Une autre généralisation des théorèmes précités de Banach et d'Ulam, à savoir concernant les mesures, est due à Marczewski et Sikorski [1]. La voici:

E étant un espace métrique de puissance inférieur aux alephs inaccessibles au sens large (strict), toute mesure (mesure ne prenant que les valeurs 0 et 1) définie dans le corps des sous-ensembles boréliens de E est concentrée dans un sous-ensemble séparable (composé d'un seul point).

Katětov généralisa ce théorème aux espaces non-métriques (voir son travail [1]).

Toutes les généralisations envisagées font intervenir directement ou indirectement l'existence d'une décomposition d'Ulam. Seul le cas de mesures aux valeurs 0 et 1, de même que celui de propositions correspondantes dans lesquelles il n'est pas question de mesures, se laissent démontrer sans faire intervenir cette décomposition. On ignore si les théorèmes envisagés subsistent sans l'hypothèse que les puissances sont inférieures aux alephs inaccessibles.

Le problème discuté (*) prit naissance dans la théorie de l'intégrale et de la mesure. Sa version concernant les mesures aux valeurs 0 et 1 semblait d'abord n'en être qu'un sous-produit indirect et secondaire, mais elle se montra pratiquement plus importante pour les applications. C'est ainsi par exemple que l'existence des mesures aux valeurs 0 et 1 est actuellement un problème fondamental de la théorie des représentations des algèbres de Boole. Les applications des théorèmes d'Ulam [2] et de ceux de Marczewski et Sikorski [1] sont envisagées dans le travail [2] de Sikorski.

Le problème de l'existence des mesures aux valeurs 0 et 1 se présente parfois tout à fait inopinément dans différents domaines des mathématiques, bien éloignés en apparence l'un de l'autre. Notons à titre d'exemple le problème de la forme des fonctionnelles linéaires dans l'espace de toutes les fonctions réelles définies dans un ensemble pourvu de la notion usuelle de convergence (voir Mazur [1]), celui de la forme des fonctionnelles à la fois additives et multiplicatives dans l'anneau de ces fonctions, celui de la forme des fonctionnelles à la fois additives et multiplicatives dans les produits cartésiens d'algèbres linéaires (voir Białynicki-Birula et Żelazko [1]) et certains problèmes concernant les produits de groupes (voir Ehrenfeucht et Łoś [1], Łoś [2]).

Le problème de l'existence des mesures aux valeurs 0 et 1 dans le corps de tous les sous-ensembles d'un ensemble se présente aussi dans les recherches portant sur les fondements des mathématiques. Pour simplifier les énoncés des théorèmes qui suivent, convenons de dire qu'un nombre cardinal m est *mesurable* lorsqu'il existe une mesure aux valeurs 0 et 1 dans le corps de tous les sous-ensembles de puissance m de E; en cas contraire, le nombre cardinal m sera dit non-mesurable.

Scott établit (voir Scott [1]) un théorème remarquable d'après lequel l'existence d'un ensemble E dont la puissance est un nombre cardinal mesurable entraîne celle des ensembles non-constructibles au sens de

Gödel. Rowbottom généralisa ce résultat (dans un travail non publié) en montrant que l'existence d'un nombre cardinal mesurable implique que la famille de tous les ensembles constructibles de nombres naturels est dénombrable. Gaifman [1] montra qu'elle implique, plus généralement encore, que α étant un nombre cardinal infini arbitraire, la famille de tous les ensembles constructibles de nombres ordinaux précédant α est de puissance au plus égale à α.

Les ensembles constructibles jouent, comme on sait, un rôle important dans la démonstration de la compatibilité de l'hypothèse du continu. Le théorème précité de Scott montre que la démonstration de Gödel [1] de la compatibilité de l'hypothèse du continu généralisée ne s'applique pas à la théorie des ensembles enrichie par l'axiome (P) de l'existence des nombres cardinaux mesurables. Plus récemment, Přikry [1] montra que la compatibilité des axiomes de la théorie des ensembles et de l'axiome (P) entraîne celle du même système d'axiomes augmenté en outre par la proposition: le plus petit aleph mesurable $\aleph_\vartheta$ satisfait à l'équation $2^{\aleph_\vartheta} = \aleph_{\vartheta+1}$. D'après certains résultats non publiés de Solovay, la compatibilité de l'axiome (P) implique que l'hypothèse du continu est à la fois indépendante de (P) et compatible avec (P).

Tous les nombres cardinaux inférieurs au premier aleph inaccessible au sens strict étant d'après le résultat précité d'Ulam (voir Ulam [2]) non-mesurables, le problème s'imposait s'il en est de même, ou non, de cet aleph. La solution se montra fort difficile et ne fut trouvée qu'en 1960 par Tarski [10], qui montra, en se servant de certains théorèmes de Hanf [2], que le premier aleph inaccessible au sens strict est également non-mesurable. Les résultats de Tarski permirent de se rendre compte de l'immensité du premier nombre cardinal mesurable (si ce nombre existe). Premières démonstrations de Tarski furent métamathématiques, mais Keisler et Tarski établirent bientôt (voir Keisler et Tarski [1]), sans recourir aux moyens métamathématiques, diverses propriétés des nombres mesurables et un théorème plus général sur la grandeur du premier nombre cardinal mesurable (supposé existant). Ce théorème mérite d'être envisagé ici de plus près, tant il est instructif pour qui veut s'imaginer l'extrême immensité du nombre en question.

Keisler et Tarski définirent dans leur travail [1] certaines opérations conduisant à partir des ensembles de nombres cardinaux à d'autres ensembles (plus vastes) de tels nombres et montrèrent que ces opérations, appliquées aux ensembles arbitraires de nombres non-mesurables, ne conduisent jamais au-delà d'eux. Il y appartient l'opération L qui, appliquée à un ensemble X de nombres cardinaux, conduit à l'ensemble $L(X)$ composé d'alephs $\mathfrak{m}$ dont les indices sont des nombres-limites ordinaux et pour lesquels il existe dans X un $\mathfrak{n}$ tel que tous les nombres cardinaux entre $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{m}$ appartiennent aussi à X. En particulier, si l'on prend pour X l'ensemble AC des alephs qui ne sont pas inaccessibles au sens large et si l'on range en une suite croissante $\Theta_0, \Theta_1, \ldots$ les alephs n'appartenant pas à AC, donc qui sont inaccessibles au sens large, l'ensemble $L(AC)$ se compose de tous les Θ_ξ tels que $\xi < \Theta_\xi$. Plus puissante que L, est l'opération M définie comme suit: $M(X)$ est l'ensemble des alephs $\mathfrak{m}$ aux indices qui sont des nombres-limites ordinaux et pour lesquels il existe un sous-ensemble Y de X tel que $\mathfrak{m} = \sup\{\mathfrak{n}: \mathfrak{n} \in Y\}$ et que l'ensemble $Y \cup \{\mathfrak{m}\}$ est fermé dans l'espace topologique ordonné des alephs. Si X se compose par exemple d'alephs aux indices n'étant pas des nombres-limites et d'alephs singuliers, le premier aleph n'appartenant pas à $M(X)$ est tel que toute suite croissante de nombres cardinaux qui converge vers lui contient, parmi ses termes, des nombres inaccessibles. Les opérations L et M sont en rapport avec la classification des nombres inaccessibles proposée par Mahlo déjà en 1911 (voir son travail [1]).

Or Keisler et Tarski montrèrent que non seulement les opérations L et M, mais aussi leur itérations transfinies $L^{(\nu)}$ et $M^{(\nu)}$, de même que les opérations

$$L^{(\infty)} = \bigcup_{\nu} L^{(\nu)} \quad \text{et} \quad M^{(\infty)} = \bigcup_{\nu} M^{(\nu)}$$

où la sommation s'étend sur tous les ν ordinaux, ne conduisent à partir des ensembles de nombres non-mesurables qu'à ceux de nombres non-mesurables. En particulier, les ensembles $L^{(\infty)}(AC)$ et $M^{(\infty)}(AC)$ ne se composent que de nombres non-mesurables et il en est de même pour les itérations des opérations $L^{(\infty)}$ et $M^{(\infty)}$.

Il suffit d'ailleurs d'établir ces propriétés pour l'opération M car $L^{(\infty)}(X) \subset M(X)$ quel que soit X.

On ne connaît à l'heure actuelle aucune raison qui prévaille en faveur da la possibilité d'admettre, sans risquer une contradiction, l'existence de nombres mesurables, pas plus qu'en faveur de l'incompatibilité de l'admettre.

A. Mostowski et *R. Sikorski*

Théorème sur les ensembles de première catégorie, Fundamenta Mathematicae 16 (1930), p. 395-398*.

Depuis 1929 environ, datent les recherches se proposant d'étendre la théorie descriptive des fonctions réelles de variable réelle, créée et dé-

---

* Voir p. 204.