Théorème sur les ensembles de première catégorie*

D'après un théorème élémentaire, *si, dans un espace métrique séparable, l'ensemble A est de I^{re} catégorie en chacun de ses points, il est tout entier un ensemble de I^{re} catégorie* (¹).

Je vais donner ici une démonstration de ce théorème qui est valable pour *chaque espace métrique*, qu'il soit séparable ou non. J'en indiquerai aussi plusieurs applications (²).

1. Démonstration. Soit E un espace métrique. Soit

$$S_1, S_2, \ldots, S_\alpha, \ldots \tag{1}$$

une suite transfinie de sphères (ouvertes) disjointes et assujetties aux conditions suivantes: 1° AS_α est de I^{re} catégorie, 2° la suite (1) est *saturée*, c.-à-d. qu'il n'existe aucune sphère X telle que $XS_\alpha = 0$, pour chaque α, et que XA soit de I^{re} catégorie.

Posons: $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_\alpha + \ldots$

Je dis que *l'ensemble $E - S$ est non-dense.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, cet ensemble, comme ensemble fermé, contiendrait une sphère X. Evidemment $XS_\alpha = 0$, pour chaque α. Donc, selon 2°, XA ne peut être de I^{re} catégorie et, à plus forte raison, XA ne peut être vide. Soit donc p un point de XA. Par hypothèse, A est de I^{re} catégorie au point p; il existe donc une sphère X_1 telle que $p \subset X_1 \subset X$ et que $X_1 \cdot A$ est de I^{re} catégorie. Mais ceci contredit la condition 2°, puisque $X_1 S_\alpha = 0$, quel que soit α.

---

* Commenté sur p. 345.

(¹) Espace *métrique* = espace où la distance est définie (voir Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, p. 94). L'espace est *séparable*, lorsqu'il contient une partie dense dénombrable. Un ensemble est dit *de I^{re} catégorie* (au sens de Baire), lorsqu'il est somme d'une série dénombrable d'ensembles non-denses; un ensemble X est dit *non-dense*, lorsque la fermeture de X, $\overline{X}$, ne contient aucune sphère. Un ensemble A est dit de I^{re} catégorie *au point p*, lorsqu'il existe un entourage G de p tel que l'ensemble AG est de I^{re} catégorie.

(²) Les principaux résultats de cette note ont été présentés à la Société Polonaise de Mathématique, Lwów le 26. X. 1929.

Ceci établi, il suffit de prouver que l'ensemble AS est de Ire catégorie.
Or, d'après 1°, on a

$$AS_\alpha = N_\alpha^1 + N_\alpha^2 + \ldots + N_\alpha^n + \ldots,$$

N_α^n étant non-dense et n étant un entier positif.

Posons:

$$N^n = N_1^n + N_2^n + \ldots + N_\alpha^n + \ldots$$

On a donc: $AS = N^1 + N^2 + \ldots + N^n + \ldots$ et notre théorème sera démontré dès que nous prouverons que *N^n est non-dense.*

Supposons, par contre, que N^n n'est pas non-dense. Il existe donc un ensemble ouvert H tel que

$$0 \neq H \subset \overline{N}^n. \tag{2}$$

L'ensemble H ne peut être contenu dans l'ensemble $E - S$, puisque ce dernier est non-dense. Il existe, par conséquent, une sphère S_α telle que

$$HS_\alpha \neq 0. \tag{3}$$

Or, on a l'identité

$$N^n = N_\alpha^n + \sum_{\xi \neq \alpha} N_\xi^n, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{N}^n = \overline{N}_\alpha^n + \overline{\sum_{\xi \neq \alpha} N_\xi^n} \subset \overline{N}_\alpha^n + \overline{\sum_{\xi \neq \alpha} S_\xi},$$

et en multipliant par S_α, il vient

$$\overline{N}^n \cdot S_\alpha \subset \overline{N}_\alpha^n \cdot S_\alpha + \overline{\sum_{\xi \neq \alpha} S_\xi} \cdot S_\alpha.$$

Les termes de la suite (1) étant des ensembles ouverts et disjoints, on a

$$\overline{\sum_{\xi \neq \alpha} S_\xi} \cdot S_\alpha = 0.$$

Donc

$$\overline{N}^n \cdot S_\alpha \subset \overline{N}_\alpha^n \cdot S_\alpha \subset \overline{N}_\alpha^n$$

d'où, en vertu de (2), $HS_\alpha \subset \overline{N}_\alpha^n$. Nous arrivons ainsi à la conclusion que l'ensemble $\overline{N}_\alpha^n$ contient un ensemble ouvert et non-vide (selon (3)), ce qui contredit l'hypothèse que N_α^n est non-dense.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

2. Le théorème entraîne la conséquence suivante (qui en présente d'ailleurs une généralisation): *A étant un ensemble arbitraire* (dans un espace métrique) *et A_1 désignant l'ensemble de points de A où A est de Ire catégorie, A_1 est un ensemble de Ire catégorie.*

En effet, A est en chaque point de A_1 de Ire catégorie, donc A_1, comme sous-ensemble de A, l'est, à plus forte raison. Selon le theorème précédent, A_1 est un ensemble de Ire catégorie.

3. En généralisant un théorème de Baire, M. Kuratowski (¹) a démontré l'énoncé suivant: *étant donnée une suite convergente de fonctions* $f_n(x)$ *continues et définies sur un espace métrique séparable et dont les valeurs appartiennent à un espace métrique arbitraire, les points de discontinuité de la fonction* $f(x) = \lim f_n(x)$ *constituent un ensemble de Ire catégorie.*

Les résultats que nous venons d'établir permettent d'omettre dans cet énoncé la condition que l'espace soit *séparable*. A ce but il suffit, dans le raisonnement de M. Kuratowski, au lieu d'appliquer le théorème du No 2 aux espaces séparables — de l'appliquer aux espaces métriques les plus généraux.

D'une façon analogue, on étend aux espaces métriques (séparables ou non) le théorème suivant (provenant aussi de Baire) (²): *chaque fonction représentable analytiquement, définie sur un espace métrique, est continue, lorsqu'on néglige les ensembles de Ire catégorie.*

4. On dit qu'un ensemble *A jouit de la propriété de Baire,* s'il n'existe aucune sphère dans laquelle l'ensemble A et son complémentaire soient tous deux en chaque point de deuxième catégorie.

Il résulte d'un raisonnement de M. Lebesgue (³) que la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles jouissant de la propriété de Baire jouit encore de cette propriété, si l'on suppose l'espace séparable. Or, cette dernière hypothèse peut être omise, lorsqu'on applique le théorème du No 2; le raisonnement de M. Lebesgue est alors valable pour chaque espace métrique, qu'il soit séparable ou non.

De là résulte aussitôt que *dans chaque espace métrique tous les ensembles de Borel jouissent de la propriété de Baire* (⁴).

(¹) Fundamenta Mathematicae 5 (1923), p. 80.

(²) cf. ibid., p. 82.

(³) Journal de Mathématique, S. 6, t. I, p. 186.

(⁴) Pour d'autres applications du théorème démontré ici à la propriété de Baire, voir la note de M. Kuratowski, publiée dans Studia Mathematica 16 (1930).