entre $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{m}$ appartiennent aussi à X. En particulier, si l'on prend pour X l'ensemble AC des alephs qui ne sont pas inaccessibles au sens large et si l'on range en une suite croissante $\Theta_0, \Theta_1, \ldots$ les alephs n'appartenant pas à AC, donc qui sont inaccessibles au sens large, l'ensemble $L(AC)$ se compose de tous les Θ_ξ tels que $\xi < \Theta_\xi$. Plus puissante que L, est l'opération M définie comme suit: $M(X)$ est l'ensemble des alephs $\mathfrak{m}$ aux indices qui sont des nombres-limites ordinaux et pour lesquels il existe un sous-ensemble Y de X tel que $\mathfrak{m} = \sup\{\mathfrak{n}: \mathfrak{n} \in Y\}$ et que l'ensemble $Y \cup \{\mathfrak{m}\}$ est fermé dans l'espace topologique ordonné des alephs. Si X se compose par exemple d'alephs aux indices n'étant pas des nombres-limites et d'alephs singuliers, le premier aleph n'appartenant pas à $M(X)$ est tel que toute suite croissante de nombres cardinaux qui converge vers lui contient, parmi ses termes, des nombres inaccessibles. Les opérations L et M sont en rapport avec la classification des nombres inaccessibles proposée par Mahlo déjà en 1911 (voir son travail [1]).

Or Keisler et Tarski montrèrent que non seulement les opérations L et M, mais aussi leur itérations transfinies $L^{(\nu)}$ et $M^{(\nu)}$, de même que les opérations

$$L^{(\infty)} = \bigcup_{\nu} L^{(\nu)} \qquad \text{et} \qquad M^{(\infty)} = \bigcup_{\nu} M^{(\nu)}$$

où la sommation s'étend sur tous les ν ordinaux, ne conduisent à partir des ensembles de nombres non-mesurables qu'à ceux de nombres non-mesurables. En particulier, les ensembles $L^{(\infty)}(AC)$ et $M^{(\infty)}(AC)$ ne se composent que de nombres non-mesurables et il en est de même pour les itérations des opérations $L^{(\infty)}$ et $M^{(\infty)}$.

Il suffit d'ailleurs d'établir ces propriétés pour l'opération M car $L^{(\infty)}(X) \subset M(X)$ quel que soit X.

On ne connaît à l'heure actuelle aucune raison qui prévaille en faveur da la possibilité d'admettre, sans risquer une contradiction, l'existence de nombres mesurables, pas plus qu'en faveur de l'incompatibilité de l'admettre.

A. Mostowski et *R. Sikorski*

Théorème sur les ensembles de première catégorie, Fundamenta Mathematicae 16 (1930), p. 395-398*.

Depuis 1929 environ, datent les recherches se proposant d'étendre la théorie descriptive des fonctions réelles de variable réelle, créée et dé-

---

* Voir p. 204.

veloppée surtout par Baire, Borel et Lebesgue, aux fonctions dont les variables et les valeurs appartiennent à des espaces topologiques plus généraux. Beaucoup de théorèmes sur les ensembles et les fonctions, concernant la notion de catégorie, les classes de Baire et autres, se laissèrent étendre aisément en admettant que les espaces considérés sont séparables. C'est ainsi par exemple qu'il fut facile de montrer que, dans un espace métrique séparable, tout ensemble qui est de I^re catégorie en chacun de ses points est de I^re catégorie tout court.

Par un raisonnement simple et élégant, Banach démontra ce théorème pour les espaces métriques quelconques, sans l'hypothèse de séparabilité. Sa démonstration se laisse transmettre aux espaces T_1, c'est-à-dire dans lesquels tous les ensembles se réduisant à un point sont fermés (voir Kuratowski [5], p. 49). Ce résultat de Banach fut d'importance capitale pour les recherches dont il est question (voir Kuratowski [2] et [3]; aussi Marczewski [1]) et dont les résultats trouvèrent place, entre autres, dans la monographie précitée de Kuratowski.

Un autre pas important en vue de se débarasser des hypothèses de séparabilité est dû à Montgomery (voir son travail [1] et Kuratowski [5], p. 264). L'application des moyens plus récents, tels que la notion d'espace paracompact, le théorème de A. H. Stone d'après lequel tout espace métrique est paracompact et le critère de métrisabilité de Nagata-Smirnov, permit (voir Engelking [1]) de simplifier les raisonnements assez compliqués de Montgomery.

En revenant sur la démonstration de Banach, il est à remarquer que pour affranchir cette démonstration non seulement de l'hypothèse de séparabilité, mais aussi de celle que l'espace est métrique, on n'a qu'à remplacer dans le raisonnement de Banach le mot „sphère" par les mots „ensemble ouvert"; le théorème se trouve alors démontré pour tout espace T_1. Plus encore, en modifiant légèrement cette démonstration, on arrive au théorème suivant qui est bien plus général: E étant un espace T_1, soit $\{X_\iota\}$ une famille quelconque d'ensembles situés dans E et ouverts dans leur somme $S = \bigcup_\iota X_\iota$; alors, si chacun des X_ι est de I^re catégorie, la somme S l'est également (voir Kuratowski [5], p. 49).

Kuratowski déduisit (voir son travail [3]) du théorème de Banach deux conséquences importantes sur la propriété de Baire.

D'après la première de ces conséquences, E étant un espace T_1, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $A \subset E$ ait la propriété de Baire est qu'il soit de la forme $A = (G \setminus P_1) \cup P_2$ où G est un ensemble ouvert et P_1 et P_2 sont des ensembles de I^re catégorie. En définissant la propriété de Baire par cette condition, on peut démontrer d'une façon très brève que les ensembles ayant cette propriété forment un corps (Kuratowski [5], p. 55).

D'après la seconde des conséquences en question, pour qu'une fonction f définie dans un espace métrique E et dont les valeurs sont des points d'un espace métrique séparable F ait la propriété de Baire (c'est-à- dire que la fonction partielle $f|E\setminus P$ soit continue pour un ensemble $P \subset E$ de I^re^ catégorie), il faut et il suffit que tout l'image réciproque $f^{-1}(U)$ où U est ouvert dans F ait la propriété de Baire. En définissant par cette condition la propriété de Baire des fonctions, on peut développer d'une manière élégante la théorie de ces fonctions et faire ressortir l'analogie entre elles et les fonctions mesurables (Kuratowski, op. cit., p. 306).

R. Engelking et *E. Marczewski*

Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen, Fundamenta Mathematicae 17 (1931), p. 283-295*.

Ce travail de Banach appartient à la série des recherches mentionnées au début du commentaire à sa publication [*31*] (voir ce volume, p. 343).

La fonction $y = f(x)$ transformant un espace métrique X en un espace métrique Y est dite de classe L^ξ lorsque l'image réciproque $f^{-1}(U)$ de tout sous-ensemble ouvert U de Y est de ξ-ème classe borélienne additive (voir Kuratowski [5], p. 282). Appelons les classes L^ξ *classes de Borel*.

Désignons par B^0 la classe de toutes les fonctions f continues et posons pour tout $\xi > 0$

$$B^\xi = \{f: f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ où } f_n \in B^{\xi_n} \text{ et } \xi_n < \xi\}.$$

Appelons les classes B^ξ *classes de Baire*.

On a $B^\xi \subset L^\xi$ pour tout ξ (voir *ibidem*, p. 293) et, si l'espace Y n'est pas connexe, $B^\xi \neq L^\xi$ (voir Hausdorff [4], p. 390). Or Kuratowski [3] (p. 281) montra que tout espace métrique Y peut être plongé topologiquement dans un espace métrique Y' tel que $B^\xi = L^\xi$ pour toute fonction f transformant X en Y'.

Banach introduisit dans le travail commenté d'autres classes de fonctions f, à savoir les classes b^ξ définies comme il suit: posons $b^1 = L^1$ et pour tout $\xi > 1$

$$b^\xi = \{f: f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ où } f_n \in b^{\xi_n} \text{ et } \xi_n < \xi\}.$$

D'après le théorème 1 de ce travail, si l'espace Y est séparable, on a $b^\xi = L^\xi$ aussi pour tout $\xi > 1$ et, d'après le théorème 2, si l'espace Y est en outre connexe par arcs, on a $B^\xi = L^\xi$ pour tout $\xi > 1$. D'après

* Voir p. 207.