D'après la seconde des conséquences en question, pour qu'une fonction f définie dans un espace métrique E et dont les valeurs sont des points d'un espace métrique séparable F ait la propriété de Baire (c'est-à- dire que la fonction partielle $f|E\setminus P$ soit continue pour un ensemble $P \subset E$ de Ire catégorie), il faut et il suffit que tout l'image réciproque $f^{-1}(U)$ où U est ouvert dans F ait la propriété de Baire. En définissant par cette condition la propriété de Baire des fonctions, on peut développer d'une manière élégante la théorie de ces fonctions et faire ressortir l'analogie entre elles et les fonctions mesurables (Kuratowski, op. cit., p. 306).

R. Engelking et *E. Marczewski*

Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen, Fundamenta Mathematicae 17 (1931), p. 283-295*.

Ce travail de Banach appartient à la série des recherches mentionnées au début du commentaire à sa publication [*31*] (voir ce volume, p. 343).

La fonction $y = f(x)$ transformant un espace métrique X en un espace métrique Y est dite de classe L^ξ lorsque l'image réciproque $f^{-1}(U)$ de tout sous-ensemble ouvert U de Y est de ξ-ème classe borélienne additive (voir Kuratowski [5], p. 282). Appelons les classes L^ξ *classes de Borel*.

Désignons par B^0 la classe de toutes les fonctions f continues et posons pour tout $\xi > 0$

$$B^\xi = \{f\colon f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ où } f_n \in B^{\xi_n} \text{ et } \xi_n < \xi\}.$$

Appelons les classes B^ξ *classes de Baire*.

On a $B^\xi \subset L^\xi$ pour tout ξ (voir *ibidem*, p. 293) et, si l'espace Y n'est pas connexe, $B^\xi \neq L^\xi$ (voir Hausdorff [4], p. 390). Or Kuratowski [3] (p. 281) montra que tout espace métrique Y peut être plongé topologiquement dans un espace métrique Y' tel que $B^\xi = L^\xi$ pour toute fonction f transformant X en Y'.

Banach introduisit dans le travail commenté d'autres classes de fonctions f, à savoir les classes b^ξ définies comme il suit: posons $b^1 = L^1$ et pour tout $\xi > 1$

$$b^\xi = \{f\colon f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ où } f_n \in b^{\xi_n} \text{ et } \xi_n < \xi\}.$$

D'après le théorème 1 de ce travail, si l'espace Y est séparable, on a $b^\xi = L^\xi$ aussi pour tout $\xi > 1$ et, d'après le théorème 2, si l'espace Y est en outre connexe par arcs, on a $B^\xi = L^\xi$ pour tout $\xi > 1$. D'après

* Voir p. 207.

une remarque de Banach (voir l'article en question, p. 209), on a $B^1 = L^1$ pour certains espaces vectoriels, en particulier pour ceux de type (B), appelés aujourd'hui universellement *espaces de Banach*. On ignore si la dernière égalité subsiste pour les espaces connexes par arcs, mais non-séparables et, plus généralement, pour les espaces Y connexes. Notons que cette égalité entraînerait aussitôt en vertu du théorème 1 que si l'espace Y est séparable, on a $B^\xi = L^\xi$ pour tout ξ.

Rolewicz [1] montra que, l'espace Y étant supposé séparable et connexe par arcs, la condition suffisante pour avoir l'égalité $B^1 = L^1$ est que toute fonction f qui est limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe B^1 soit également de cette classe; en d'autres termes, que la classe B^1 de fonctions soit fermée relativement à leur convergence uniforme. Il fut démontré (voir ibidem) que cette condition suffisante est satisfaite en particulier dans les espaces Y rétractifs, c'est-à-dire que toute sphère (intérieur et surface) de rayon suffisamment petit et située dans Y est un rétracte de Y. Or, comme le montra Borsuk, la classe de ces espaces est assez étroite: même parmi les espaces localement connexes par arcs, il y a des Y qui ne sont pas rétractifs.

S. Rolewicz

Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Mathematica 3 (1931), p. 174-179*.

Ce travail contient une démonstration fort simple que l'ensemble des fonctions n'ayant de dérivée finie de droite pour aucun t de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ est résiduel dans l'espace métrique de toutes les fonctions continues $x(t)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ avec la distance naturelle

$$d(x, y) = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)-y(t)|.$$

Le même théorème fut établi un peu plus tôt par Mazurkiewicz [1] (en réponse à une question posée par Steinhaus); il peut servir de démonstration qu'il existe des fonctions continues non différentiables en aucun point.

Le théorème de Mazurkiewicz et Banach fut une des premières applications de ce qu'on appelle *la méthode de catégorie* pour établir les théorèmes d'existence. Cette méthode consiste, comme pour l'existence de fonctions continues sans dérivée, dans le choix convenable d'un espace

* Voir p. 218.