Über die Höldersche Bedingung*

von

H. Auerbach und **S. Banach**

Wir beweisen in dieser Arbeit als Anwendung einer von Herrn S. Banach gleichzeitig veröffentlichten Methode (1) folgende zwei Sätze:

SATZ 1. *Sei $\omega(h)$ eine für $h > 0$ erklärte Funktion von der Eigenschaft, daß $\omega(h) > 0$ und $\lim\limits_{h\to 0}\omega(h) = 0$ ist. Ferner bezeichne E den Raum aller stetigen Funktionen $x(t)$ von der Periode 1. Abgesehen von gewissen $x(t)$, welche eine Menge erster Kategorie bilden, besitzt jedes x aus E die folgende Eigenschaft:*

Es ist

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{\omega(h)}\right| = +\infty$$

für alle t.

SATZ 2. *Es bezeichne H^{α} $(0 < \alpha \leqslant 1)$ den Raum aller Funktionen $x(t)$ von der Periode 1, welche der Hölderschen Bedingung*

$$|x(t+h)-x(t)| \leqslant |h|^{\alpha}$$

genügen. Abgesehen von gewissen $x(t)$, welche eine Menge erster Kategorie bilden, besitzt jedes x aus H^{α} die folgende Eigenschaft:

Es ist

$$\overline{\lim_{k\to+0}}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h^{\beta}}\right| = +\infty$$

für alle t und alle $\beta > \alpha$ (2).

---

* Commenté sur p. 349.

(1) S. Banach [*34*].

(2) Beispiele stetiger Funktionen, welche diese Eigenschaft für $\beta = 1$ besitzen, findet man in. S. Ruziewicz, *Sur les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée,* Annales de la Société Polonaise de Mathématique 7 (1928), p. 68-74, und A. Zygmund, *Uwaga o funkcjach nieróżniczkowalnych,* Mathesis Polska 4 (1929), p. 1-7.

Es wird hierbei vorausgesetzt, daß die Norm in E bzw. H^a als das Maximum von $|x(t)|$ erklärt ist.

Aus Satz 1 folgt, indem man $\omega(h) = 1/|\lg h|$ annimmt, daß mit Ausnahme gewisser $x(t)$, welche eine Menge erster Kategorie bilden, für jedes x aus E die Beziehung

$$\overline{\lim_{h\to+0}} \left| \frac{x(t+h)-x(t)}{h^a} \right| = +\infty$$

für alle t und alle $a > 0$ stattfindet. In dieser Form wurde der Satz von uns ursprünglich bewiesen. Die obige allgemeine Fassung verdanken wir einer brieflichen Mitteilung des Herrn S. Saks (¹).

Beweis von Satz 1. Wir nehmen zunächst an, daß, für alle $h > 0$, $h/\omega(h) < A < +\infty$ ist. In diesem Falle ergibt sich der Beweis durch Anwendung des Satzes 2 der zitierten Arbeit.

In der Tat ist E ein vektorieller, normierter und vollständiger Raum. Die Funktionaloperation

$$U(x, t, h) = \left| \frac{x(t+h)-x(t)}{\omega(h)} \right|$$

erfüllt offenbar die dort verlangten Bedingungen 1) und 2). Bezeichnet H die Menge der trigonometrischen Polynome des Argumentes $2\pi t$, so ist H eine überall dichte Teilmenge von E und für ein beliebiges Element w aus H hat man

$$U(w, t, h) = \left| \frac{w(t+h)-w(t)}{\omega(h)} \right| = \left| \frac{w(t+h)-w(t)}{h} \right| \frac{h}{\omega(h)} \leqslant A \operatorname{Max} |w'(t)|.$$

Um Funktionen $g(t)$ aus E zu bilden, welche den Bedingungen a), b) von Satz 2 a. a. O. genügen, kann man folgendermaßen verfahren:

Sei $\varphi(t)$ die den Bedingungen $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi(1/2) = 1/2$ genügende, im übrigen stetige und lineare Funktion von der Periode 1. Bezeichnen dann r, M beliebige positive Zahlen, so kann man $g(t) = r\varphi(nt)$ setzen, wo n eine hinreichend große natürliche Zahl bedeutet (²). Denn es ist $g(t)$ ein Element von E mit der Norm $\|g\| = r/2 < r$. Wie leicht ersichtlich, gibt es ferner zu jedem t ein h_t $(0 < h_t < 1/n)$, wofür $|\varphi[n(t+h_t)]-\varphi(nt)| \geqslant 1/4$, also

$$U(g, t, h_t) = r \left| \frac{\varphi(nt+nh_t)-\varphi(nt)}{\omega(h_t)} \right| \geqslant \frac{r}{4\omega(h_t)}$$

(¹) Über Beispiele stetiger Funktionen welche die in Satz 1 angegebene Eigenschaft besitzen, vgl. G. Faber, Mathematische Annalen 66 (1909), p. 81-94, und S. Ruziewicz, Studia Mathematica 3 (1931), p. 185-188.

(²) Herr S. Kaczmarz hat zuerst derartige Funktionen $g(t)$ benutzt.

ist. Es genügt also n so groß zu wählen, daß, für $0 < h < 1/n$, $\omega(h) < 4/rM$ gilt.

Damit ist der Satz bewiesen für den Fall, daß $h/\omega(h)$ beschränkt ist.

Wir nehmen jetzt an, daß

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{h}{\omega(h)} = +\infty$$

ist [1]. Dann gibt es eine nach Null konvergente Folge $\{h_p\}$ $(h_p > 0)$, für welche $\lim\limits_{p\to\infty} h_p/\omega(h_p) = +\infty$ ist. Nach § 1 a. a. O. hat man für jedes x aus E, welches nicht einer gewissen Menge erster Kategorie angehört,

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \left| \frac{x(t+h_p)-x(t)}{\omega(h_p)} \right| = +\infty,$$

also auch

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \left| \frac{x(t+h_p)-x(t)}{\omega(h_p)} \right| = \overline{\lim_{p\to\infty}} \left| \frac{x(t+h_p)-x(t)}{h_p} \right| \frac{h_p}{\omega(h_p)} = +\infty$$

und schließlich

$$\overline{\lim_{h\to +0}} \left| \frac{x(t+h)-x(t)}{\omega(h)} \right| = +\infty$$

für alle t.

B e w e i s v o n S a t z 2. Wir setzen $\beta_m = a+1/m$ und bezeichnen mit E_n^m die Menge aller $x(t)$ aus H^a, welche die folgende Eigenschaft haben:

Für wenigstens ein (von x abhängiges) t und alle $h > 0$ ist

$$\left| \frac{x(t+h)-x(t)}{h^{\beta_m}} \right| \leqslant n.$$

Wie leicht ersichtlich, sind die Mengen E_n^m $(m, n = 1, 2, \ldots)$ abgeschlossen. Es genügt offenbar zu zeigen, daß sie nirgends dicht sind.

Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, daß etwa die Menge E_N^M einen inneren Punkt enthält. D. h., es gibt eine Funktion $w(t)$ aus E_N^M und ein $r > 0$ derart, daß jedes x aus H^a, welches für alle t der Ungleichung $|x(t)-w(t)| < r$ genügt, ebenfalls in E_N^M enthalten ist.

Da wir jedes x aus H^a durch ein ebenfalls in H^a enthaltenes trigonometrisches Polynom des Argumentes $2\pi t$ — etwa eines seiner Féjerschen Polynome — beliebig genau approximieren können, dürfen wir annehmen,

---

[1] Da es nur auf das Verhalten für $h \to 0$ ankommt, sind damit alle Fälle erschöpft.

daß $w(t)$ ein derartiges Polynom ist. Wir können weiter voraussetzen, daß $w(t)$ einer Ungleichung

$$|w(t+h)-w(t)| \leqslant c\,|h|^{\alpha}$$

mit $0 < c < 1$ genügt, da man dies durch Multiplikation mit einer hinreichend wenig von 1 kleineren Konstanten erreichen kann.

Man hat für jedes t und jedes $h > 0$

$$\left|\frac{w(t+h)-w(t)}{h^{\beta_M}}\right| = \left|\frac{w(t+h)-w(t)}{h}\right| |h|^{1-\beta_M} \leqslant A,$$

wo A eine obere Schranke von $|w'(t)|$ und $|w(t+h)-w(t)|$ bedeutet.

Um zu einem Widerspruch zu gelangen, genügt es eine stetige Funktion $g(t)$ von der Periode 1 zu konstruieren, so daß

1° $|g(t+h)-g(t)| \leqslant (1-c)\,|h|^{\alpha}$,

2° zu jedem t gibt es ein $h_t > 0$, wofür

$$\left|\frac{g(t+h_t)-g(t)}{h_t^{\beta_M}}\right| > N+A,$$

3° $\|g(t)\| < r$.

Denn setzt man $x(t) = w(t)+g(t)$, so ist wegen 1°

$$\begin{aligned}|x(t+h)-x(t)| &\leqslant |w(t+h)-w(t)|+|g(t+h)-g(t)| \\ &\leqslant c\,|h|^{\alpha}+(1-c)\,|h|^{\alpha} = |h|^{\alpha},\end{aligned}$$

und wegen 2°

$$\left|\frac{x(t+h_t)-x(t)}{h_t^{\beta_M}}\right| \geqslant \left|\frac{g(t+h_t)-g(t)}{h_t^{\beta_M}}\right| - A > N.$$

D. h., x ist ein Element von H^{α}, welches in E_N^M nicht enthalten ist, trotzdem nach 3° $\|x-w\| < r$ gilt.

Es bezeichne wieder $\varphi(t)$ die im Beweise von Satz 1 benutzte stückweise lineare Funktion. Für $|h| \leqslant 1$ ist offenbar

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leqslant |h| \leqslant |h|^{\alpha}.$$

Wegen $|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leqslant 1/2$ gilt diese Ungleichung auch für $|h| > 1$.

Wählt man eine der Ungleichung $\alpha < \gamma < \beta_M$ genügende Zahl γ und setzt

$$g(t) = \frac{1}{n^{\gamma}}\,\varphi(nt),$$

so erfüllt diese Funktion $g(t)$ die Forderungen 1°, 2°, 3°, wenn n eine hinreichend große natürliche Zahl ist.

Denn man hat

$$|g(t+h)-g(t)| = \frac{\varphi(nt+nh)-\varphi(nt)}{n^\gamma} \leqslant \frac{n^\alpha |h|^\alpha}{n^\gamma} = \frac{1}{n^{\gamma-\alpha}} |h|^\alpha.$$

Zu einem jeden t gibt es, wie wir schon wissen, ein h_t $(0 < h_t < 1/n)$ derart, daß $|\varphi(nt+nh_t)-\varphi(nt)| \geqslant 1/4$, also

$$\left|\frac{g(t+h_t)-g(t)}{h_t^{\beta M}}\right| \geqslant \frac{1}{4n^\gamma |h_t|^{\beta M}} > \frac{1}{4n^\gamma \frac{1}{n^{\beta M}}} = \frac{1}{4} n^{\beta M-\gamma}$$

ist.

Endlich ist

$$\|g(t)\| = \frac{1}{n^\gamma} \|\varphi(nt)\| = \frac{1}{2n^\gamma}.$$

Es genügt also n so groß zu wählen, daß $1/n^{\gamma-\alpha} \leqslant 1-c$, $\frac{1}{4} n^{\beta M-\gamma} > N+A$ und $1/2n^\gamma < r$ ist.