métrique complet E et dans la démonstration que l'ensemble des points ayant une certaine propriété y est résiduel, donc sûrement pas vide (ce qui prouve l'existence des points qui ont cette propriété).

Les travaux en question de Mazurkiewicz et de Banach inaugurèrent une série des recherches des mathématiciens polonais où la méthode de catégorie, appliquée en diverses variantes, fut employée pour démontrer l'existence des fonctions continues ayant diverses singularités (voir les travaux d'Auerbach et Banach [*35*], commenté ici p. 346, de Kaczmarz [1], d'Orlicz [3] et [4], de Tarnawski [1]-[3]).

Au même cycle de problèmes vint se rattacher le résultat remarquable de Saks (voir Saks [5]) d'après lequel l'ensemble des fonctions non différentiables au sens de Besicovitch, c'est-à-dire n'ayant en aucun point de dérivée ni à droite, ni à gauche, ni finie, ni infinie, est de I^{re} catégorie dans l'espace des fonctions continues, par opposition à l'ensemble des fonctions non différentiables au sens ordinaire, c'est-à-dire n'ayant de dérivée finie en aucun point.

Les résultats de Banach et de Saks furent développés par Jarník (voir par exemple ses travaux [1] et [2]).

Comme on sait, la méthode de catégorie trouva aussi de nombreuses applications dans d'autres disciplines des mathématiques, notamment dans la topologie, dans la théorie des fonctions analytiques et dans l'analyse fonctionnelle.

W. Orlicz

H. Auerbach et —, *Über die Höldersche Bedingung*, Studia Mathematica 3 (1931), p. 180-184*.

Les résultats établis par Banach dans son travail [*34*] (ce volume, p. 218 et le commentaire p. 348) sont appliqués dans le travail faisant l'objet du présent commentaire pour démontrer que l'ensemble des fonctions continues $x(t)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ telles que

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{\omega(h)}\right| = +\infty$$

pour tout t y est résiduel. Ici ω est une fonction quelconque telle que $h > 0$ entraîne $\omega(h) > 0$ et que $h \to +0$ entraîne $\omega(h) \to 0$. Le théorème précité de Mazurkiewicz en est un cas particulier pour $\omega(h) = h$.

* Voir p. 223.

Plus généralement, en considérant l'espace H^{α} où $0 < \alpha \leqslant 1$ des fonctions satisfaisant à la condition de Hölder $|x(t+h)-x(t)| \leqslant ch^{\alpha}$, il y est démontré que excepté un ensemble de I^re^ catégorie de valeurs de t, on a

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h^{\beta}}\right| = +\infty$$

pour tout t et tout $\beta > \alpha$. Il en résulte en particulier que l'ensemble des fonctions non différentiables nulle part et satisfaisant à la condition de Hölder avec un exposant $\alpha < 1$ donné est résiduel dans l'espace C.

Un problème assez proche est celui de certaines intégrales singulières. Kaczmarz [1] démontra que celles des modules du type de Dini divergent partout pour les fonctions continues excepté pour un ensemble de ces fonctions qui est de I^re^ catégorie dans l'espace C.

Parmi des travaux ultérieurs appartenant à cet ordre d'idées, sont à noter avant tout ceux d'Orlicz [4], de Tarnawski [2] et [3] et de Saks [5], mentionnés dans le commentaire au travail [*34*] de Banach (voir ce volume, p. 348).

Z. Zahorski

Sur les transformations biunivoques, Fundamenta Mathematicae 19 (1932), p. 10-16*.

Les constructions qui constituent le procédé de démonstration des théorèmes 1 et 2 de ce travail furent soumises plus tard à des modifications et généralisations dans les travaux de Halmos et von Neumann [1], lemme 10, de Hulanicki [1] et de Sierpiński [5], [12] et [23]). Elles furent appliquées dans deux premiers de ces travaux à la théorie de la mesure.

Il y eut aussi des recherches apportant des théorèmes et constructions de tendance opposée. On y étudiait par exemple les ensembles presque disjoints de chacune de leur image de translation (voir Ruziewicz et Sierpiński [1] et Sierpiński [29]) ou bien on démontrait que $\aleph$ final de l'énoncé du théorème 1 ne peut pas y être remplacé par $\aleph_0$ (voir Trzeciakiewicz [1]), résultat qui fut redécouvert par P. Lax (voir Erdös [1], p. 646); cf. aussi Scott et Sonneborn [1].

Jan Mycielski

---

* Voir p. 228.