

Sur les transformations biunivoques*

Dans ce qui va suivre E désigne un ensemble quelconque, F une famille de transformations biunivoques dont les domaines et contre-domaines sont des sous-ensembles de E . Nous supposons que l'ensemble E et la famille F ont la même puissance $\aleph > \aleph_0$. Soit ϑ le plus petit nombre ordinal appartenant à la puissance \aleph .

§ 1

LEMME. *Il existe une suite $\{H_\alpha\}$ ($1 \leq \alpha < \vartheta$) de sous-ensembles de E satisfaisant aux conditions suivantes:*

- 1) *Les ensembles H_α sont non vides et disjoints.*
- 2) $E = \sum_{1 \leq \alpha < \vartheta} H_\alpha$.
- 3) *Pour tout $\xi < \vartheta$ l'ensemble $\sum_{\alpha \leq \xi} H_\alpha$ est de puissance $< \aleph$.*
- 4) *T étant une transformation quelconque appartenant à F et D le domaine de T , il existe un nombre ordinal $\xi < \vartheta$ de sorte que*

$$T(D \cdot H_\alpha) \subset H_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha > \xi \quad (1).$$

Démonstration. Soient

- (1) $x_1, x_2, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\alpha, \dots \quad (\alpha < \vartheta),$
- (2) $T_1, T_2, \dots, T_\omega, T_{\omega+1}, \dots, T_\alpha, \dots \quad (\alpha < \vartheta)$

l'ensemble E resp. F bien ordonné suivant le type ordinal ϑ .

Nous allons définir par induction transfinie une suite partielle de (1):

- (3) $y_1, y_2, \dots, y_\omega, y_{\omega+1}, \dots, y_\alpha, \dots \quad (\alpha < \vartheta)$

de la manière suivante:

* Commenté sur p. 350.

(1) $T(N)$ désigne l'image de l'ensemble N .

Soit $y_1 = x_1$. Pour $1 < \alpha < \vartheta$, soit y_α le premier élément de la suite (1) jouissant de la propriété suivante:

Quels que soient les nombres ordinaux $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ inférieurs à α et les entiers n_1, n_2, \dots, n_k (k fini), l'expression $T_{\alpha_1}^{n_1}, T_{\alpha_2}^{n_2}, \dots, T_{\alpha_k}^{n_k}(y_{\alpha_0})$ ⁽¹⁾ représente un élément de E différent de y_α (à moins qu'elle n'en représente aucun).

L'élément y_α est ainsi défini pour tout $\alpha < \vartheta$. En effet, soit \aleph' la puissance correspondante au nombre ordinal α . On a évidemment $\aleph' < \aleph$. Il est aisé de voir que l'ensemble des éléments x de la forme

$$(4) \quad x = T_{\alpha_1}^{n_1}, T_{\alpha_2}^{n_2}, \dots, T_{\alpha_k}^{n_k}(y_{\alpha_0})$$

est de puissance

$$\aleph_0(\aleph'^2 + \aleph'^3 + \dots) < \aleph.$$

Il existe donc bien des éléments de E différents de tous les éléments représentés par (4). Remarquons encore, que les éléments de la suite (3) ainsi définie sont tous différents. En effet, en vertu de l'identité $y_\alpha = T^0(y_\alpha)$, l'élément y_α est différent de tous les éléments qui le suivent.

Désignons par W_α ($1 < \alpha < \vartheta$) l'ensemble des éléments x représentés par (4) (les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ et n_1, n_2, \dots, n_k ayant toujours le même sens).

Posons

$$(5) \quad H_1 = W_1, \quad H_\alpha = W_{\alpha+1} - W_\alpha \quad (1 < \alpha < \vartheta).$$

On a évidemment $W_{\alpha'} \subset W_\alpha$ pour $1 < \alpha' < \alpha < \vartheta$. Par conséquent les ensembles H_α sont disjoints. Ces ensembles sont de plus non vides. En effet, l'élément y_α n'est pas, par définition, contenu dans W_α , mais en vertu de $y_\alpha = T^0(y_\alpha)$ il est contenu dans $W_{\alpha+1}$, donc aussi dans H_α . Evidemment $y_1 \in H_1$.

On a pour $1 \leq \alpha < \vartheta$

$$(6) \quad W_{\alpha+1} = \sum_{\xi < \alpha} H_\xi.$$

Cela résulte aisément par induction transfinie des équations (5) en vertu de l'égalité $W_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} W_\xi$, valable pour chaque nombre ordinal α limite.

⁽¹⁾ T^n est la n -ème itération de la transformation T pour $n > 0$ et la n -ème itération de la transformation inverse T^{-1} pour $n < 0$. T^0 est la transformation identique.

Il se peut évidemment qu'une itération n'existe pas, car le domaine et le contre-domaine peuvent être différents.

Les ensembles W_a étant de puissance $< \aleph$, il en est de même en vertu de (6) aussi de H_a et de $\sum_{\xi < a} H_\xi$ ($a < \vartheta$).

Soit x un élément quelconque de E . Parmi les éléments qui suivent x dans la suite (1) il y a nécessairement un élément y_a de la suite (3). On a par définition de y_a et de W_a : $x \in W_a \subset W_{a+1}$, donc en vertu de (6) $x \in \sum_{\xi < \vartheta} H_\xi$.

Supposons que $1 \leq \xi < a < \vartheta$ et désignons par D_ξ le domaine de la transformation T_ξ . Nous allons prouver que $T_\xi(D_\xi H_a) \subset H_a$.

Soit x un élément de $D_\xi H_a$. Alors $x \in H_a$, donc $x \in W_{a+1}$, mais $x \notin W_a$.

Par conséquent $x = T_{a_1}^{n_1}, T_{a_2}^{n_2}, \dots, T_{a_k}^{n_k}(y_{a_0})$, les nombres ordinaux a_0, a_1, \dots, a_k étant $< a+1$ et n_1, n_2, \dots, n_k désignant des entiers.

On a

$$T_\xi(x) = T_\xi, T_{a_1}^{n_1}, T_{a_2}^{n_2}, \dots, T_{a_k}^{n_k}(y_{a_0}).$$

Comme $\xi < a$, on a $T_\xi(x) \subset W_{a+1}$. Si l'on avait $T_\xi(x) \subset W_a$, on pourrait écrire

$$T_\xi(x) = T_{a_1}^{\bar{n}_1}, T_{a_2}^{\bar{n}_2}, \dots, T_{a_r}^{\bar{n}_r}(y_{a_0}^-)$$

d'où

$$x = T_\xi^{-1}, T_{a_1}^{\bar{n}_1}, \dots, T_{a_r}^{\bar{n}_r}(y_{a_0}^-),$$

$\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$ étant des nombres ordinaux $< a$. Il en résulterait, en vertu de $\xi < a$, que $x \in W_a$, ce qui est impossible.

L'élément $T_\xi(x)$ n'est donc pas contenu dans W_a et, comme $T_\xi(x) \subset W_{a+1}$, il vient $T_\xi(x) \subset H_a$. Cela étant vrai pour tout x de $D_\xi H_a$, on a

$$(7) \quad T_\xi(D_\xi H_a) \subset H_a \quad (\xi < a).$$

Les ensembles H_a satisfont donc à toutes les conditions de notre lemme.

THÉORÈME 1. *Il existe un ensemble $G \subset E$ jouissant des propriétés suivantes:*

- 1) *Les ensembles G et $CG = E - G$ ont la puissance \aleph ;*
- 2) *T étant une transformation quelconque appartenant à F et D son domaine, les ensembles*

$$T(DG) - G \quad \text{et} \quad T(D \cdot CG) - CG$$

sont de puissance $< \aleph$.

Démonstration. Nous décomposons l'ensemble des nombres ordinaux $< \vartheta$ en deux classes disjointes K_1 et K_2 , chacune de puissance \aleph . Soit $G = \sum_{a \in K_1} H_a$, les ensembles H_a étant ceux du lemme précédent.

L'ensemble G et son complémentaire $CG = \sum_{\alpha \in K_1} H_\alpha$ ont évidemment la puissance \aleph . Pour une transformation quelconque $T = T_\xi$ on a d'après la formule (7)

$$T_\xi(D_\xi H_\alpha) \subset H_\alpha \quad (\alpha > \xi).$$

L'ensemble $W_{\xi+1} = \sum_{\alpha \leq \xi} H_\alpha$ (cf. (6)) est d'une puissance $< \aleph$. On démontre de même que $T(D_\xi \cdot CG) - CG$ est d'une puissance $< \aleph$.

Remarque 1. Soit E l'ensemble des points d'une segment. En admettant l'hypothèse du continu, on peut affirmer l'existence d'un ensemble G satisfaisant aux conditions du théorème 1 et non mesurable.

Il suffit de montrer que l'on peut choisir la classe K_1 de manière que l'ensemble $\sum_{\alpha \in K_1} H_\alpha$ soit non mesurable.

En effet, dans le cas contraire on pourrait attribuer à chaque ensemble K des nombres ordinaux $< \vartheta$ un nombre réel mK (égal à la mesure de l'ensemble $\sum_{\alpha \in K} H_\alpha$) de sorte que

1) $mK \geq 0$,

2) pour toute suite dénombrable $\{K_n\}$ d'ensembles disjoints de nombres ordinaux $< \vartheta$ on a

$$\sum mK_n = m \sum K_n,$$

3) pour l'ensemble K_0 de tous les nombres ordinaux $< \vartheta$ on a $mK_0 > 0$.

Or, il résulte d'un théorème démontré par M. Kuratowski et moi ⁽¹⁾ que cela est impossible.

Il existe donc un ensemble K de nombres ordinaux pour lequel l'ensemble linéaire $G = \sum_{\alpha \in K} H_\alpha$ est non mesurable. Il est aisé de vérifier que cet ensemble satisfait aux conditions du théorème 1. En particulier, l'ensemble CG est, lui aussi, non mesurable et, par conséquent, de la puissance du continu (toujours en admettant l'hypothèse du continu).

Remarque 2. Si l'on suppose dans le théorème 1 que toutes les transformations de la famille F transforme l'ensemble E en lui-même, alors l'ensemble G jouit de la propriété suivante:

Les ensembles $T(G) - G$ et $G - T(G)$ sont de puissance $< \aleph$ pour tout $T \in F$.

Cela résulte du théorème 1 en vertu des égalités $D = E$ (d'où $DG = G$) et $T(G) + T(CG) = E$.

(1) Voir S. Banach et C. Kuratowski [24].

THÉORÈME 2 ⁽¹⁾. *Les ensembles E et F ayant le même sens qu'auparavant, il existe un sous-ensemble M de E de puissance \aleph satisfaisant à la condition suivante:*

Si T_1 et T_2 sont deux transformations de F définies dans D_1 respectivement D_2 , si de plus $M = R + S$ est une décomposition quelconque de l'ensemble M en deux ensembles disjoints, alors l'ensemble

$$T_1(D_1 R) \cdot T_2(D_2 S)$$

est d'une puissance $< \aleph$.

Démonstration. Soit M un ensemble quelconque ayant avec chaque ensemble H_α de notre lemme un point commun et un seul. Il existe, en vertu du même lemme, un nombre ordinal ξ pour lequel

$$(1) \quad T_1(D_1 H_\alpha) \subset H_\alpha \quad \text{et} \quad T_2(D_2 H_\alpha) \subset H_\alpha \quad (\alpha > \xi).$$

Posons

$$R' = R - \sum_{\alpha \leq \xi} H_\alpha, \quad S' = S - \sum_{\alpha \leq \xi} H_\alpha.$$

On a alors

$$T_1(D_1 R') \cdot T_2(D_2 S') = 0.$$

En effet, supposons que ce produit contienne un point Z . Alors pour un certain $x \in D_1 R'$ et un certain $y \in D_2 S'$ on a $T_1(x) = T_2(y) = Z$. Il en résulte par définition de R' et S' qu'il existe un $\alpha > \xi$ tel que $x \in H_\alpha$, $y \in H_\alpha$ et $Z \in H_\alpha$. Mais cela est impossible. l'ensemble M n'ayant avec chaque H_α qu'un seul point commun.

L'ensemble $\sum_{\alpha \leq \xi} H_\alpha$ étant de puissance $< \aleph$, notre théorème est démontré.

§ 2

1. Soient E l'ensemble des points d'une circonférence de rayon 1 et F la famille de toutes les rotations de cette circonférence autour de son centre. En admettant l'hypothèse du continu on conclut à l'aide du théorème 1 et des remarques 1 et 2 que:

Il existe sur la circonférence un ensemble G non mesurable qui est transformé par chaque rotation en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points.

⁽¹⁾ Ce théorème est une généralisation d'un lemme de M. Sierpiński, publié dans *Fundamenta Mathematicae* 19 (1932). Voir *Sur un problème concernant les types de dimensions*.

Par conséquent,

il existe une fonction $\varphi(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) non mesurable remplissant la condition suivante: quelle que soit la suite $\{\varepsilon_n\}$ tendant vers zéro, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x + \varepsilon_n) = \varphi(x)$$

abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable ⁽¹⁾.

Désignons par x l'arc de la circonférence compté à partir d'un point fixe dans le sens positif et posons $\varphi(x) = 1$ ou $\varphi(x) = 0$ suivant que le point correspondant appartient ou non à l'ensemble G . Il est aisé de vérifier que cette fonction a la propriété demandée.

La question, si une fonction de ce genre existe, a été posée par M. Auerbach ⁽²⁾.

2. Soit E l'ensemble des points du segment $(0, 1)$ et F la famille de toutes les transformations biunivoques et bicontinues dont les domaines et les contre-domaines sont des ensembles $G_\delta \subset E$. La classe des ensembles G_δ étant de la puissance du continu, F l'est aussi.

Si $M \subset E$ et si $f(x)$ est une transformation quelconque biunivoque et bicontinue de l'ensemble M en un sous-ensemble de E , il existe en vertu d'un théorème de M. Lavrentieff ⁽³⁾ une transformation T de F , dont le domaine contient l'ensemble M , telle que

$$T(x) = f(x) \quad (x \in M).$$

On voit donc que chaque sous-ensemble de l'intervalle $(0, 1)$ homéomorphe à M est l'image de l'ensemble M fournie par une transformation de F . Il résulte donc du théorème 1:

L'intervalle $(0, 1)$ contient un ensemble qui est, ainsi que son complémentaire, de la puissance du continu et qui contient chaque ensemble homéomorphe à un quelconque de ses sous-ensembles, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance inférieure à celle du continu.

⁽¹⁾ D'après une remarque de M. Sierpiński, on peut démontrer sans admettre l'hypothèse du continu le théorème qu'on obtient du théorème du texte en y remplaçant les mots „au plus dénombrable“ par les mots „de puissance inférieure à celle du continu“. Voir *Fundamenta Mathematicae* 19 (1932), p. 24 ss.

⁽²⁾ Quant aux fonctions mesurables voir H. Auerbach, *Sur la relation* $\lim_{h_n \rightarrow 0} f(x + h_n) = f(x)$, *Fundamenta Mathematicae* 11 (1928), p. 193-197.

⁽³⁾ M. Lavrentieff, *Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes*, *Fundamenta Mathematicae* 6 (1924), p. 149-160. C'est grâce à une remarque de M. Kuratowski que j'ai été conduit à employer ici le théorème de M. Lavrentieff.