Sur les séries lacunaires*

Introduction. Soit $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ un système orthogonal normé tel que $|x_n(t)| < M$ $(n = 1, 2, \ldots)$. On a alors le théorème:

THÉORÈME 1. *Il existe une suite partielle $\{\overline{x}_n(t)\}$ de $\{x_n(t)\}$ qui jouit de la propriété suivante:*

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{x}_n(t)$$

converge en moyenne avec toute puissance $p \geqslant 1$.

La démonstration est donnée au § 4.

Supposons que le système $\{x_n(t)\}$ soit complet.

THÉORÈME 2. *Soit $y(t)$ une fonction remplissant pour un $q > 1$ la condition*

$$\int_0^1 |y(t)|^q dt < \infty$$

et telle que son développement formel suivant le systéme $\{x_n(t)\}$ soit de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \overline{x}_n(t).$$

Alors

$$\int_0^1 |y(t)|^p dt < \infty$$

pour chaque $p \geqslant 1$.

§ 1. Nous nous servons dans la suite du théorème suivant [1]: Etant donné un nombre $p > 2$, deux constantes A, B existent de

---

* Commenté sur p. 351.

[1] S. Banach et S. Saks [27].

manière que, pour toute paire de fonctions $x(t), y(t)$ qui remplissent les conditions

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty, \qquad \int_0^1 |y(t)|^p dt < \infty$$

on a l'inégalité

$$\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p dt \leqslant \int_0^1 |x(t)|^p dt + p\int_0^1 |x(t)|^{p-2} x(t)\, y(t)\, dt +$$
$$+A\int_0^1 |y(t)|^p dt + B\sum_{j=2}^{E(p)} \int_0^1 |x(t)|^{p-j} |y(t)|^j dt \text{ [1]}.$$

§ 2. Soit $\{x_n(t)\}$ un système orthogonal remplissant l'hypothèse du théorème 1.

En désignant par r un entier quelconque et par $a_1, \ldots, a_r, E(p)$ des nombres réels où $p > 2$, posons

$$f_n(a_1, \ldots, a_r) = \int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^r a_i x_i(t)\Big|^{p-2} \Big(\sum_{i=1}^r a_i x_i(t)\Big)\, x_n(t)\, dt. \tag{1}$$

Il est aisé de voir que la suite $\{f_n(a_1, \ldots, a_r)\}$ tend uniformément vers zéro avec $1/n$ dans la sphère $\sum_{i=1}^r a_i^2 \leqslant 1$.

Il existe donc un entier $\varphi(r)$ tel que

$$\Big|\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^r a_i x_i(t)\Big|^{p-2} \Big(\sum_{i=1}^r a_i x_i(t)\Big)\, x_n(t)\, dt\Big| \leqslant \frac{1}{r} \tag{2}$$

pourvu que

$$n \geqslant \varphi(r) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r a_i^2 \leqslant 1.$$

§ 3. Définissons maintenant une suite $\{r_n\}$ de la manière suivante: Posons $r_1 = 1$ et soit r_{n+1} le plus grand des nombres $1+r_n$ et $\varphi(r_n)$. On a évidemment $r_1 < r_2 < \ldots$

Désignons par $\{a_i\}$ une suite qui remplit la condition

$$\sum_{i=1}^\infty a_i^2 \leqslant 1,$$

---

[1] $E(p)$ est le plus grand nombre naturel $\leqslant p$.

d'ailleurs quelconque. La série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{r_i}(t)$ converge en moyenne vers une fonction $x(t)$ à carré sommable. Nous prouverons que

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt < C, \tag{3}$$

le nombre C étant indépendant de la suite $\{a_i\}$. En effet, en posant

$$s_n(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{r_i}(t)$$

on a, d'après le § 1,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |s_{n+1}(t)|^p dt \leqslant \int_0^1 |s_n(t)^p dt + p a_{n+1} \int_0^1 |s_n(t)|^{p-2} s_n(t) x_{r_{n+1}}(t) dt + \\ + A\,|a_{n+1}|^p \int_0^1 |x_{r_{n+1}}(t)|^p dt + \\ + B \sum_{j=2}^{E(p)} |a_{n+1}|^j \int_0^1 |s_n(t)|^{p-j} |x_{r_{n+1}}(t)|^j dt.\end{aligned}$$

On voit en vertu de (2) et de la définition des nombres r_i que la valeur absolue de la seconde intégrale est moindre que $1/r_n \leqslant 1/n$.

Comme

$$\int_0^1 |x_{r_{n+1}}(t)|^j dt \leqslant M^j \leqslant M^p \qquad (j \leqslant p)$$

(évidemment $M \geqslant 1$ en vertu de $\int_0^1 x_n^2(t)\,dt = 1$) et

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 |s_n(t)|^{p-j} dt \leqslant 1 + \int_0^1 |s_n(t)|^p dt \\ |a_{n+1}|^j \leqslant a_{n+1}^2\end{aligned}\right\} \qquad (2 \leqslant j \leqslant p),$$

il vient

$$\int_0^1 |s_{n+1}(t)|^p dt \leqslant (1 + BpM^p a_{n+1}^2) \int_0^1 |s_n(t)|^p dt + \frac{p\,|a_{n+1}|}{n} + AM^p a_{n+1}^2.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|/n$ remplissant l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{n+1}|}{n} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

on en conclut aisément l'existence du nombre C.

Si l'on ne suppose plus que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \leqslant 1$ on a encore, d'après (3)

$$\Big(\int_0^1 |x(t)|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\Big)^{1/2} = C\Big(\int_0^1 x^2(t)\,dt\Big)^{1/2}.$$

On a en particulier, pour toute suite finie $\{\gamma_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, l'inégalité

$$\Big(\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_{r_i}(t)\Big|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2\Big)^{1/2}$$

qui montre que la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{r_i}(t)$ converge en moyenne avec la p-ème puissance si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$.

Nous dirons que la suite partielle $\{x_{r_n}(t)\}$ satisfait à la condition C_p lorsque l'inégalité $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ entraîne la convergence en moyenne avec la p-ème puissance de la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{r_i}(t)$.

§ 4. Soit $\{p_j\}$ $(2 < p_1 < p_2 < \ldots)$ une suite tendant vers l'infini. En vertu du paragraphe précédent, il existe une suite partielle $\{x_{r_n}\}$ qui satisfait à la condition C_{p_1}. Posons $x_{r_n} = x_n^{(1)}$.

La suite $\{x_n^{(1)}\}$ contient à son tour une suite partielle $\{x_{\bar{r}_n}^{(1)}\}$ qui satisfait à la condition C_{p_2}. Posons $x_{\bar{r}_n}^{(1)} = x_n^{(2)}$.

En procédant ainsi on obtient une infinité de suites $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}, \ldots$ qui satisfont respectivement aux conditions $C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots$ et telles que chaque suite contienne la suivante.

La suite diagonale $\{\bar{x}_n\}$ sera contenue dans toute suite $\{x_n^{(k)}\}$ et satisfaira donc à la condition C_{p_k} $(k = 1, 2, \ldots)$. Si donc $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{x}_n(t)$ converge alors en moyenne avec toute puissance $p \geqslant 1$.

Il en résulte aisément que la fonction

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{x}_n(t)$$

est sommable avec toute puissance $p \geqslant 1$.

§ 5. Supposons maintenant que le système $\{x_n(t)\}$ soit complet; c'est-à-dire qu'une fonction sommable $z(t)$ remplissant les équations

$$\int_0^1 x_n(t) z(t)\, dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

soit égale à zéro dans $(0, 1)$.

Soit $y(t)$ une fonction sommable avec une puissance $q > 1$ et soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \bar{x}_n(t)$$

son développement formel suivant le système $\{x_n(t)\}$. Désignons par $\{a_n\}$ une suite telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. D'après le paragraphe précédent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{x}_n(t)$ converge en moyenne avec toute puissance $p \geqslant 1$, donc aussi avec la $q/(q-1)$-ème puissance. Il s'en suit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 y(t)\, \bar{x}_n(t)\, dt$$

c'est-à-dire la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

est convergente.

Or, $\{a_n\}$ étant une suite quelconque qui remplit l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ est nécessairement convergente.

La fonction $y(t)$ est donc à carré sommable, donc, en vertu du paragraphe précédent, sommable avec toute puissance $p \geqslant 1$.