Sur les séries lacunaires, Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Série A, Année 1933, p. 149-154*.

Ce travail est consacré à l'étude des propriétés particulières des séries orthogonales lacunaires. Déjà Weierstrass attira l'attention sur les propriétés des séries exponentielles avec des lacunes en utilisant ces séries pour construire des séries non prolongeables par exemple. Puis, des recherches générales sur les séries lacunaires furent poursuivies, entre autres, par Borel, Hadamard et Ostrowski. Vu les rapports connus entre les séries exponentielles et les séries trigonométriques, il était naturel d'étudier les séries trigonométriques lacunaires. Banach s'en occupa aussi dans ses travaux antérieurs [*28*] et [*29*], mais à un point de vue différent de celui adopté dans le travail qui est l'objet du présent commentaire. Par contre, un point de vue analogue fut adopté par Zygmund (voir Zygmund [3] et [5]) qui démontra, entre autres, les théorèmes:

1° Si la somme des carrés des coefficients d'une série trigonométrique à grandes lacunes (c'est-à-dire où $n_{k+1}/n_k > q > 1$) est convergente, la somme de cette série est une fonction de classe L^p pour tout $p > 1$ (il y établit aussi un théorème plus général n'ayant pas d'analogue dans le travail de Banach).

2° Si la série de Fourier d'une fonction de classe L^r où $r \geqslant 1$ est à grandes lacunes, la somme des carrés de ses coefficients est convergente (par suite du théorème 1°, la fonction est donc de classe L^p pour tout $p \geqslant 1$).

Les principaux résultats du travail de Banach consistent dans les théorèmes suivants:

I. Il existe pour tout système orthonormal $x_n(t)$ une suite partielle $\bar{x}_n(t)$, que Banach appelle *suite lacunaire*, telle que la condition $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$ entraîne la convergence de la série lacunaire $\sum\limits_{n=1} a_n \bar{x}_n(t)$ suivant les moyennes intégrales en toute puissance $p \geqslant 1$.

II. Toute fonction $f \epsilon h^q$ où $q > 1$ qui se laisse développer en une série lacunaire est de classe h^p pour tout $p \geqslant 1$.

C'est donc une propriété analogue à celle des séries trigonométriques à grandes lacunes.

Des généralisations considérables des résultats contenus dans ce travail de Banach sont à trouver dans la monographie [1] de Kaczmarz et Steinhaus. Ces auteurs y envisagent des systèmes orthogonaux lacunaires (dans un sens qui y est défini); en particulier, le système de Rademacher en est un. Or pour certains systèmes $x_n(t)$ lacunaires au sens

---

* Voir p. 234.

de Kaczmarz et Steinhaus, la suite $\bar{x}_n(t)$ lacunaire au sens de Banach coïncide avec la suite $x_n(t)$ toute entière.

De forts résultats concernant les séries trigonométriques, mais ne se rattachant pas directement au sujet de ce travail de Banach sont dus, entre autres, à Zygmund [3, 5], Kolmogoroff [1] et Szidon [1, 3, 5, 6, 8]; ils concernent la convergence en moyenne, la convergence presque partout et la convergence absolue. Parmi les résultats qui ont un certain rapport au sujet dont il est question, il est à noter un théorème de Wiener sur les séries trigonométriques à petites lacunes (c'est-à-dire où $n_{k+1}-n_k \to +\infty$ avec $k \to +\infty$). Suivant ce théorème, si le développement trigonométrique à petites lacunes d'une fonction $f \in L^1$ est de classe L^2 sur un segment, on a $f \in L^2$. Erdös montra que le théorème analogue pour L^p où $p > 2$ est en défaut et Turàn le prouva par des exemples effectifs pour $p > 6$. Plus récemment, ces exemples furent simplifés par Knapowski et même déjà pour tout $p > 3$.

Z. Zahorski

Sur la mesure de Haar, note au livre [6] de Saks, p. 264-272; traduction russe *О мере Хаара*, Успехи Математических Наук, выпуск II, 1936, p. 161-167, et traduction anglaise *On Haar's measure*, note I to the book „Theory of the Integral" by S. Saks, Monografie Matematyczne VII, 1937, p. 314-319*.

La mesure invriante, introduite par Haar en 1932 dans les groupes topologiques (voir Haar [1]), devint une notion aussi fondamentale pour la théorie de ces groupes que la mesure de Lebesgue l'était pour l'analyse. Antérieurement, on connut des applications d'une mesure invariante aux groupes de Lie; elle joua également un rôle essentiel dans un théorème fort important pour la théorie des représentations, à savoir dans celui de Peter et Weyl [1]; Hurwitz [1] commença à l'appliquer déjà en 1894. La notion de mesure de Haar suscita donc d'emblée un vif intérêt, et plusieurs mathématiciens éminents consacrèrent leur travaux à cette notion. La note de Banach en fut le premier; il parut presque aussitôt après celui de Haar.

Le théorème de Haar sur l'existence d'une mesure invariante par rapport aux translations dans un groupe topologique fut établi sous l'hypothèse que ce groupe est un espace métrique, séparable et localement

* Voir p. 239.