Sur un théorème de M. Sierpiński *

M. W. Sierpiński a démontré récemment [1] ce

THÉORÈME. *$f_1(p), f_2(p), f_3(p), \ldots$ étant une suite infinie de fonctions définies dans un ensemble infini E (formé d'éléments quelconques) et ne prenant que les valeurs appartenant à E, il existe deux fonctions de même nature, $\varphi(p)$ et $\psi(p)$ telles que toute fonction de la suite considérée est une superposition (finie) de ces deux fonctions.*

Le but de cette Note est de donner une démonstration plus simple de ce théorème.

Démonstration. Décomposons l'ensemble E en une infinité dénombrable d'ensembles disjoints $E_0, E_1, E_2, \ldots$, dont chacun a la même puissance que l'ensemble E, et décomposons l'ensemble E_0 en une infinité dénombrable d'ensembles $E_{0,1}, E_{0,2}, E_{0,3}, \ldots$, dont chacun a la même puissance que E_0 (donc aussi que E).

Définissons maintenant dans l'ensemble E la fonction $\psi(p)$ de sorte qu'elle transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E_n en l'ensemble E_{n+1} pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Or, définissons la fonction $\varphi(p)$, d'abord seulement dans l'ensemble $E - E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, de sorte qu'elle transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E_n en l'ensemble $E_{0,n}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

On vérifie sans peine que, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, la fonction

$$\theta_n(p) = \varphi\psi^n\varphi\psi(p) \tag{1}$$

transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E en l'ensemble $E_{0,n}$. La fonction $\theta_n^{-1}(p)$ (inverse de la fonction $\theta_n(p)$) est ainsi définie dans l'ensemble $E_{0,n}$ et transforme $E_{0,n}$ en E.

Définissons maintenant la fonction $\varphi(p)$ dans l'ensemble

$$E_0 = E_{0,1} + E_{0,2} + E_{0,3} + \ldots,$$

---

* Commenté sur p. 356.

(1) Fundamenta Mathematicae 24 (1934), p. 209.

en posant

$$\varphi(p) = f_n \theta_n^{-1}(p) \quad \text{pour} \quad p \in E_{0,n} \ (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Les formules (1) et (2) donnent immédiatement (d'après $\theta_n(E) = E_{0,n}$)

$$\varphi\theta_n(p) = f_n(p) \quad \text{pour} \quad p \in E,$$

ce qui donne, d'après (1),

$$f_n(p) = \varphi^2 \psi^n \varphi\psi(p) \quad \text{pour} \quad p \in E \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et le théorème de M. Sierpiński est démontré.