Sur un théorème de M. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae 25 (1935), p. 5 et 6*.

Ce travail contient une démonstration simplifiée d'un théorème de Sierpiński sur les superpositions de fonctions (voir Sierpiński [11]).

Les résultats ultérieurs sur ce sujet sont dus à Sierpiński [17] qui démontra que toute fonction de plusieurs variables $f(x_1, \ldots, x_n)$ est représentable par superposition d'un nombre fini, soit k, de fonctions de deux variables $\varphi_i(x_{l_i}, x_{m_i})$ où $i = 1, \ldots, k$, $l_i = 1, \ldots, n$ et $m_i = 1, \ldots, n$.

Plus récent est le théorème de Łoś (voir Łoś [1]) d'après lequel pour toute suite de fonctions $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k_n})$ où le nombre total de variables n'est pas supposé fini, il existe une fonction φ de deux variables telle que chacune des fonctions f_n est une superposition de fonctions de la forme $\varphi(x_{i_1}, x_{i_2})$.

S. Hartman et *W. Nitka*

The Lebesgue integral in abstract spaces, annexe du livre [6] de Saks**.

L'idée de construire l'intégrale du type de celle de Lebesgue sans introduire au préalable la notion de mesure d'ensemble est relativement précoce (voir par exemple Bourbaki [1], note historique). Banach n'était pas le premier à déduire la notion de mesure de celle d'intégrale et non pas la notion d'intégrale de celle de mesure. Son travail qui est l'objet de ce commentaire diffère d'ailleurs de l'oeuvre capitale de Lebesgue non seulement par la méthode, mais aussi par le degré de la généralité (ce qui est exprimé déjà dans le titre). A cet égard, Banach ne prétendait pas à la priorité, comme le montrent les renvois du débuts relatifs aux pages du livre de Saks (dont le travail en question de Banach est une annexe) sur lesquelles on trouve les noms des auteurs et les renvois à la bibliographie de leurs publications recueillie à la fin du livre. Pour les plus importantes de ces publications et qui se rattachent plus étroitement à ce commentaire, voir Daniell [1], Hahn [3], Nikodym [1] et Radon [1].

Quant à la construction de l'intégrale ne s'appuyant pas sur la théorie de la mesure, Banach ne fait aucune mention des idées antérieures. On peut donc en conclure qu'il les ignorait. Une autre preuve que Banach n'était pas inspiré par des travaux antérieurs est que sa solution du pro-

* Voir p. 250.
** Voir p. 252.

blème qu'il se posa diffère distinctement de ces travaux. La tentative qui suit a pour but de montrer en quoi consiste ce caractère distinctif et de classer le travail en question de Banach dans la longue série des publications comprenant les travaux antérieurs et postérieurs au sien et consacrées à la notion apriorique d'intégrale — bien entendu sans chercher à mentionner toutes ses publications et toutes les variantes des méthodes fondamentales.

C'est Daniell qui est considéré d'habitude comme l'auteur de la théorie de „l'intégrale sans la mesure" (intégrale de Daniell). Son travail [2] contient un exposé complet de cette théorie dans l'espace abstrait. Il y insiste particulièrement sur l'indépendance de sa méthode de la nature des éléments de l'espace: sa méthode est libre de la géométrie. Il faut cependant, du point de vue actuel, attribuer autant d'importance à ce qu'elle est à la fois libre de la théorie d'une mesure *a priori*, car une telle méthode s'accorde mieux avec l'analyse fonctionnelle contemporaine et s'avère particulièrement avantageuse lorsqu'il s'agit d'étendre la notion d'intégrale à partir des classes plus restreintes aux classes plus vastes de fonctions, et surtout lorsqu'il est question de construire l'intégrale et la mesure dans les espaces localement compacts (voir plus loin). En omettant la construction de l'intégrale de Stieltjes généralisée, qui ne nous intéresse pas ici, le travail de Daniell peut être résumé comme il suit:

Une classe linéaire T_0 de fonctions réelles, définies dans un espace et contenant, avec tout couple de fonctions f_1 et f_2 les fonctions $\max(f_1, f_2)$ et $\min(f_1, f_2)$, étant donnée, soit U une opération linéaire positive (c'est-à-dire telle que $f \geqslant 0$ partout entraîne $U(f) \geqslant 0$), définie dans T_0 et assujettie à la condition

(*) si $f_n \epsilon T_0$, $f_n \geqslant f_{n+1}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ partout, on a

$$\lim_{n\to\infty} U(f_n) = 0.$$

On définit alors, pour les fonctions de la classe T_1, à savoir pour les limites des suites $\{f_n\}$ non décroissantes de fonctions de la classe T_0, l'intégrale I comme $\lim\limits_{n\to\infty} U(f_n)$, qui peut être égale à ∞. Cette définition est univoque. On définit ensuite, pour une fonction f arbitraire, la *demi-intégrale supérieure* $\dot{I}(f)$ comme la borne inférieure des intégrales de fonctions de la classe T_1 qui sont des majorantes de f. Lorsque $\dot{I}(f) = -\dot{I}(-f)$ et $|\dot{I}(f)| < \infty$, la fonction f s'appelle *sommable* et on admet $\dot{I}(f)$ comme son intégrale $I(f)$. En prenant pour T_0 la classe des fonctions continues dans un intervalle et pour U l'intégrale ordinaire, $I(f)$ est celle de Lebesgue.

Daniell fait remarquer que le résultat est le même si T_0 est par exemple la classe des fonctions constantes par intervalles. Il est toutefois facile d'apercevoir que la démonstration en comporterait des difficultés techniques. Par contre, en modifiant le mode de procéder de Daniell de façon à introduire à part, pour les fonctions définies dans un segment de droite (ou plus généralement, dans un cube à n dimensions), la notion d'ensemble de mesure nulle et puis à considérer une fonction non négative f comme intégrable lorsqu'on a pour une suite croissante $\{f_n\}$ de fonctions constantes par intervalles $f_n \to f$ presque partout et $\lim\limits_{n\to\infty} If(n) = I(f) < \infty$, le chemin conduisant à l'intégrale de Lebesgue se trouve abrégé considérablement. Cette méthode revient à F. Riesz. Elle est exposée dans le livre de lui et Nagy [1], mais elle fut introduite déjà dans la publication [1] de F. Riesz de 1920, bien que sous une forme un peu différente. Il y mentionna l'intégrale de Daniell et indiqua la façon de mettre d'accord la méthode de convergence presque partout avec la construction abstraite de Daniell. Il s'agit d'introduire un succédané convenable de l'ensemble de mesure nulle. F. Riesz proposa de considérer comme tel tout ensemble E pour lequel il existe dans la classe T_0 une suite $\{f_n\}$ de fonctions non négatives convergeant dans E vers l'infini et telle que la suite $\{U(f_n)\}$ est bornée.

Le travail [1] de F. Riesz a la forme d'une lettre à G. Mittag-Leffler. L'auteur y cite au début quelques méthodes antérieures pour introduire l'intégrale de Lebesgue et dont il attribue à Borel (1910) l'idée de construction, non fondée sur la notion de mesure, bien que Borel n'eût pas développé cette idée. Il y rappelle aussi que W. H. Young introduisit dans ses travaux [1] et [2] une notion d'intégrale basée sur deux passages à la limite successifs, monotones et partant soit des fonctions continues, soit des fonctions constantes par intervalles. Les deux méthodes en question furent exposées encore une fois dans son travail [3] et généralisées aux intégrales du type de celles de Stieltjes. Ainsi, on peut trouver déjà chez W. H. Young l'idée de la théorie apriorique de l'intégrale (il est vrai que seulement dans E^n) et même une esquisse des moyens techniques, perfectionnés plus tard par Daniell et F. Riesz. Cependant, ce ne furent seulement que Daniell qui les appliqua au cas abstrait et F. Riesz qui les introduisit dans la construction des suites convergentes presque partout en épargnant par cela un passage à la limite.

Dans leur livre [1], Riesz et Nagy résumèrent succintement la théorie de Young en se servant du théorème d'après lequel l'intégrale inférieure de Darboux d'une fonction bornée et semicontinue inférieurement f est une limite des intégrales de fonctions continues f_n, pourvu que $f_n \uparrow f$. On peut donc expliquer comme suit en termes des intégrales de Darboux la construction décrite dans le travail [1] de W. H. Young: f étant une fonction bornée, définie dans un segment de droite, on définit deux nombres, à savoir les bornes inférieure et supérieure des intégrales de Darboux de toutes les fonctions bornées $g \geqslant f$ et $g \leqslant f$ respectivement, et on appelle la fonction f *intégrable* lorsque les deux nombres coïncident; pour les fonctions non bornées, on définit l'intégrabilité et l'intégrale à l'aide des fonctions tronquées.

La théorie exposée dans le travail de Banach s'approche de celle de Daniell. Elle en diffère par une autre axiomatisation de la classe fondamentale T_0 et de l'opération U. Au lieu de (*), c'est la condition suivante (ii_3) qui doit être satisfaite (les notations y étant convenablement modifiées): $f_n \in T_0$, $\varphi \in T_0$, $|f_n| \leqslant \varphi$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ partout entraînent $\lim_{n\to\infty} U(f_n) = 0$. C'est évidemment une condition à la fois plus forte et qui anticipe en partie la propriété de l'intégrale de Lebesgue, contenue dans son thèorème sur la convergence majorée. La condition (ii_3) équivaut à une autre condition que Banach désigne par (ii_3') et dont il se sert dans les démonstrations. La classe intermédiaire T_1 du travail précité [2] de Daniell est alors à remplacer méthodiquement par celle des fonctions qui sont des limites inférieures des suites de fonctions de la classe T_0 minorées par une fonction appartenant également à T_0. Aussi bien dans la théorie de Daniell que dans celle de Banach, on a deux théorèmes classiques de la théorie de l'intégrale lebesguienne, à savoir l'un sur l'intégration des suites monotones et l'autre sur celle des suites convergentes de fonctions majorées par une fonction intégrable. Or la fonctionnelle linéaire construite est, pour la classe des fonctions intégrables, la seule qui satisfait au premier de ces théorèmes (pour l'intégrale de Daniell) et au second (pour celle de Banach) et qui coïncide dans la classe T_0 avec la fonctionnelle U. En outre, il est facile de montrer que si la classe T_0 et la fonctionnelle U satisfont aux conditions de Banach, la méthode daniellienne des suites monotones appliquée à cette classe et à cette fonctionnelle conduit à la même classe des fonctions intégrables que la méthode de Banach et, évidemment, à la même intégrale. Autant que le sache l'auteur de ce commentaire, la méthode de Banach ne fut pas usitée ultérieurement dans des cours et monographies sur la théorie de l'intégrale.

Dans la seconde partie du même travail de Banach, la théorie générale est appliquée au cas d'un espace métrique compact arbitraire K. C'est la classe $C(K)$ de toutes les fonctions continues qui est prise alors pour T_0 et une fonctionnelle positive arbitraire, définie dans $C(K)$ joue le rôle de U. Il ne s'agit que de montrer que U satisfait à la condition (ii_3). Banach le déduit des théorèmes généraux sur la convergence faible contenus dans son livre [*38*]. On voit ici un désavantage de la méthode de Banach vis à vis de celle de Daniell: c'est que la démonstration de la condition (*) pour les fonctions continues dans un espace métrique compact quelconque et pour une fonctionnelle linéaire (continue) arbitraire est bien plus simple et tout à fait élémentaire.

Quant à l'intégration dans des espaces topologiques, on ne se borne pas dans les cours et monographies modernes qu'aux espaces compacts. Le développement de l'analyse moderne a mis particulièrement en relief le rôle des espaces localement compacts, notion que Banach ne faisait pas encore intervenir. Il semble néanmoins que ce fut lui le premier qui porta juste au degré de généralité le plus actuel à cette époque, tandis que ses prédécesseurs ne sortaient pas, en spécialisant la construction abstraite de l'intégrale, en dehors du cas de cube euclidien à n dimensions. Or l'extension de la construction aux espaces (de Hausdorff) localement compacts n'exige à peine que des soins techniques: on ne prend plus pour T_0 la classe de toutes les fonctions continues, mais celle, désignée par L, des fonctions continues ayant des supports compacts. C'est ainsi que la théorie de l'intégrale dans les espaces localement compacts fut exposée par exemple dans les livres [1] de Bourbaki, [2] de Loomis et [1] de Naimark dont les auteurs se servent cependant de la construction de Daniell et non pas de celle de Banach.

Sous un rapport encore la seconde partie du travail de Banach est un peu anachronique au point de vue d'aujourd'hui: c'est que le problème y est réduit au cas d'espaces métriques. Dans les espaces (de Hausdorff) localement compacts sans deuxième axiome de dénombrabilité, l'emploi des suites (au sens classique) n'est pas le plus naturel, car la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert peut ne pas y être limite d'une suite croissante (ordinaire) de fonctions de la classe L. C'est pourquoi dans le livre [1] de Bourbaki et dans celui [2] de Loomis, ce sont les suites au sens de Moore et Smith qui furent employées. La condition (*) pour la classe L et pour la fonctionnelle positive U définie dans L prend, après une modification convenable, la forme suivante:

(**) Si A est un ensemble filtrant, $f_a \epsilon L$ pour tout $a \epsilon A$ et $\inf\limits_{a\epsilon A} f_a(x) = 0$ pour tout x, on a $\inf\limits_{a\epsilon A} U(f_a) = 0$.

On peut aussi envisager les intégrales et les mesures non-positives, c'est-à-dire provenant des fonctionnelles linéaires définies dans L et pas nécessairement positives (voir Bourbaki [1]). On postule alors que la fonctionnelle U soit continue suivant la topologie de convergence uniforme sur les compacts. Cette condition entraîne (**) et elle est satisfaite en particulier pour toute fonctionnelle positive. Le rôle de la classe intermédiaire T_1 est joué par celle des fonctions semi-continues inférieurement. La construction de l'intégrale y est en principe pareille à celle de Daniell; cependant le résultat final n'en est pas l'ensemble des fonctions intégrables individuelles, mais l'espace L_1 auxquel on parvient comme il suit: on définit une fonctionelle $\bar{I}(f)$ pour toutes les fonctions f non-négatives (et qui peuvent prendre aussi la valeur ∞) en posant $\bar{I}(f) = \inf I(g)$ pour $g \geqslant f$ et $g \epsilon T_1$, où $I(g)$ est l'intégrale définie au préalable dans T_1

par un prolongement de la fonctionnelle U; puis, on introduit l'espace des fonctions f pour lesquelles $\bar{I}(|f|) < \infty$ et on en forme un espace métrique avec la norme $\bar{I}(|f|)$ à l'aide de la division par la relation d'équivalence $\bar{I}(|f-g|) = 0$; enfin, on définit L_1 comme adhérence de L dans cet espace. Toute la construction se laisse effectuer également, même sans le deuxième axiome de dénombrabilité, exactement par la méthode de Daniell, c'est-à-dire à l'aide des suites monotones ordinaires à partir des fonctions continues. La différence entre les deux méthodes est analysée en détail dans le livre de Bourbaki [1]. D'un façon générale, la méthode de Daniell fournit moins de fonctions intégrables, car la fonctionnelle $\bar{I}$ construite à l'aide de suites monotones peut être plus grande que celle construite à l'aide de suites de Moore et Smith. Néanmoins l'espace des fonctions intégrables, construite par cette voie, est isomorphe à l'espace L_1, tout ensemble de fonctions équivalentes, qui est un point de L_1, contenant une fonction intégrable au sens de Daniell.

L'autre aspect du travail de Banach, à savoir la généralisation de l'intégrale aux ensembles abstraits, a été en partie commenté déjà à propos du problème de la notion apriorique d'intégrale. Les deux aspects ne se trouvent pas en interdépendance étroite, car non seulement l'intégrale lebesguienne classique se laisse construire par la méthode apriorique, mais aussi l'intégrale abstraite peut être basée sur la théorie de la mesure, pourvu que cette théorie soit traitée avec une généralité suffisante.

Il semble que c'est Fréchet (voir Fréchet [2]) qui fut le premier à attirer l'attention sur la possibilité de l'intégration dans des espaces abstraits, bien que Radon se fût affranchi avant lui (dans son travail connu [1]) de la mesure basée sur la longueur ou sur le volume et eût introduit les ainsi dites fonctions d'ensemble absolument additives dans E^n (c'est-à-dire des mesures dénombrablement additives) dont il construisit ensuite l'intégrale par la méthode géométrique de Lebesgue.

Hahn [2] définit autrement que par la méthode de Lebesgue l'intégrale abstraite d'une fonction bornée f par rapport à une mesure σ-additive φ donnée, à savoir en entendant par cette intégrale une fonction d'ensemble M assujettie à la condition que $c' \leqslant f \leqslant c''$ dans M entraîne $c'\varphi(M) \leqslant \int_M f \leqslant c''\varphi(M)$.

On connaît bien la théorie générale de la mesure de Carathéodory, exposée par exemple dans son livre [1] et dans ceux de Berberian [1] et de Halmos [1]. Son trait fondamental est que la mesure extérieure y est axiomatisée, ce qui permet de définir la notion d'ensemble mesurable et de démontrer que les ensembles mesurables constituent un σ-anneau.

Enfin, dans d'innombrables publications contemporaines de la théorie de la mesure et de celle des probabilités, la mesure et le corps des sous-ensembles mesurables d'un espace considéré, qui peut-être tout à fait abstrait, sont donnés d'avance. La notion d'intégrale d'une fonction réelle ou complexe par rapport à une telle mesure se laisse construire sans aucune difficulté (voir par exemple le chapitre I du livre [6] de Saks). L'extension de la notion d'intégrale aux fonctions ayant leurs valeurs dans un espace linéaire normé quelconque fait l'objet d'une littérature à part et ne sera pas envisagée ici.

La troisième partie du travail de Banach fut consacrée à l'application de la théorie de l'intégrale exposée par lui à la boule-unité H dans l'espace l^2. Banach traita H comme un sous-ensemble de la puissance dénombrable du segment $J = [0, 1]$, à laquelle s'appliquent les théorèmes établis dans la seconde partie de son travail, cet espace étant compact. Grâce à cette méthode, toutes les mesures boreliennes non négatives dans H se laissent déceler comme celles qui correspondent aux suites de fonctionnelles linéaires positives, définies pour les fonctions continues de x_1, de $x_1, x_2, \ldots$, de $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_i \in J, \sum x_i^2 \leqslant 1)$, ces fonctionnelles étant compatibles deux à deux.

A cette époque, la théorie des mesures dans les produits cartésiens n'était pas encore développée. Banach contribua lui-même dans l'un de ses derniers travaux à l'épanouissement de cette théorie (voir [*54*a]). Au point de vue actuel, les mesures dont il est question dans la troisième partie du travail faisant objet de ce commentaire sont une relativisation des mesures boreliennes dans $J^{\aleph_0}$ à l'ensemble H. Il résulte des théorèmes connus sur les produits de mesures (voir par exemple Bourbaki [1], p. 99) que les mesures boreliennes positives dans les puissances finies du segment J, pourvu que la condition de leur compatibilité soit respectée, déterminent une mesure-produit dans $J^{\aleph_0}$. En la relativisant à l'ensemble H, on a une mesure borelienne dans H en tant que dans un sous-ensemble de l'espace l^2, car la transformation de $H \subset l^2$ en $H \subset J^{\aleph_0}$ par l'identité est continue, donc mesurable B dans les deux sens réciproques. Evidemment, toute mesure borelienne non négative dans H peut être obtenue par cette voie.

Il est à remarquer à ce propos que les théorèmes sur les mesures dans les produits d'espaces compacts furent généralisés plus tard par Marczewski [7] grâce à sa conception abstraite de la condition assurant la possibilité d'approcher les ensembles mesurables par leurs sous-ensembles compacts, Les mesures satisfaisant à la forme abstraite de cette condition, dites *mesures compactes*, furent ensuite étudiées et généralisées davantage par d'autres auteurs (voir par exemple Ryll-Nardzewski [1]).

S. Hartman