Sur la divergence des séries orthogonales*

Introduction

Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble formé par toutes les suites $\{\varphi_i(t)\}$ orthogonales et normées dans l'intervalle $(0, 1)$. La distance de deux suites $\{\varphi_i(t)\}$, $\{\psi_i(t)\}$ appartenant à l'ensemble $\mathfrak{F}$ sera définie par

$$\big(\{\varphi_i(t)\}, \{\psi_i(t)\}\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|\varphi_i(t)-\psi_i(t)\|}{1+\|\varphi_i(t)-\psi_i(t)\|} \qquad \text{oú} \qquad \|\varphi(t)\| = \Big(\int_0^1 \varphi^2(t)\,dt\Big)^{1/2}.$$

L'ensemble $\mathfrak{F}$ est alors un espace métrique, complet et séparable.

Dans ce Mémoire, nous démontrons les théorèmes suivants:

THÉORÈME I. *L'ensemble P des suites complètes $\{\varphi_n(t)\} \in \mathfrak{F}$ est un ensemble G_δ partout de la seconde catégorie dans $\mathfrak{F}$.*

Par conséquent, l'ensemble des suites incomplètes est un ensemble F_σ de la première catégorie.

THÉORÈME II. *Si $\{c_i\}$ est une suite numérique donnée, telle que $\sum c_i^2 < \infty$, alors deux cas seulement sont possibles:*

1) *la série $\sum c_i\varphi_i(t)$ est presque partout convergente pour chaque suite $\{\varphi_i(t)\} \in \mathfrak{F}$;*

2) *l'ensemble Q des suites $\{\varphi_i(t)\} \in \mathfrak{F}$ pour chacune des lesquelles on a presque partout*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Big|\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(t)\Big| = +\infty$$

est un ensemble G_δ partout de la seconde catégorie dans $\mathfrak{F}$.

THÉORÈME III. *Si E est un ensemble semi-compact dans (L^2), alors l'ensemble R des suites $\{\varphi_i(t)\} \in \mathfrak{F}$ telles que l'on a pour chaque fonction $f(t) \in E$ non nulle*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Big|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \int_0^1 f(t)\varphi_\xi(t)\,dt\Big| = +\infty$$

presque partout, est un ensemble G_δ partout de II-e catégorie dans $\mathfrak{F}$.

---

* Commenté sur p. 363.

On peut citer comme exemples d'ensembles semi-compacts dans (L^2): l'ensemble des fonctions possédant une derivée continue, l'ensemble des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, l'ensemble des fonctions à variation bornée, etc.

Des théorèmes I et III il résulte en particulier qu'il existe dans $\mathfrak{F}$ des suites complètes donnant pour chaque fonction à variation bornée un développement presque partout divergent de manière que la suite des sommes partielles est presque partout non bornée.

On peut étandre les théorèmes II et III à de diverses méthodes de sommation, par exemple à celles de M. Toeplitz; les démonstrations subsistent sans changements essentiels.

§ 1

Démonstration du théorème I. Posons

$$(1) \qquad P(k, l) = \underset{\{\varphi_n\}}{E}\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\int_0^1 \varphi_i(t) t^k dt\Big)^2 > \int_0^1 (t^k)^2 dt - \frac{1}{l}\Big] \qquad (k, l = 1, 2, \ldots).$$

Les ensembles $P(k, l)$ sont ouverts et on a

$$(2) \qquad P = \prod_{k=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{\infty} P(k, l).$$

Par conséquent, P est un ensemble G_δ. Reste à prouver que cet ensemble est partout dense dans $\mathfrak{F}$.

Soient $\{u_i(t)\}$ une suite appartenant à $\mathfrak{F}$ et μ un nombre positif. Désignons par n un entier tel que $2^{-n} < \mu$. Il existe évidemment une suite complète $\{\varphi_i(t)\} \epsilon P$ dont les n premiers terms coïncident avec ceux de la suite $\{u_i(t)\}$. On a donc

$$\big(\{u_i(t)\}, \{\varphi_i(t)\}\big) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|u_i - \varphi_i\|}{1 + \|u_i - \varphi_i\|} \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^\mu} < \mu.$$

Le nombre μ étant arbitraire, il s'ensuit que l'ensemble P est partout dense dans $\mathfrak{F}$. Enfin, d'après un théorème bien connu, chaque ensemble G_δ partout dense est partout de II-e catégorie.

§ 2

Lemme 1. *Soit $\{c_i\}$ une suite numérique telle que $\sum c_i^2 < \infty$. Supposons qu'il existe une suite $\{v_i(t)\} \epsilon \mathfrak{F}$ pour laquelle la série $\sum c_i v_i(t)$ n'est pas presque partout convergente. Alors, étant donnés un nombre naturel* *m et deux nombres positifs μ, M, on peut définir des fonctions orthogonales et normées $w_1(t), w_2(t), \ldots, w_N(t)$ pour lesquelles*

$$\operatorname{mes} \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n} c_{m+i} w_i(t)\Big| \leqslant M,\ n = 1, \ldots, N\Big] < \mu.$$

Démonstration. Il existe évidemment un nombre $l > 0$ tel que

$$\overline{\lim_{p,q\to\infty}}\Big|\sum_{i=p}^{q} c_i v_i(t)\Big| > l \tag{3}$$

dans un ensemble D de mesure $\delta > 0$. On peut supposer que D coïncide avec le segment $(0, \delta)$, car il est possible de représenter l'intervalle $(0, 1)$ sur lui-même par une transformation $t' = \varphi(t)$ biunivoque, conservant la mesure et qui fait correspondre à l'ensemble D le segment $(0, \delta)$.

Cela posé, supposons que $\mu < 1$, et soit $\vartheta = \varphi(t)$ la fonction représentée dans le plan (t, ϑ) par la ligne polygonale dont les sommets sont $(0, 0)$, $(1-\mu/2, \delta)$, $(1, 1)$. Désignons par k un entier remplissant l'inégalité $k > M^2(1-\mu/2)/l\delta$ et posons

$$\psi_i(t) = \begin{cases} v_i[\varphi(kt)]\sqrt{k\varphi'(kt)} & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{k}, \\ 0 & \text{pour} \quad \dfrac{1}{k} < t \text{ et } t < 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

On voit sans peine que $\{\psi_i(t)\} \in \mathfrak{F}$ et que, en vertu de (3),

$$\overline{\lim_{p,q\to\infty}}\Big|\sum_{i=p}^{q} c_i \psi_i(t)\Big| > M \qquad \Big(0 \leqslant t \leqslant \frac{1-\mu/2}{k}\Big).$$

Il en résulte qu'il existe une suite d'indices $m = p_0 < p_1 < \ldots < p_k$ telle que

$$\operatorname{mes} \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=p_j+1}^{n} c_i \psi_i(t)\Big| \leqslant M,\ p_j < n \leqslant p_{j+1}\Big] < \frac{\mu}{k} \tag{5}$$

$$(0 \leqslant t \leqslant 1/k;\ j = 0, \ldots, k-1).$$

Nous définirons maintenant les fonctions $w_i(t)$ comme il suit:

$$w_i(t) = \psi_{m+i}\Big(t - \frac{j}{k}\Big) \qquad (p < m+i \leqslant p_{j+1};\ j = 0, \ldots, k-1).$$

Puisqu'on a, en vertu de (4), $w_r(t) w_s(t) = 0$ pour

$$p_j < m+r \leqslant p_{j+1}, \qquad p_h < m+s \leqslant p_{h+1}, \qquad j \neq h,$$

l'inégalité à démontrer résulte de (5) avec $N = p_k - p_0$.

Démonstration du théorème II. Choisissons arbitrairement deux nombres positifs μ, M et désignons par $Q(\mu, M)$ l'ensemble des suites $\{u_i(t)\} \epsilon \mathfrak{F}$ jouissant de la propriété suivante:

Il existe des indices p, q ($p \leqslant q$) dépendant en général de la suite considérée, de manière que

$$(6) \qquad \text{mes} \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=p}^{n} c_i u_i(t)\Big| \leqslant M, \quad p \leqslant n \leqslant q\Big] < \mu.$$

Il est aisé de voir que l'ensemble $Q(\mu, M)$ est ouvert (peut-être vide).

Evidemment

$$(7) \qquad Q = \prod_{r=1}^{\infty} \prod_{s=1}^{\infty} Q\Big(\frac{1}{r}, s\Big).$$

Par conséquent, H est un G_δ (peut-être vide).

Supposons qu'il existe une suite $\{v_i(t)\} \epsilon \mathfrak{F}$ pour laquelle la série $\sum c_i v_i(t)$ n'est pas presque partout convergente. Alors, chaque ensemble $Q(\mu, M)$ est partout dense. En effet, soient $\{\varphi_i(t)\}$ une suite quelconque contenue dans $\mathfrak{F}$ et η un nombre positif arbitraire. Choisissons un entier m tel que

$$(8) \qquad 2^{-m} < \eta.$$

D'après le lemme 1, il existe des fonctions $w_1(t), \ldots, w_N(t)$ pour lesquelles

$$(9) \qquad \text{mes} \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n} c_{m+i} w_i(t)\Big| \leqslant 2M, 1 \leqslant n \leqslant N\Big] < \frac{\mu}{2}.$$

Etant donné un nombre positif δ, on peut trouver une fonction de Rademacher $h_\nu(t)$ telle que

$$\Big|\int_0^1 \varphi_i(t) w_j(t) h_\nu(t)\, dt\Big| < \delta \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, N).$$

En choisissant δ suffisamment petit et en orthogonalisant et normalisant les fonctions $w_1(t)\, h_\nu(t), \ldots, w_N(t)\, h_\nu(t)$ relativement à la suite $\{\varphi_i(t)\}$ à l'aide de la méthode de Hilbert-Schmidt, on obtiendra des fonctions $\psi_1(t), \ldots, \psi_N(t)$, orthogonales et normées, qui sont orthogonales aux fonctions $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ et remplissent l'inégalité

$$(10) \qquad \text{mes} \underset{t}{E}\Big[\sum_{i=1}^{N} |c_{m+i}| \cdot |w_i(t) h_\nu(t) - \psi_i(t)| \leqslant M\Big] > 1 - \frac{\mu}{2}.$$

Puisque $|h_\nu(t)| = 1$, il en résulte, en vertu de (9), que

$$(11) \qquad \text{mes} \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n} c_{m+i} \psi_i(t)\Big| \leqslant M, n = 1, \ldots, N\Big] < \mu.$$

Soit $\{u_i(t)\}$ une suite de $\mathfrak{F}$ satisfaisant aux conditions

$$(12) \qquad u_i(t) = \varphi_i(t) \ (i = 1, \ldots, m), \qquad u_{m+i}(t) = \psi_i(t) \ (i = 1, \ldots, N),$$

d'ailleurs quelconque. D'après (11), cette suite satisfait à la condition (6) avec $p = m+1$, $q = m+N$. Elle appartient donc à $Q(\mu, M)$. De plus, $\big(\{\varphi_i(t), u_i(t)\}\big) < \eta$, en vertu de (12) et (8). L'ensemble $Q(\mu, M)$ est donc partout dense. Comme il est ouvert, Q est en vertu de (7) un ensemble partout de II-e catégorie dans $\mathfrak{F}$.

§ 3

D'après un théorème de M. Menchoff [1], étant donnés les nombres $\mu > 0$, $M > 0$, $d > 0$, il existe des nombres $c_1, \ldots, c_k$ et des fonctions $w_1(t), \ldots, w_k(t)$, mesurables dans l'intervalle $(0, 1)$, telles que

$$(13) \qquad \begin{gathered} \sum c_i^2 = d, \qquad \int_0^1 w_i^2(t)\,dt = 1, \qquad \int_0^1 w_i(t)\,w_j(t)\,dt = 0 \qquad (i \neq j), \\ \operatorname{mes} \underset{t}{E}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{j} c_i w_i(t)\Big| \leqslant M, j = 1, \ldots, k\Big) < \mu. \end{gathered}$$

Nous désignérons par $k(\mu, M, d)$ le plus petit entier k pour lequel il existe k nombres c_i et k fonctions $w_i(t)$ remplissant les relations ci-dessus.

Pareillement, $\Lambda(\mu, M, d)$ désignera l'ensemble des suites finies $c_1, \ldots, c_k$ (k arbitraire) à chacune de lesquelles on peut faire correspondre une suite de fonctions $w_1(t), \ldots, w_k(t)$ de façon à satisfaire aux relations (13).

LEMME 2. *Si $\{c_i\}_{i=1,\ldots,k} \in \Lambda(\mu, M, d)$ et $\{u_i(t)\}_{i=1,\ldots,r} \in (L^2)$, alors, pour chaque ensemble $A \subset (0, 1)$ de mesure positive, il existe une suite finie $\{v_i(t)\}_{i=1,\ldots,k}$ des fonctions orthogonales et normées qui sont orthogonales aux fonctions $u_i(t)$ et remplissent les conditions*

$$(14) \qquad \begin{gathered} v_i(t) = 0 \qquad (t \in (0, 1) - A), \\ \operatorname{mes} \underset{t \in A}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{j} c_i v_i(t)\Big| \leqslant \frac{1}{2} M,\ j = 1, \ldots, k\Big] < 2\mu. \end{gathered}$$

Démonstration. Désignons par m la mesure de l'ensemble A, par $g(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ sa fonction caractéristique et posons

$$(15) \qquad G(t) = m^{-1} \int_0^t g(z)\,dz.$$

[1] D. Menchoff, *Sur les suites de fonctions orthogonales I*, Fundamenta Mathematicae 4 (1923), p. 82-105.

Il existe par hypothèse des fonctions $w_1(t), \ldots, w_k(t)$ remplissant les relations (13). Posons

$$\varphi_i(t) = m^{-1/2} g(t) w_i[G(t)] \qquad (i = 1, \ldots, k). \tag{16}$$

On voit sans peine que les fonctions $\varphi_i(t)$ sont orthogonales et normées dans $(0, 1)$ et que

$$\varphi_i(t) = 0 \qquad (t \in (0, 1) - A). \tag{17}$$

De plus, en vertu de (13), (16) et de $m \leqslant 1$, on a

$$\operatorname{mes} \underset{t \in A}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{j} c_i \varphi_i(t)\Big| \leqslant M,\ j = 1, \ldots, k\Big] < \mu. \tag{18}$$

Etant donné un nombre $\eta > 0$, il existe dans le système de Rademacher une fonction $h_\nu(t)$ telle que l'on a

$$\Big|\int_0^1 u_j(t) \varphi_i(t) h_\nu(t)\, dt\Big| < \eta \qquad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, r).$$

En prenant η suffisamment petit et en orthogonalisant et normalisant les fonctions $\varphi_i(t)\, h_\nu(t)$ relativement aux fonctions $u_i(t)\, g(t)$, on obtiendra des fonctions $v_1(t), \ldots, v_k(t)$ qui remplissent les conditions:

$$\begin{gathered} v_i(t) = 0 \qquad (t \in (0, 1) - A), \\ \operatorname{mes} \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{j} c_i[\varphi_i(t) h_\nu(t) - v_i(t)]\Big| < \frac{1}{2} M,\ j = 1, \ldots, k\Big] > 1 - \mu. \end{gathered} \tag{19}$$

Puisque $|h_\nu(t)| = 1$, les relations (18), (19) donnent (14).

Lemme 3. *Etant données une fonction $F(t) \in (L^2)$ et une suite finie $\{u_i(t)\}_{i=1,\ldots,r} \in (L^2)$ dans l'intervalle $(0, 1)$ satisfaisant à la condition*

$$\int_0^1 \Big[F(t) - \sum_{i=1}^{r} a_i u_i(t)\Big]^2 dt \geqslant d > 0 \tag{20}$$

quels que soient les nombres a_i, il existe une suite finie $\{\varphi_i(t)\}_{i=1,\ldots,k}$, orthogonale et normée, où $k = k(\mu, M, d)$, telle que

$$\int_0^1 u_j(t) \varphi_i(t)\, dt = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, r), \tag{21}$$

$$\operatorname{mes} \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \int_0^1 F(t) \varphi_i(t)\, dt\Big| \leqslant \frac{1}{8} M,\ n = 1, \ldots, k\Big] < 2\mu. \tag{22}$$

Démonstration. Posons

$$F(t) = f(t) + f_1(t), \tag{23}$$

où

(24) $$f_1(t) = \sum_{i=1}^{r} a_i u_i(t), \qquad \int_0^1 f(t) u_i(t) dt = 0 \qquad (i = 1, \dots, r).$$

On a, en vertu de (23) et (24),

(25) $$\int_0^1 f^2(t) dt \geqslant d.$$

Si $\{c_i\}_{i=1,\dots,k} \epsilon A(\mu, M, d)$ avec $k = k(\mu, M, d)$, il résulte d'après (24) et (25) qu'il existe une suite finie $\{w_i(t)\}_{i=1,\dots,k}$, orthogonale et normée dans $(0, 1)$, telle que

(26) $$\int_0^1 f(t) w_i(t) dt = c_i, \qquad \int_0^1 u_j(t) w_i(t) dt = 0$$
$$(i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, r).$$

Posons

(27) $$A = \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n} c_i w_i(t)\Big| \leqslant \frac{1}{4} M,\ n = 1, \dots, k\Big].$$

On vérifie sans peine que, dans le cas où mes $A < 2\mu$ les fonctions $\varphi_i(t) = w_i(t)$ $(i = 1, \dots, k)$ satisfont aux conditions du théorème.

Supposons maintenant que l'on ait mes $A \geqslant 2\mu$. D'après le lemme 2, il existe une suite finie $\{v_i(t)\}_{i=1,\dots,k}$ orthogonale et normée, jouissant des propriétés suivantes:

(28) $$\int_0^1 u_j(t) v_i(t) dt = 0 \qquad (i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, r),$$

(29) $$\int_0^1 f(t) v(t) = 0, \qquad \int_0^1 w_i(t) v(t) = 0 \qquad (i, j = 1, \dots, k),$$

(30) $$v_i(t) = 0 \qquad (t \epsilon (0, 1) - A;\ i = 1, \dots, k),$$

(31) $$\text{mes} \underset{t \epsilon A}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n} c_i v_i(t)\Big| \leqslant \frac{1}{2} M,\ n = 1, \dots, k\Big] < 2\mu.$$

Posons

(32) $$\varphi_i(t) = 2^{-1/2}[w_i(t) + v_i(t)] \qquad (i = 1, \dots, k).$$

D'après (29), cette suite est orthogonale et normée. Les relations (26) et (29) entraînent (21). En vertu de (27), (30) et (31), il vient

(33) $$\text{mes} \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2} c_i \varphi_i(t)\Big| \leqslant \frac{1}{4} M,\ n = 1, \dots, k\Big] < 2\mu.$$

D'après (23), (24), (26), (28) et (29), on a

$$\int_0^1 F(t)\varphi_i(t)\,dt = 2^{-1/2}c_i \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Cette relation, jointe à (33), donne (22), c. q. f. d.

LEMME 4. *Si les suites $\{u_i(t)\}_{i=1,\ldots,m}$ et $\{v_i(t)\}_{i=1,2,\ldots,\infty}$, sont orthogonales et normées dans $(0,1)$, alors, étant donnés les nombres $\eta>0$, $\mu>0$ et $M>0$, il existe un entier k tel que l'on peut faire correspondre à tout couple des entiers ν, r une suite $\{\psi_i(t)\}_{i=1,\ldots,m+k}$, orthogonale et normée, pour laquelle on a*

$$\sum_{i=1}^{m} \|u_i(t)-\psi_i(t)\| \leqslant \eta, \tag{34}$$

$$\int_0^1 v_j(t)\psi_i(t)\,dt = 0 \qquad (j\neq\nu,\ j=1,\ldots,r;\ i=m+1,\ldots,m+k), \tag{35}$$

$$\operatorname{mes} \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=m+1}^{n}\psi_i(t)\int_0^1\psi_i(t)v_\nu(t)\,dt\Big| \leqslant M,\ m<n\leqslant m+k\Big] < \mu. \tag{36}$$

Démonstration. Posons

$$u_i^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j(t)\int_0^1 v_j(t)u_i(t)\,dt \qquad (i=1,\ldots,m). \tag{37}$$

Etant donné un nombre $\vartheta>0$, il existe un entier h tel que, en posant

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{h} v_j(t)\int_0^1 v_j(t)u_i(t)\,dt \qquad (i=1,\ldots,m), \tag{38}$$

on aura

$$\|u_1^{(1)}(t)-s_i(t)\| < \vartheta \qquad (i=1,\ldots,m). \tag{39}$$

Pour ϑ suffisamment petit, la suite $\{w_i(t)\}_{i=1,\ldots,m}$ obtenue en orthogonalisant et normalisant la suite

$$\{u_i(t)-u_i^1(t)+s_i(t)\}_{i=1,\ldots,m}$$

satisfait aux conditions:

$$\sum_{i=1}^{m}\|u_i(t)-w_i(t)\| < \frac{\eta}{2}, \tag{40}$$

$$\int_0^1 w_i(t)v_j(t)\,dt = 0 \qquad (i=1,\ldots,m;\ j>h). \tag{41}$$

Etant donnés les entiers ν, r, posons:

(42) $$\sigma = h+\nu+r,$$

(43) $$f_i(t) = \sqrt{1-\gamma^2}\,w_i(t)+\gamma v_{\sigma+i}(t) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

où

(44) $$\gamma = 2^{-3/2}m^{-1}\eta < 1,$$

pourvu que η soit suffisamment petit, ce qui ne restreint pas la généralité.

D'après (41), la suite $\{f_i(t)\}_{i=1,\ldots,m}$ est orthogonale et normée. Des relations (40), (43) et (44) on déduit que

(45) $$\sum_{i=1}^{m}\|u_i(t)-f_i(t)\| \leqslant \frac{\eta}{2}+m\sqrt{2(1-\sqrt{1-\gamma^2})} \leqslant \frac{\eta}{2}+\sqrt{2}m\gamma = \eta.$$

En posant

(46) $$a_i = \int_0^1 v_\nu(t)f_i(t)\,dt \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

on a d'après (43), $\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \leqslant 1-\gamma^2$. En vertu de (41), (42), (43), (44) et (46), il vient

(47) $$\int_0^1 \Big[v_\nu(t)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(t)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\beta_i v_i(t)\Big]^2 dt$$
$$\geqslant \Big(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i\Big)^2+\gamma^2\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2$$
$$\geqslant \Big(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i\Big)^2+\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}\Big(\sum_{i=1}\alpha_i a_i\Big)^2 \geqslant \gamma^2 = \frac{\eta^2}{8m^2},$$

quelles que soient les suites finies $\{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,m}$ et $\{\beta_i\}_{i=1,\ldots,m}$.

Posons

(48) $$k = \omega\left(\frac{1}{2}\mu, 8M, \frac{\eta^2}{8m^2}\right).$$

D'après (47) et en vertu du lemme 3, appliqué à la fonction $F(t) = v_\nu(t)$ et à la suite finie $\{u_i(t)\}$ composée des suites $\{f_i(t)\}_{i=1,\ldots,m}$ et $\{v_j(t)\}_{\substack{j=1,\ldots,\sigma\\ j\neq\nu}}$, il existe une suite $\{\varphi_i(t)\}_{i=1,\ldots,k}$, où l'entier k est donné par (48), telle que

(49) $$\int_0^1 f_i(t)\varphi_s(t)\,dt = 0, \qquad \int_0^1 v_j(t)\varphi_s(t)\,dt = 0$$
$$(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, \sigma,\ j\neq\nu;\ s = 1, \ldots, k),$$

(50) $$\operatorname{mes} \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\int_0^1\varphi_i(t)v_\nu(t)\,dt\Big| \leqslant M,\ n = 1, \ldots, k\Big] \leqslant \mu.$$

Il est aisé de voir que les fonctions

$$\psi_i(t) = \begin{cases} f_i(t) & \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m, \\ \varphi_{i-m}(t) & \text{pour} \quad i = m+1, \ldots, m+k \end{cases}$$

forment une suite $\{\psi_i(t)\}_{i=1,\ldots,m+k}$ satisfaisant en vertu de (42), (45), (48), (49), (50) aux conditions (34), (35), (36).

Condition (α). Soient $\{v_i(t)\}$ une suite contenue dans $\mathfrak{F}$ et $\{\mu_i\}$ une suite décroissante à termes positifs tendant vers zéro. Nous dirons qu'une suite $\{\varphi_i(t)\}\in\mathfrak{F}$ satisfait à la *condition* (α) relativement aux suites $\{v_i(t)\}$ et $\{\mu_i\}$ si, étant donnés des nombres $\mu > 0$, $M > 0$ et un entier ν, il existe des entiers p, q $(p < q)$ et r tels que

$$\text{(a)} \quad r > \nu, \qquad \mu_r < \frac{\mu}{(q-p+1)^{1/2}},$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{i=p}^{q} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq\nu}}^{r} \Big(\int_0^1 \varphi_i(t) v_j(t)\,dt\Big)^2 < \frac{\mu^2}{q-p+1},$$

$$\text{(c)} \quad \operatorname{mes} \underset{t}{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \int_0^1 v_\nu(t)\varphi_i(t)\,dt\Big| \leqslant M,\ p \leqslant n \leqslant q\Big] < \mu.$$

Lemme 5. *Lorsque la suite $\{\varphi_i(t)\}\in\mathfrak{F}$ satisfait à la condition (α) relativement aux suites $\{v_i(t)\}$ et $\{\mu_i\}$, on a pour toute fonction*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i(t), \tag{51}$$

où

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 > 0, \qquad \sum_{i=r+1}^{\infty} a_i^2 < \mu_2^r \quad (r = 1, 2, \ldots), \tag{52}$$

la relation

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Big|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \int_0^1 \varphi_i(t) f(t)\,dt\Big| = +\infty \tag{53}$$

presque partout.

Démonstration. Soit $f(t)$ une fonction remplissant les conditions (51) et (52). L'un des coefficients a_i, soit a_ν, est alors différent de 0. Choisissant deux nombres $\mu > 0$ et $M > 0$, posons:

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i(t), \qquad R_n(t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i v_i(t). \tag{54}$$

Il existe par hypothèse des entiers p, q $(p < q)$, r remplissant les inégalités (a), (b) et (c). Posons:

$$A(t) = \sum_{i=p}^{q} \left| \varphi_i(t) \int_0^1 [S_r(i) - a_\nu v_\nu(t)] \varphi_i(t)\, dt \right|, \tag{55}$$

$$B(t) = \sum_{i=p}^{q} \left| \varphi_i(t) \int_0^1 R_r(t) \varphi_i(t)\, dt \right|. \tag{56}$$

On a pour $p \leqslant n \leqslant q$

$$\left| \sum_{i=p}^{n} \varphi_i(t) \int_0^1 f(t) \varphi_i(t)\, dt \right| \geqslant \left| \sum_{i=p}^{n} \varphi_i(t) \int_0^1 a_\nu v_\nu(t) \varphi_i(t)\, dt \right| - A(t) - B(t). \tag{57}$$

Les formules (55) et (54) donnent

$$\int_0^1 A(t)\, dt \leqslant (q-p+1)^{1/2} \Big[\sum_{i=p}^{q} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^{r} a_j \int_0^1 v_j(t) \varphi_i(t)\, dt \Big)^2 \Big]^{1/2}$$

$$\leqslant (q-p+1)^{1/2} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^{r} a_j^2 \Big)^{1/2} \Big[\sum_{i=p}^{q} \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq \nu}}^{r} \int_0^1 v_j(t) \varphi_i(t)\, dt \Big)^2 \Big]^{1/2};$$

on a donc, en vertu de (b) et (51),

$$\int_0^1 A(t)\, dt < \mu \|f\|. \tag{58}$$

Pareillement,

$$\int_0^1 B(t)\, dt \leqslant (q-p+1)^{1/2} \Big[\sum_{i=p}^{q} \Big(\int_0^1 R_r(t) \varphi_i(t)\, dt \Big)^2 \Big]^{1/2}$$

$$\leqslant (q-p+1)^{1/2} \Big(\int_0^1 R_r^2(t)\, dt \Big)^{1/2},$$

d'où d'après (a) et (52),

$$\int_0^1 B(t)\, dt < \mu. \tag{59}$$

Les inégalités (58), (59) entraînent

$$\operatorname{mes} \underset{t}{E} [A(t) + B(t) > 1] < \mu(\|f\| + 1). \tag{60}$$

Il en résulte en vertu de (57) et (c), que

$$\operatorname{mes} \underset{t}{E} \left| \left| \sum_{i=p}^{n} \varphi_i(t) \int_0^1 f(t) \varphi_i(t)\, dt \right| \leqslant |a_\nu|\, M - 1,\ p \leqslant n \leqslant q \right| < \mu + \mu(\|f\| + 1).$$

Puisque μ, M sont des nombres positifs arbitraires et $a_\nu \neq 0$, il s'ensuit que la relation (53) a lieu presque partout, c. q. f. d.

Lemme 6. *L'ensemble K des suites $\{\varphi_i(t)\} \in \mathfrak{F}$ remplissant la condition* (α) *relativement aux suites données $\{v_i(t)\}$, $\{\mu_i\}$ est un G_δ partout de II-e catégorie dans $\mathfrak{F}$.*

Démonstration. Soient μ, M des nombres positifs et p, q $(p < q)$ r, ν des entiers arbitraires. Désignons par

$$K(\mu, M, \nu, p, q, r) \tag{61}$$

l'ensemble des suites $\{\varphi_i(t)\} \in \mathfrak{F}$ satisfaisant aux conditions (a), (b) et (c). Cet ensemble peut être vide, pour certains systèmes μ, M, ν, p, q, r. Dans le cas où il n'est pas vide, c'est un ensemble ouvert.

Il est aisé de voir que l'on a

$$K = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{M=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=p+1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} K\left(\frac{1}{n}, M, \nu, p, q, r\right). \tag{62}$$

L'ensemble

$$K(\mu, M, \nu) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=p+1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} K(\mu, M, \nu, p, q, r) \tag{63}$$

est aussi ouvert ou vide. Nous allons prouver que cet ensemble, sinon vide, est dense dans $\mathfrak{F}$.

Soient $\{u_i(t)\}$ une suite appartenant à $\mathfrak{F}$, δ un nombre positif et m un entier tel que $2^{-m} < \frac{1}{2}\delta$. D'après le lemme 4 avec $\eta = \frac{1}{2}\delta$, il existe un entier k tel qu'à chaque entier r remplissant les inégalités (a) vient correspondre une suite finie orthogonale et normée $\{\psi_i(t)\}_{i=1,\ldots,m+k}$, satisfaisant aux conditions (34), (35) et (36).

Soit $\{\varphi_i(t)\} \in \mathfrak{F}$ une suite pour laquelle on a $\varphi_i(t) = \psi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m+k)$, d'ailleurs quelconque. En vertu des conditions que nous venons de citer, cette suite satisfait aux relations (b), (c) avec $p = m+1$, $q = m+k$. Elle appartient donc à l'ensemble (61) et par conséquent à l'ensemble (63). La relation (34) donne, puisque $2^{-m} < \frac{1}{2}\delta$ et $\eta = \frac{1}{2}\delta$,

$$\left(\{\varphi_i(t)\}, \{u_i(t)\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{\|\varphi_i - u_i\|}{1+\|\varphi_i - u_i\|} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \eta + \frac{1}{2}\delta = \delta.$$

L'ensemble (63) est donc partout dense dans $\mathfrak{F}$. Comme de plus il est ouvert, c'est un ensemble partout de II-e catégorie dans $\mathfrak{F}$. Il en résulte, en vertu de (62), que K est un ensemble G_δ partout de seconde catégorie.

Démonstration du théorème III. Supposons d'abord que l'ensemble E soit compact. Soit $\{v_i(t)\} \notin \mathfrak{F}$ une suite complète. Il existe alors une suite décroissante $\{\mu_i\}$ à termes positifs tendant vers zéro, telle que

$$\sum_{i=r+1}^{\infty}\left(\int_0^1 v_i(t)f(t)\,dt\right)^2 \leqslant \mu_r^2 \qquad (r = 1, 2, \ldots;\ f(t)\in E.)$$

Pour $\mu > 0$ et $M > 0$, désignons par $R(\mu, M)$ l'ensemble des suites $\{\varphi_i(t)\}\in\mathfrak{F}$ telles que

$$\operatorname{mes}\underset{t}{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\int_0^1 f(t)\varphi_i(t)\,dt\right| \leqslant M,\ n = 1, 2, \ldots\right] < \mu$$

pour toute fonction $f(t)\in E$ non nulle.

L'ensemble E étant supposé compact, il s'ensuit que $R(\mu, M)$ est un ensemble ouvert ou vide. Puisqu'on a

$$R = \prod_{r=1}^{\infty}\ \prod_{M=1}^{\infty} R\left(\frac{1}{r}, M\right),$$

l'ensemble R est un G_δ. Enfin, en tenant compte de sa définition et en se servant des lemmes 5 et 6, on conclut que c'est un ensemble partout de seconde catégorie.

Supposons maintenant que l'ensemble E soit semi-compact, c'est-à-dire que $E = \sum E_j$ où les ensembles E_j sont compacts. Soit R_j l'ensemble des suites $\{\varphi_i(t)\}\in\mathfrak{F}$ remplissant (64) presque partout pour chaque fonction $f(t)\in E_j$ non nulle ($j = 1, 2, \ldots$). Tout R_j est donc un G_δ partout de seconde catégorie. L'ensemble $R = \sum_{j=1}^{\infty} R_j$ jouit donc de la même propriété.