*Sur la divergence des séries orthogonales*, Studia Mathematica 9 (1940), p. 139-155*.

Ce travail concerne le problème de la divergence des sommes partielles de séries orthogonales, en particulier dans l'espace fonctionnel $L^2(0,1)$. Le problème en question est envisagé pour une suite arbitraire $\{c_n\}\epsilon l^2$ de coefficients. Les démonstrations des théorèmes contenu dans ce travail procèdent par la méthode de catégorie (voir le commentaire au travail [*34*], ce volume, p. 348) et n'indiquent pas explicitement le mode de construction du système orthogonal $\{\varphi_n(t)\}$ ayant les propriétés requises.

Le cas particulier du théorème III, mentionné par Banach p. 262, à savoir l'existence pour toute fonction non nulle $f\epsilon L^2(0,1)$ d'un système orthonormal complet et tel que les sommes partielles $s_n(t)$ du développement de la fonction $f$ en série suivant ce système satisfont presque partout à la condition $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|s_n(t)| = \infty$, fut aussi établi indépendamment par Talalyan ([1] et [2]) quelques années plus tard.

*J. Musielak*

(Publication posthume) *On measures in independent fields*, Studia Mathematica 10 (1948), p. 159-177**.

Ce travail de Banach, rédigé et complété par S. Hartman d'après des fragments manuscrits datant de 1940, est intimement lié aux recherches de Marczewski [3-6] sur l'indépendance des ensembles, sur celle des corps d'ensembles et sur l'indépendance stochastique des mesures (pour le détail, voir l'article synthétique de Marczewski [5]).

Le principal théorème du travail, et qui est la solution affirmative d'un problème posé par Marczewski [6], constitue une généralisation du théorème suivant sur l'existence des mesures spéciales $\mu^*$ dans les produits cartésiens:

L'indice $j$ parcourant un ensemble $J$ arbitraire, soit $\mu_j$ une mesure dénombrablement additive, définie dans un corps dénombrablement additif $\boldsymbol{M}_j$ de sous-ensembles de l'espace $X_j$ et telle que $\mu_j(X_j) = 1$. Alors, il existe exactement une mesure dénombrablement additive $\mu^*$, définie dans le plus petit corps dénombrablement additif $\boldsymbol{M}$ d'ensembles

* Voir p. 262.
** Voir p. 275.

qui contient tous les sous-ensembles $A$ de l'espace $X = \mathbf{P}_{j \in J} X_j$ de la forme

(*) $A = \mathbf{P}_{j \in J} A_j$ où $A_j \in \boldsymbol{M}_j$ pour tout $j \in J$ et $A_j = X_j$ sauf pour un nombre fini de valeurs de $j$

et qui satisfait pour tout $A$ de la forme (*) à l'égalité

$$\mu^*(A) = \prod_{j \in J} \mu_j(A_j).$$

En effet, envisageons pour tout $j \in J$ l'ensemble $A_j^*$ de tous les points $x \in X$ dont $j$-ème coordonnée appartient à $A_j$ et le corps dénombrablement additif $\boldsymbol{M}_j^*$ de tous les ensembles $A_j^*$ tels que $A_j \in \boldsymbol{M}_j$. Or la famille de tous les corps $\boldsymbol{M}_j^*$ où $j \in J$ est dénombrablement indépendante. En appliquant le théorème de Banach à cette famille et aux mesures engendrées d'une façon naturelle dans chacun d'eux, on obtient le théorème sur l'existence de mesures $\mu^*$ dans les produits cartésiens.

Sherman [1] et Sikorski [4] montrèrent indépendamment l'un de l'autre que, réciproquement, le théorème de Banach peut être déduit du théorème sur l'existence de mesures $\mu^*$ dans les produits cartésiens. Ils remarquèrent qu'étant donné und famille dénombrablement indépendante de corps dénombrablement additifs d'ensembles, il existe toujours une famille de corps $\boldsymbol{M}_j$ définie comme plus haut et telle que la famille $\boldsymbol{M}_j^*$ est isomorphe à la famille donnée.

On envisagea aussi des tentatives de généraliser le théorème de Banach par l'affaiblissement de l'hypothèse d'indépendance entre les corps d'ensembles. Ainsi, dans le théorème de Marczewski sur le prolongement de mesures additives, rappelé au début du travail de Banach, l'hypothèse d'indépendance peut être remplacée par celle de presque-indépendance, à savoir que l'intersection d'une suite finie quelconque d'ensembles de mesure positive choisis dans des corps différents ne soit pas vide (voir Marczewski [5] et [6]). Le problème s'impose donc si le théorème de Banach subsiste lorsqu'on y remplace l'hypothèse d'indépendance dénombrable entre les corps d'ensembles par celle de presque-indépendance dénombrable entre ces corps, définie d'une manière analogue. Helson [1] résolut ce problème par la négative déjà pour la presque-indépendance entre deux corps et Marczewski [6] montra que la réponse est affirmative lorsque tous les corps, ou bien tous sauf un seul, sont finis.

La notion d'indépendance et celle d'indépendance dénombrable se généralisent d'une façon naturelle aux familles de sous-corps d'un corps de Boole fixé d'avance. Le théorème de Marczewski, rappelé par Banach au début de son travail commenté ici, reste vrai aussi pour les corps de Boole. Sikorski [5] montra que le théorème de Banach est en défaut pour les familles dénombrablement indépendantes de sous-corps dénombrablement additifs d'un corps de Boole dénombrablement additif (déjà pour une famille composée de deux sous-algèbres). A l'aide de la notion d'indépendance dénombrable d'une famille de corps, Sikorski [3] définit les notions de produits cartésiens minimum et maximum d'une famille de corps de Boole dénombrablement additifs et montra que le théorème sur l'existence de la mesure $\mu^*$ dans les produits cartésiens est vrai pour le produit maximum sans l'être pour le produit minimum.

*R. Sikorski*

(Publication posthume) *Sur la représentation des fonctions indépendantes à l'aide des fonctions de variables distinctes*, Colloquium Mathematicum 1, (1948), p. 109-121*.

Ce travail fut reconstruit par S. Hartman et E. Marczewski d'après une notice manuscrite de Banach intitulée „Fonctions indépendantes" et contenant plusieurs résultats sans démonstration. La tâche des rédacteurs était celle de préciser les termes et d'ajouter les démonstrations détaillées. La notion de fonctions (stochastiquement) indépendantes fut introduite en 1933 par Kolmogoroff [2] et en 1936, à l'aide d'une définition modifiée, par Kac et Steinhaus (voir Kac [2]). Le but en était de préciser la notion intuitive d'indépendance employée depuis longtemps par les probabilistes. Les fonctions indépendantes se révélèrent un instrument extrêmement utile et leur rôle devint fondamental dans la théorie moderne des probabilitées.

Dans le travail en question, deux fonctions indépendantes, $f$ et $g$, définies dans l'intervalle $0 < x < 1$, s'appellent *représentables biaxialement* lorsqu'il existe deux couples de fonctions, à savoir des fonctions $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$ transformant cet intervalle en carré-unité et conservant la mesure, en même temps que des fonctions mesurables $F(x)$ et $G(x)$ telle que $f(t) = F(\varphi(t))$ et $g(t) = G(\psi(t))$. La conservation de la mesure par la transformation $(\varphi(t), \psi(t))$ de l'intervalle linéaire en un carré signifie que, pour tout ensemble borélien $M$ situé dans ce carré, la mesure (linéaire) lebesguienne de l'ensemble $\{t\colon (\varphi(t), \psi(t)) \in M\}$ est égale à la mesure (plane) de l'ensemble $M$.

Banach posa le problème: quelles sont les conditions pour que les fonctions indépendantes soient représentables biaxialement? Il en trouva

* Voir p. 296.