Sur les suites d'ensembles excluant l'existence d'une mesure

Note posthume avec préface et commentaire de E. Marczewski

Préface. Banach et Kuratowski ([1]) ont résolu en 1929 l'ainsi dit *problème généralisé de la mesure* (en admettant l'hypothèse du continu): ils ont démontré que toute mesure dénombrablement additive, définie dans le corps de tous les sous-ensembles d'un ensemble arbitraire X de puissance du continu, s'annule identiquement lorsqu'elle s'annule sur tous les ensembles à un élément. Il ne s'agit ici, comme aussi dans la suite, que des mesures finies.

Les mêmes auteurs ont remarqué plus tard que leur démonstration donne au fond un résultat plus précis (bien que non formulé explicitement), à savoir: l'existence d'une suite $\{E_n\}$ de sous-ensembles de X qui admet une infinité indénombrable d'atomes ([2]) (non vides) et telle que

(○) toute mesure dénombrablement additive, définie dans le plus petit corps dénombrablement additif ayant les E_n pour éléments, s'annule identiquement lorsqu'elle s'annule sur chacun des atomes de la suite $\{E_n\}$.

L'étude des suites d'ensembles pourvues de la propriété (○) n'est pas facile. Banach se posait, par exemple, le problème suivant qui — autant que je sache — reste ouvert jusqu'à présent:

P 21. La somme de deux familles dénombrables dépourvues de la propriété (○) peut-elle avoir cette propriété?

Dans la note qui va suivre, Banach caractérise les suites $\{E_n\}$ ayant la propriété (○) à l'aide de deux notions: celle de fonction caractéristique

---

([1]) S. Banach et C. Kuratowski [*24*]; cf. aussi Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 100 et 133.

([2]) Pour la définition de l'atome voir p. ex. E. Szpilrajn-Marczewski, *The characteristic function of a sequence of sets and some of its applications*, Fundamenta Mathematicae 31 (1938), p. 207-223, en particulier p. 209 et 211. Cf. aussi la définition donnée plus loin, p. 292.

d'une suite d'ensembles [1] et celle d'ensemble étant *absolument de mesure nulle*. Rappelons qu'on appelle ainsi tout ensemble A situé dans l'intervalle $I = \langle 0, 1\rangle$ lorsque, quelle que soit la mesure dénombrablement additive μ, définie dans le corps de tous les sous-ensembles boreliens de I et s'annulant sur les ensembles à un point, il existe un ensemble borelien $B \supset A$ tel que $\mu(B) = 0$.

La note de Banach [2]. X étant un ensemble d'éléments quelconques, soit $\{E_n\}$ une suite d'ensembles contenus dans X.

Désignons par $c_n(x)$ où $x \epsilon X$ la fonction caractéristique de l'ensemble E_n et posons

$$c(x) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(x)}{3^n}. \tag{1}$$

La fonction $c(x)$ s'appelle *fonction caractéristique de la suite d'ensembles* $\{E_n\}$. Evidemment, les valeurs de cette fonction appartiennent à l'ensemble $\mathscr{C}$ de Cantor, c'est-à-dire à celui de tous les nombres de la forme

$$y = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad \text{où} \quad a_n = 0 \text{ ou } 1.$$

Soit pour tout $y \epsilon \mathscr{C}$

$$F(y) = \mathop{E}_{x}[c(x) = y]. \tag{2}$$

Les ensembles qui sont des valeurs de la fonction $F(y)$ s'appellent *atomes* de la suite $\{E_n\}$.

Soit Y l'ensemble des valeurs de la fonction caractéristique (1) de la suite $\{E_n\}$. Il est facile de voir que la fonction (1) transforme les ensembles

$$\prod_{i=1}^{n} (-1)^{1-a_i} E_i, \quad \text{où} \quad a_i = 0 \text{ ou } 1 \text{ et } -E_i = X - E_i, \tag{3}$$

en ensembles $J \cdot Y$ où J est l'intervalle

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} \leqslant y \leqslant 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}. \tag{4}$$

---

[1] Pour la définition de cette notion, voir ibidem, p. 210. Cf. aussi la formule (1).

[2] Elle date probablement d'avant 1940 et se trouvait entre ses papiers dans un état qui n'est pas, sans doute, celui d'un manuscrit définitif, déstiné à la publication. C'est pourquoi la forme dans laquelle elle est réproduite ici diffère de son texte authentique, d'ailleurs écrit en polonais, par des retouches indispensables pour la meilleure compréhension de la matière (comme l'emploi, par exemple, d'une autre notation ou d'une fonction caractéristique légèrement modifiée, mais plus commode dans la démonstration, etc.). Toutefois, la traduction de l'énoncé du théorème est textuelle.

Les intervalles (4) forment évidemment une *base* de sous-ensembles de l'ensemble de Cantor, c'est-à-dire que tout ensemble ouvert dans $\mathscr{C}$ est somme d'une suite d'intervalles de la forme (4).

THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une mesure dénombrablement additive, définie dans le plus petit corps dénombrablement additif contenant les ensembles E_n et s'annulant pour les atomes, est que l'ensemble des valeurs de la fonction caractéristique de la suite d'ensembles $\{E_n\}$ ne soit pas absolument de mesure nulle.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Admettons en effet que, dans le plus petit corps $\boldsymbol{E}$ dénombrablement additif et contenant les ensembles E_n, il existe une mesure dénombrablement additive $\mu(E)$, définie pour tout $E \epsilon \boldsymbol{E}$ et qui s'annule sur les atomes de la suite $\{E_n\}$ sans s'annuler identiquement.

Comme le corps $\boldsymbol{E}$ est dénombrablement additif et on a $c^{-1}(J) \epsilon \boldsymbol{E}$ pour tout intervalle J de la forme (4), on a encore $c^{-1}(E^*) \epsilon \boldsymbol{E}$ pour tout ensemble borelien E^* situé sur l'intervalle I.

Posons $E = c^{-1}(E^*)$ et

$$\mu^*(E^*) = \mu(E). \tag{5}$$

Ainsi définie, la mesure μ^* est dénombrablement additive. Il résulte da la définition des atomes que μ^* s'annule pour les ensembles à un point, puisque μ s'annule pour les atomes de la suite $\{E_n\}$.

L'ensemble Y n'est pas absolument de mesure nulle car, quel que soit l'ensemble $B \supset Y$, on a $c^{-1}(B) = X$, d'où, en vertu de (5), $\mu^*(B) = \mu(X) > 0$.

La condition est suffisante. Admettons que l'ensemble V n'est pas absolument de mesure nulle. Il existe donc une mesure μ' dénombrablement additive, définie dans le corps des ensembles boreliens de l'intervalle I et qui s'annule pour les points sans s'annuler pour l'ensemble Y. Soit Z un ensemble borelien contenant Y et tel que

$$\mu'(Z) = \mu'_e(Y) \text{ (1)}. \tag{6}$$

On a évidemment

$$\mu'(Z) > 0. \tag{7}$$

Désignons par $\boldsymbol{B}^*$ la famille de tous les ensembles de la forme $B \cdot Y$ où B est un ensemble borelien quelconque. $\boldsymbol{B}^*$ est évidemment un corps dénombrablement additif.

Posons

$$\mu^*(B \cdot Y) = \mu'(B \cdot Z); \tag{8}$$

---

(1) $\mu'_e(Y)$ désigne ici (par analogie à la *mesure extérieure*) la borne inférieure des nombres $\mu'(B)$ où B parcourt la famille des ensembles boreliens situés dans I et qui contiennent Y.

il en résulte pour $B = Z$ que

$$\mu^*(Y) > 0. \tag{9}$$

Remarquons que $\{B_n\}$ étant une suite d'ensembles boreliens tels que les ensembles $B_n \cdot Y$ sont deux à deux disjoints, on a en vertu de (6)

$$\mu'(B_i \cdot B_j) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j,$$

d'où

$$\mu'\Big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot Z\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(B_n \cdot Z),$$

donc en vertu de (8)

$$\mu^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot Y\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n \cdot Y).$$

Ainsi, la mesure μ^* est dénombrablement additive.

On montre facilement à l'aide des propriétés mentionnées de la fonction caractéristique d'une suite d'ensembles que tout ensemble $E \epsilon \boldsymbol{E}$ se laisse représenter toujours, et d'une façon univoque, sous la forme $E = c^{-1}(E^*)$ où $E^* \epsilon \boldsymbol{B}^*$.

Donc, si l'on définit la mesure μ dans le corps $\boldsymbol{E}$ par la formule (5), cette mesure est dénombrablement additive et elle s'annule pour les atomes de la suite $\{E_n\}$ puisque la mesure μ', et par suite μ^*, s'annulent pour les ensembles à un point.

Il est évident que la mesure μ n'est pas identiquement nulle car on a $\mu\big(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\big) > 0$ en vertu de (9).

Commentaire. En termes de la propriété ($\circ$), considérée dans la Préface, le théorème qui précède peut être formulé comme suit:

I. *Pour qu'une suite d'ensembles ait la propriété* ($\circ$), *il faut et il suffit que l'ensemble des valeurs de la fonction caractéristique de cette suite soit absolument de mesure nulle.*

C'est là un des théorèmes qui — par l'intermédiaire de la notion de fonction caractéristique d'une suite d'ensembles — traduisent certains phénomènes de la théorie générale des ensembles en langage de celle des ensembles de points (¹). Géométrisation est parfois simplification. Tous les théorèmes de ce genre reposent au fond sur la propriété fort simple et facile à démontrer de la fonction caractéristique d'une suite d'ensembles (²), à savoir sur la propriété qui exprime en particulier (en signes de la note de Banach) ceci:

(¹) Voir loco cit., p. 214-222.

(²) Ibidem, p. 212, 2.5 (ii), et du même auteur, *On the isomorphism and the equivalence of classes and sequences of sets*, Fundamenta Mathematicae 32 (1939), p. 133-148, en particulier p. 144, 3.4 (i).

II. *La fonction inverse* $c^{-1}(Q)$, *considérée comme celle d'ensemble* $Q \subset Y$, *transforme d'une façon biunivoque le corps* $\boldsymbol{B}^*$ *des ensembles boreliens dans* Y *en corps* $\boldsymbol{E}$.

Rappelons encore que la propriété „être absolument de mesure nulle“ se laisse remplacer par une propriété équivalente intrinsèque grâce à la proposition suivante:

III. *Pour qu'un ensemble* A *soit absolument de mesure nulle, il faut et il suffit que toute mesure dénombrablement additive, définie dans le corps des ensembles boreliens dans* A, *s'annule identiquement lorsqu'elle s'annule sur tout ensemble à un point* (1).

En tenant compte de l'additivité dénombrable de la fonction $c^{-1}(Q)$, la démonstration du théorème de Banach dans la forme I revient essentiellement à la substitution de III dans I et à l'application directe de II.

Notons pour terminer que M[lle] Bernstein et M. Ulam ont signalé en 1942 un théorème (2) en vertu duquel pour que la suite $\{E_n\}$ ait la propriété (○), il faut et il suffit que toutes les images homéomorphes (sur la ligne droite) de l'ensemble des valeurs de sa fonction caractéristique soient de mesure lebesguienne nulle.

Cette proposition peut être considérée comme un autre énoncé encore du même théorème de Banach, comme on le conclut par substitution en vertu du théorème connu suivant:

IV. *Pour qu'un ensemble* A *soit absolument de mesure nulle, il faut et il suffit, que tout ensemble* A^* *situé sur la droite et homéomorphe à* A *soit de mesure de Lebesgue nulle* (3).

---

(1) W. Sierpiński et E. Szpilrajn-Marczewski, *Remarque sur le problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae 26 (1936), p. 256-261, en particulier p. 259, IV. La seconde partie de la démonstration du théorème de Banach contient d'ailleurs implicitement une démonstration, même un peu plus simple, de l'énoncé III.

(2) D. L. Bernstein and S. M. Ulam, *On the problem of completely additive measures in classes of sets with a general equivalence relation*, Bulletin of the American Mathematical Society 48 (1942), p. 361-362.

(3) Voir p. ex. *Annexe*, Fundamenta Mathematicae 1, nouvelle édition (1937), p. 250. (2).