Sur la représentation des fonctions indépendantes à l'aide des fonctions de variables distinctes*

Rédigé d'après une notice posthume par S. Hartman et E. Marczewski

Introduction. Un des exemples les plus simples des fonctions indépendantes — entendues dans la suite toujours au sens stochastique (voir § 1, p. 300) — est celui des fonctions de variables différentes

$$\Phi^*(x, y) = \Phi(x), \qquad \Psi^*(x, y) = \Psi(y),$$

considérées dans le carré $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ (1). Il est naturel de se poser la question combien est vaste la classe de couples des fonctions indépendantes qui se laissent former des fonctions de variables différentes, au moyen des substitutions satisfaisant à certaines conditions.

Il s'est trouvé, parmi diverses notices de Banach, une feuille portant l'inscription *Fonctions indépendantes* et consacrée à ce problème. En voici la traduction textuelle (2):

„Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, deux fonctions indépendantes. Désignons par $g(u)$ et $h(u)$ leurs distributrices ($g(u) = m \underset{x}{E} \{f(x) < u\}$). Admettons que les fonctions $g(u)$ et $h(u)$ soient continues (c'est-à-dire que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ prennent chacune de leurs valeurs tout au plus dans un ensemble de mesure nulle).

1. Sous ces hypothèses, les fonctions

$$u = g[f(x)] = \alpha(x), \qquad v = h[\varphi(x)] = \beta(x) \tag{1}$$

définissent une transformation du segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ dans le carré $0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1$ avec conservation de la mesure. (3.5)

---

* Commenté sur p. 365.

(1) Cf. J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, *Sur les fonctions indépendantes*, Fundamenta Mathematicae 29 (1937), p. 60-90, en particulier p. 62.

(2) Nous n'y avons ajouté que la lettre E, omise par mégard dans le membre droit de la dernière formule, le texte des renvois (1) et (2), p. 297, et, à chaque théorème, le numéro entre parenthèses que ce théorème porte plus loin.

2. En désignant par $g^{-1}(u) = F(u)$ et $h^{-1}(v) = \Phi(v)$ les fonctions inverses de g et h (dans le cas où à un u_0 vient correspondre une infinité de valeurs $u_0 = g(x)$, on en prendra comme $g^{-1}(u_0)$ l'une quelconque, la plus petite par exemple), on a (¹)

$$(2) \qquad F[\alpha(x)] = f(x), \qquad \Phi[\beta(x)] = \varphi(x). \qquad (3.7)$$

3. Pour les fonctions indépendantes $f(x) = 1$ const, et $\varphi(x) = x$, on ne peut pas trouver de transformation conservant la mesure $[0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1] \leftrightarrow [0 \leqslant x \leqslant 1]$ et de fonctions $F(u)$ et $\Phi(v)$ telles que $F[\alpha(x)] = f(x)$ et $\Phi[\beta(x)] = \varphi(x)$. (3.9)

4. Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ n'admettent qu'une infinité dénombrable de valeurs (en dehors d'un ensemble de mesure nulle), il existe des fonctions $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $F(u)$ et $\Phi(v)$ ayant la propriété en question.

5. Problème. Établir des conditions pour qu'il existe, les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant indépendantes, des fonctions F, Φ, α et β ayant les propriétés exigées (²).

6. Les propositions 1-5 et 7 subsistent pour l'infinité dénombrable de fonctions indépendantes.

7. Lorsque $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions indépendantes et que $H(u, v)$ est une fonction de Baire, on a pour les fonctions $H[f(x), \varphi(y)]$ et $H[f(x), \varphi(x)]$ l'égalité

$$\operatorname{mes} \underset{x,y}{E} \{H[f(x), \varphi(y)] < a\} = \operatorname{mes} \underset{x}{E} \{H[f(x), \varphi(x)] < a\}$$

quel que soit a.“ (4.2)

Dans cette notice, Banach ne définit pas ce qu'il entend par conservation de la mesure comme propriété d'une transformation. Nous donnons au § 1 la définition de cette notion: il s'agit des transformations telles que la mesure de l'image réciproque de tout ensemble soit égale à la mesure de cet ensemble (³). Si l'on définissait la conservation de la mesure comme l'égalité entre la mesure de l'ensemble et celle de son image, la proposition 1 deviendrait fausse; cf. (3.6), p. 304.

(¹) Ces égalités se présentent *presque* partout et on peut montrer facilement, par une modification convenable de la fonction f ou φ dans un ensemble de mesure nulle, qu'elles peuvent ne pas se présenter partout. Pour que les égalités (2) subsistent partout, il faut modifier convenablement α et β; voir plus loin (3.4), p. 303, et (3.7), p. 305.

(²) Ce problème entre en liste de ceux publiés par Colloquium Mathematicum avec la désignation P 22; voir plus loin p. 303.

(³) La notion de conservation de la mesure ainsi conçue trouve des applications dans divers domaines de recherches. Cf. par exemple F. Riesz, *Sur la théorie ergodique*, Commentarii Mathematici Helvetici 17 (1944-1945), p. 221-239, en particulier p. 224.

Les §§ 1 et 2 contiennent des considérations auxiliaires, le § 3 — qui est la partie principale de cet ouvrage — traite les résultats signalés dans les propositions 1-5 de la notice de Banach; enfin, le § 4 apporte un théorème dont la proposition 7 est une conséquence. Quant à la proposition 6, nous l'avons omise, les démonstrations dont il s'agit ne comportant pas de difficultés essentielles.

Nous employons les notations suivantes:

$|E|_1$ pour la mesure linéaire de Lebesgue de l'ensemble E,
$|E|_2$ pour la mesure plane de Lebesgue de l'ensemble E,
(u, v) pour le point d'abscisse u et d'ordonnée v,
$\langle a, b\rangle$ pour l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$.

Nous posons, en particulier, $I = \langle 0, 1\rangle$ et désignons par I^2 le carré $I\times I$.

Enfin, toute fonction définie dans un espace X tout entier et dont les valeurs forment un sous-ensemble d'un espace Y sera dite, tout court, *transformation de l'espace X en espace Y* (ou *de X en Y*).

§ 1. Conservation de la mesure. Équimesurabilité. Indépendance. Nous entendons par *mesure borelienne* dans un espace métrique T toute fonction non négative et dénombrablement additive $\mu(E)$ définie pour les ensembles boreliens $E \subset T$. Un ensemble $M \subset T$ s'appelle *mesurable* par μ s'il existe des ensembles boreliens B_1 et B_2 tels que $B_1 \subset M \subset B_2$ et $\mu(B_2-B_1) = 0$.

En posant alors $\mu(M) = \mu(B_1)$, nous étendons la définition de la fonction μ à tous les ensembles mesurables par μ.

Une transformation $x = f(x)$ de l'espace T en espace métrique X est dite *mesurable* par rapport à μ si, pour tout ensemble G ouvert dans X (donc aussi pour tout ensemble G borelien dans X), son image réciproque $f^{-1}(G)$ est un ensemble mesurable par μ.

Il est aisé de voir que

(1.1) *Si l'on pose pour tout ensemble B borelien dans X*

$$\mu_f(B) = \mu[f^{-1}(B)],$$

la fonction μ_f est une mesure borelienne dans X.

Pour tout ensemble $M \subset X$ mesurable par μ_f, l'ensemble $f^{-1}(M)$ est mesurable par μ et on a $\mu_f(M) = \mu[f^{-1}(M)]$.

Les mesures boreliennes μ et ν étant données respectivement dans les espaces (métriques) T et X, on dit d'une transformation $x = f(t)$ de T en X qu'elle *conserve la mesure*, si elle est mesurable par rapport à μ et si ν coïncide avec μ_f, c'est-à-dire, si $\nu(B) = \mu[f^{-1}(B)]$ pour tout ensemble borelien $B \subset X$.

On conclut aussitôt de (1.1) — en conservant les notations ci-dessus — que

(1.2) *Si l'ensemble* $M \subset X$ *est mesurable par* ν *et la transformation* $x = f(t)$ *conserve la mesure, l'ensemble* $f^{-1}(M)$ *est mesurable par* μ *et on a* $\mu[f^{-1}(M)] = \nu(M)$.

La définition de la conservation de la mesure n'implique point que, f conservant la mesure et B étant borelien dans T, l'ensemble $f(B)$ est mesurable par ν, pas plus que, lorsqu'il l'est, qu'on a $\nu[f(B)] = \mu(B)$; cf. à ce sujet (2.7), p. 302. Cependant, du moins sous certaines hypothèses supplémentaires concernant l'espace T, l'ensemble $f(T)$ est mesurable et on a $\nu[f(T)] = \mu(T)$. Tel est le théorème:

(1.3) *Si la transformation mesurable* $x = f(t)$ *de l'espace* T *compact* [1] *et pourvu d'une mesure borelienne* μ *finie conserve la mesure, on a* $\nu[X - f(T)] = 0$.

La démonstration s'appuie sur le théorème bien connu de N. Lusin (valable pour les mesures boreliennes finies et pour les transformations mesurables des espaces métriques arbitraires), à savoir que T contient pour tout $\varepsilon > 0$ un ensemble C fermé — donc compact si T l'est — tel que $\mu(T - C) < \varepsilon$ et que la transformation f, considérée uniquement dans C, est continue. L'ensemble $D = f(C)$ est par conséquent compact. Comme $f^{-1}(D) \supset C$, on a pour f conservant la mesure

$$\nu(D) = \mu[f^{-1}(D)] \geqslant \mu(C) > \mu(T) - \varepsilon;$$

comme $\nu(X) = \mu[f^{-1}(X)] = \mu(T)$, on en tire $\nu(D) > \nu(X) - \varepsilon$; comme $D \subset f(T)$, on conclut donc, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, que $\nu[X - f(T)] = 0$, c. q. f. d.

On constante facilement que la conservation de la mesure est transitive:

(1.4) *Si les transformations* $x = f(t)$ *de* T *en* X *et* $y = g(x)$ *de* X *en* Y *conservent la mesure, leur superposition* $y = g[f(t)]$, *qui est une transformation de* T *en* Y, *conserve la mesure.*

T, T', T'' et X étant des espaces métriques pourvus des mesures boreliennes μ, μ', μ'' et ν respectivement, deux transformations $x = f_1(t)$ de T' en X et $x = f_2(t)$ de T'' en X, mesurables par rapport à μ' et μ'' respectivement, s'appellent *équimesurables* [2] lorsque les mesures μ'_{f_1} et μ''_{f_2} coïncident, c'est-à-dire que $\mu'[f_1^{-1}(B)] = \mu''[f_2^{-1}(B)]$ pour tout B borelien dans X.

---

[1] La compacité de T peut être remplacée par des hypothèses plus faibles, par celle, par exemple, que T est séparable et complet. Il suffit d'appliquer le théorème d'Ulam d'après lequel T contient alors, pour toute mesure borelienne μ finie et pour tout $\varepsilon > 0$, un ensemble compact C tel que $\mu(T - C) < \varepsilon$; cf. S. M. Ulam, *On the distribution of a general measure in any complete metric space*, Bulletin of the American Mathematical Society 44 (1938), p. 786.

[2] Voir par exemple J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, loco cit., p. 61.

Le théorème suivant résulte directement des définitions de la conservation de la mesure et de l'équimesurabilité:

(1.5) *Les transformations mesurables* $\tau = f_1(t)$ *et* $\tau = f_2(t)$ *des espaces* T' *et* T'' *en* T *étant équimesurables et la fransformation* $x = g(\tau)$ *de* T *en* X *étant mesurable* (B) (¹), *les transformations mesurables* $x = g[f_1(t)]$ *et* $x = g[f_2(t)]$ *de* T' *et* T'' *en* X *sont équimesurables.*

Soit dorénavant T un espace métrique dans lequel une mesure borelienne μ est supposée fixée, telle que

$$\mu(T) = 1.$$

Deux transformations $x = f(t)$ et $y = g(t)$ de T en X et Y respectivement, mesurables par rapport à μ, s'appellent *stochastiquement indépendantes* (²) — et dans la suite *indépendantes* tout court — par rapport à μ si l'on a, quels que soient les ensembles boreliens $A \subset X$ et $B \subset Y$, $\mu[f^{-1}(A)]\cdot\mu[g^{-1}(B)] = \mu[f^{-1}(A)\cdot f^{-1}(B)]$.

Cette définition entraîne aussitôt que

(1.6) *La transformation* $t = h(u)$ *de* U *en* T *conservant la mesure et les transformations* $x = f(t)$ *et* $y = g(t)$ *de* T *étant indépendantes, celles superposées* $x = f[h(u)]$ *et* $y = g[h(u)]$ *sont aussi indépendantes.*

On notera enfin que les trois notions qui viennent d'être envisagées ne dépendent pas des valeurs que les transformations prennent dans les ensembles de mesure nulle. En effet, les définitions de ces notions impliquent aussitôt que

(1.7) *La conservation de la mesure par une transformation, l'équimesurabilité des transformations et leur indépendance sont des invariants par rapport aux modifications de ces transformations dans un ensemble arbitraire de mesure nulle.*

§ 2. Distributrices. Soit μ une mesure borelienne finie sur la droite ou sur le plan (de même: sur le segment rectiligne ou sur le carré). Posons pour des nombres réels quelconques u et v:

$$p_\mu(u) = \mu\Big(\underset{x}{E}[x < u]\Big), \qquad p_\mu(u, v) = \mu\Big(\underset{x,y}{E}[x < u, y < v]\Big).$$

On sait que

(¹) C'est-à-dire telle que $g^{-1}(G)$ est un ensemble borelien dans T pour tout G ouvert (donc aussi pour tout G borelien) dans X.

(²) Notion due à A. Kolmogoroff et à H. Steinhaut, qui l'ont précisée de deux manières non équivalentes en général, mais équivalentes lorsque la mesure μ est en particulier celle de Lebesgue dans I (cf. S. Hartman, Colloquium Mathematicum ( ), p. 17-22) et aussi, d'une façon plus générale, lorsqu'elle est une mesure borelienne au sens adopté plus haut.

(2.1) *Pour que deux mesures boreliennes finies μ et ν définies sur la droite ou sur le plan (sur le segment ou sur le carré) coïncident, il faut et il suffit que les fonctions p_μ et p_ν coïncident* (1).

T étant un espace métrique avec une mesure borelienne μ fixée dans lui et assujettie à la condition $\mu(T) = 1$ (cf. § 1, p. 300), attachons à toute fonction réelle $x = f(t)$, définie dans T et mesurable par rapport à μ, la fonction dite *distributrice* de f — et qui sera désignée par d_f — à savoir la fonction réelle $p_{\mu_f}(u)$ de la variable réelle (pour le symbole μ_f voir (1.1), p. 298). On a donc par définition

$$d_f(u) = \mu\Big(\underset{t}{E}\,[f(t) < u]\Big).$$

De même, si $z = f(t)$ est une fonction complexe définie dans T — donc une transformation $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ de T en un plan (ou en un carré) — mesurable par rapport à μ, la distributrice d_f de f, qui peut alors être désignée aussi par $d_{\varphi,\psi}$, est par définition la fonction réelle $p_{\mu_f}(u, v)$ de deux variables réelles:

$$d_f(u, v) = \mu\Big(\underset{t}{E}\,[\varphi(t) < u;\ \psi(t) < v]\Big).$$

La généralisation à plus de 2 dimensions est évidente.

On déduit immédiatement de la définition que

(2.2) *Les distributrices sont des fonctions monotones non décroissantes de chacune des variables et* $\lim\limits_{u\to-\infty} d_f(u) = 0$, $\lim\limits_{u\to+\infty} d_f(u) = 1$.

Si $u_1 \leqslant f(t) < u_2$ *pour tout* $t \in T$, *on a* $d_f(u_1) = 0$ *et* $d_f(u_2) = 1$.

Le théorème (2.1) entraîne aussitôt le suivant:

(2.3) *T' et T'' étant deux espaces métriques pourvus des mesures boreliennes μ' et μ'' respectivement, pour que deux transformations f_1 et f_2 de ces espaces en sous-ensembles de la droite ou du plan, supposées mesurables par rapport à ces mesures respectivement, soient équimesurables, il faut et il suffit que leurs distributrices soient identiques.*

La définition de la distributrice permet d'établir facilement le théorème:

(2.4) *Une fonction réelle $f(t)$ définie dans T étant mesurable par rapport à μ et S désignant la somme des intervalles où sa distributrice d_f est constante, la continuité de d_f entraîne* $\mu[f^{-1}(S)] = 0$.

Considérons à présent le segment I avec la mesure de Lebesgue linéaire et le carré I^2 avec la mesure de Lebesgue plane. Il résulte directement de (2.1) que

---

(1) Cf. par exemple H. Cramér, *Mathematical methods of statistics*, Princeton 1946, p. 53 et 57.

(2.5) *Pour qu'une transformation f de T en I [en I^2], supposée mesurable par rapport à μ, conserve la mesure, il faut et il suffit que l'on ait $d_f(u) = u$ pour tout $u \in I$ [$d_f(u, v) = uv$ pour tout $(u, v) \in I^2$].*

En particulier:

(2.6) *Si la transformation $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ de I en I^2 conserve la mesure, on a $d_\varphi(u) = u$ et $d_\psi(v) = v$.*

L'exemple suivant d'une fonction conservant la mesure nous sera utile au § 3 (p. 304):

(2.7) *La fonction*

$$a(t) = \begin{cases} 2t & \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ 2t-1 & \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

qui transforme I en lui-même, conserve la mesure (¹).

La démonstration résulte de $d_a(u) = u$ et de (2.5).

La fonction $a(t)$ est un exemple de la conservation de la mesure au sens défini plus haut (§ 1, p. 298), mais pas au sens de l'égalité $|a(E)| = |E|$; il suffit, en effet, de poser $E = \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$.

§ 3. Rapports entre l'indépendance et la conservation de la mesure. Représentation pluriaxiale des fonctions. La définition de l'indépendance (§ 1, p. 300) a pour conséquence immédiate le théorème mentionné au début de l'Introduction:

(3.1) $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ *étant des fonctions réelles mesurables définies dans I, les fonctions définies dans I^2 par les formules $\Phi^*(x, y) = \Phi(x)$ et $\Psi^*(x, y) = \Psi(y)$ sont indépendantes.*

Ce théorème suggère l'idée de la définition suivante: deux fonctions mesurables $f(t)$ et $g(t)$ définies dans I sont *représentables biaxialement* s'il existe une transformation $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ de I en I^2 conservant la mesure et deux fonctions mesurables $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ telles que

$$(*) \qquad f(t) = \Phi[\varphi(t)] \quad \text{et} \quad g(t) = \Psi[\psi(t)] \quad \text{pour tout } t \in I.$$

La définition de la *représentabilité pluriaxiale* (donc *triaxiale* de trois fonctions, etc.) est analogue et donne lieu aux généralisations correspondantes des théorèmes qui suivant.

En particulier, en vertu de (1.6) et (3.1):

(3.2) *Deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ mesurables dans I et représentables biaxialement sont toujours indépendantes.*

En effet, étant donnée la représentation biaxiale (*) de ces fonctions, posons:

$$\Phi^*(x, y) = \Phi(x), \qquad \Psi^*(x, y) = \Psi(y) \qquad \text{et} \qquad h(t) = [\varphi(t), \psi(t)].$$

(¹) F. Riesz, loco cit., p. 223.

Il suffit alors d'appliquer (3.1) à Φ et Ψ, puis (1.6) à h, Φ^* et Ψ^*, en remarquant enfin que

$$\Phi^*[\varphi(t), \psi(t)] = \Phi[\varphi(t)] \quad \text{et} \quad \Psi^*[\varphi(t), \psi(t)] = \Psi[\psi(t)].$$

Dans le cas particulier où $\Phi(x) = x$ et $\Psi(x) = x$, le théorème (3.2) implique le suivant:

(3.3) *Deux fonctions $x = \varphi(t)$, et $y = \psi(t)$ qui définissent une transformation de I en I^2 conservant la mesure lebesguienne sont toujours indépendantes* (1).

Le problème posé par Banach dans la proposition 5 de sa notice peut être énoncé comme suit:

P 22. Établir des conditions suffisantes pour que les fonctions indépendantes soient représentables pluriaxialement.

Les théoremes (3.7), (3.8) et l'exemple (3.9), qui vont suivre, donnent autant des réponses partielles à ce problème. Nous établirons au préalable trois lemmes.

(3.4) *Les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ qui coïncident presque partout avec des fonctions représentables biaxialement le sont aussi.*

Soit, en effet, $N \subset I$ un ensemble de mesure nulle. Admettons que, pour tout $t \in I - N$, on a $f(t) = \Phi_0[\varphi_0(t)]$ et $g(t) = \Psi_0[\psi_0(t)]$, où Φ_0 et Ψ_0 sont des fonctions mesurables, et que $h_0(t) = [\varphi_0(t), \psi_0(t)]$ est une transformation de I en I^2 conservant la mesure.

Nous allons définir les fonctions Φ, Ψ, φ et ψ qui réalisent la représentation biaxiale des fonctions f et g.

Soit $H \subset I$ un ensemble de mesure nulle et de puissance du continu. Comme h_0 conserve la mesure, l'ensemble $M = h_0^{-1}(H \times I) = \varphi_0^{-1}(H)$ est de mesure nulle. Soit φ_1 une correspondance biunivoque entre $M+N$ et H. Posons:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0(t) & \text{pour} \quad t \in I-(M+N), \\ \varphi_1(t) & \text{pour} \quad t \in M+N, \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_0(x) & \text{pour} \quad x \in I-H, \\ f(t) & \text{pour} \quad x = \varphi_1(t) \in H. \end{cases}$$

Ces définitions et les définitions analogues de $\psi(t)$ et $\Psi(x)$ entraînent aussitôt la thèse du lemme en vertu de (1.7).

---

(1) C'est ainsi, par exemple, que les fonctions qui définissent la „courbe" classique de Peano sont indépendantes; cf. H. Steinhaus, *La courbe de Peano et les fonctions indépendantes*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris) 202 (1936), p. 1961-1963.

(3.5) *Si les fonctions réelles $f(t)$ et $g(t)$ définies dans I et mesurables sont indépendantes et leurs distributrices d_f et d_g sont continues, les formules*

$$(**) \qquad x = \varphi(t) = d_f[f(t)], \qquad y = \psi(t) = d_g[g(t)]$$

définissent une transformation de I en I^2 qui conserve la mesure.

Pour l'établir, il suffit d'après (2.5) de démontrer que l'on a $d_{\varphi,\psi}(u, v) = uv$ pour tout $(u, v) \in I^2$, c'est-à-dire que

$$\text{(i)} \qquad \left| \underset{t}{E}\{d_f[f(t)] < u\} \cdot \underset{t}{E}\{d_g[g(t)] < v\} \right| = uv.$$

La continuité des distributrices d_f et d_g entraîne en vertu de (2.2) l'existence, pour tout $(u, v) \in I^2$ donné, de deux nombres y et z tels que $d_f(y) = u$ et $d_g(z) = v$. Les distributrices étant monotones d'après (2.2), on a

$$\text{(ii)} \quad \underset{t}{E}\{d_f[f(t)] < u\} = \underset{t}{E}[f(t) < y], \qquad \underset{t}{E}\{d_g[g(t)] < v\} = \underset{t}{E}[g(t) < z].$$

L'indépendance de f et g implique d'après la définition de y et z en appliquant (2.6)

$$\left| \underset{t}{E}[f(t) < y] \cdot \underset{t}{E}[g(t) < z] \right| = \left| \underset{t}{E}[f(t) < y] \right| \cdot \left| \underset{t}{E}[g(t) < z] \right|$$
$$= d_f(y) \cdot d_g(z) = uv.$$

Il en résulte (i) en vertu de (ii), c. q. f. d.

Il est à noter que la transformation (**), bien qu'elle conserve la mesure au sens du § 1 (p. 298), peut, d'une manière tout à fait essentielle, ne pas être biunivoque. En effet:

(3.6) *Il existe des fonctions mesurables et indépendantes $f(t)$ et $g(t)$ dont les distributrices sont continues et pour lesquelles* (**) *transforme chacun des intervalles $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ et $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ en carré I^2 presque entier.*

Pour le démontrer, considérons deux fonctions quelconques $x = F(t)$ et $y = G(t)$ définissant une transformation de I en I^2 qui conserve la mesure et posons

$$f(t) = F[\alpha(t)], \qquad g(t) = G[\alpha(t)],$$

où $\alpha(t)$ est la fonction définie dans (2.7).

On conclut aussitôt de (2.7) et (1.4) que la transformation $x = f(t)$, $y = g(t)$ de I en I^2 conserve la mesure, donc que f et g sont d'après (2.5) et (3.3) des fonctions indépendantes dont les distributrices $d_f(u) = u$ et $d_g(v) = v$ sont continues. Ainsi (**) est tout simplement la transformation $x = f(t)$, $y = g(t)$ qui — comme il est facile de voir — possède la propriété annoncée.

(3.7) Théorème A. *Si deux fonctions réelles $f(t)$ et $g(t)$ définies dans I sont mesurables, indépendantes et ayant les distributrices continues, ces fonctions sont représentables biaxialement.*

Soit, en effet, U l'ensemble des valeurs de d_f qui ne sont prises qu'exactement une fois. La continuité admise pour d_f implique en vertu de (2.2) que $U = I - D$ où D est au plus dénombrable. Soit $\Phi(x)$ la fonction réciproque à $d_f(u)$ pour $u \in U$ et arbitraire pour $u \in D$. La fonction $\Psi(x)$ étant définie pour d_g d'une façon analogue, posons pour tout $t \in I$:

$$\varphi(t) = d_f[f(t)], \qquad \psi(t) = d_g[g(t)].$$

L'indépendance de f et g implique d'après (3.5) que la transformation φ, ψ conserve la mesure. En vertu de (2.4), on a pour presque tout $t \in I$:

$$\Phi[\varphi(t)] = \Phi\{d_f[f(t)]\} = f(t), \qquad \Psi[\psi(t)] = \Psi\{d_g[g(t)]\} = g(t),$$

ce qui entraîne la thèse du théorème en vertu de (3.4).

Passons aux distributrices discontinues.

(3.8) Théorème B. *Si deux fonctions réelles $f(t)$ et $g(t)$ définies dans I sont mesurables, indépendantes et ne prenant, en dehors d'un ensemble de mesure nulle, que tout au plus une infinité dénombrable des valeurs, ces fonctions sont représentables biaxialement.*

Vu (3.4), on peut admettre sans restreindre la généralité que les fonctions f et g ont exactement une infinité dénombrable des valeurs différentes $a_1, a_2, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$ respectivement, chacune d'elles étant prise dans un ensemble de puissance du continu.

En posant

$$f^{-1}(a_i) = A_i \quad \text{et} \quad g^{-1}(b_j) = B_j,$$

on a donc les décompositions

$$I = \sum_i A_i = \sum_j B_j = \sum_{i,j} A_i B_j.$$

L'indépendance de f et g entraîne

$$|A_i B_j| = |A_i| \cdot |B_j| = |A_i \times B_j|_2$$

où $\times$ désigne la multiplication cartésienne. On déduit facilement du théorème sur l'équivalence des mesures [1] l'existence d'une transformation biunivoque de I en I^2, mesurable et dont la transformation réciproque l'est, conservant la mesure et transformant $A_i B_j$ en $A_i \times B_j$. En désignant

[1] E. Szpilrajn-Marczewski, *O zbiorach i funkcjach bezwzględnie mierzalnych* (*Sur les ensembles et les fonctions absolument mesurables*), Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 30 (1937), p. 39-68; voir en particulier 4.1 (ii), p. 57.

cette transformation par $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, il en résulte facilement pour tout $t \in I$ les égalités

$$f(t) = f[\varphi(t)] \quad \text{et} \quad g(t) = g[\psi(t)],$$

car si l'on a $t \in A_i B_j$, par exemple, on aura $[\varphi(t), \psi(t)] \in A_i \times B_j$, donc $\varphi(t) \in A_i$; mais la fonction f est constante dans A_i. Reste à poser $\Phi(t) = f(t)$ et $\Psi(t) = g(t)$ pour satisfaire à la thèse du théorème.

(3.7) et (3.8) sont complétés par l'exemple suivant:

(3.9) EXEMPLE C. *Les fonctions indépendantes $f(t) = 1$ et $g(t) = t$ n'admettent pas de représentation biaxiale.*

Supposons, en effet, que les fonctions Φ, Ψ, φ et ψ réalisent une telle représentation. On aurait donc $\Psi[\psi(t)] = t$ et il en résulterait que ψ ne prend chaque valeur qu'une fois au plus, de sorte que l'image de I donnée par la transformation φ, ψ ne contiendrait qu'un point sur toute droite horizontale. C'est incompatible avec le théorème (1.3), d'après lequel cette image couvre I^2 presque entièrement.

Il est à remarquer qu'on pourrait aussi considérer la représentabilité pluriaxiale *au sens fort*, en admettant que la transformation φ, ψ soit biunivoque et que l'égalité (*), p. 302, se présente presque partout. Alors le problème suivant s'impose:

P 23. Établir des conditions suffisantes pour que les fonctions indépendantes soient représentables pluriaxialement au sens fort.

L'exemple (3.6) montre que, pour une telle représentabilité, il est impossible de parvenir par la même voie de démonstration au théorème analogue à (3.7). Par contre, c'est possible en ce qui concerne le théorème analogue à (3.8); il suffit, à cet effet, d'en modifier légèrement la démonstration.

§ 4. Rapports entre l'indépendance et l'équimesurabilité.

(4.1) THÉORÈME D. *Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions réelles, définies dans I et mesurables. Posons pour $t, x, y \in I$:*

$$\Phi(t) = [f(t), g(t)] \quad et \quad \Psi(x, y) = [f(x), g(y)].$$

Pour que les fonctions f et g soient indépendantes, il faut et il suffit que les fonctions Φ et Ψ soient équimesurables.

En effet, les valeurs des fonctions Φ et Ψ sont des points du plan. A et B étant des ensembles boreliens sur la droite, on a

$$|\Phi^{-1}(A \times B)| = |f^{-1}(A) \cdot g^{-1}(B)|,$$

$$|\Psi^{-1}(A \times B)|_2 = |f^{-1}(A) \times g^{-1}(B)|_2 = |f^{-1}(A)| \cdot |g^{-1}(B)|.$$

Il en résulte que l'indépendance de f et g équivaut à la condition que l'on ait $|\Phi^{-1}(A\times B)| = |\Psi^{-1}(A\times B)|_2$ pour tous A et B boreliens, ce qui équivaut en vertu de (2.3) à l'équimesurabilité des fonctions Φ et Ψ.

(4.1) entraîne en vertu de (1.5) le

(4.2) Corollaire E. *Si deux fonctions réelles $f(t)$ et $g(t)$ définies dans I sont mesurables et indépendantes et la fonction $h(u, v)$ de deux variables réelles est mesurable (B), les fonctions $h[f(t), g(t)]$ et $h[f(x), g(y)]$ sont équimesurables.*