Sur le prolongement de certaines fonctionnelles

publié dans Bull. Sci. Math. (2) 49 (1925), p. 301–307.

1. Soit E un espace métrique continu, dans lequel par conséquent deux points quelconques a, b ont une distance ab bien définie, qui remplit les conditions suivantes: 1° $ab = ba > 0$ pour $a \neq b$, $aa = 0$; 2° $ab + bc \geqslant ac$; 3° on peut joindre deux points quelconques par un arc simple. (Un arc simple est une image continue et biunivoque d'un segment.)

Soit B un sous-ensemble dense dans E, c'est-à-dire que l'ensemble dérivé de B soit égal à E. Considérons une fonctionnelle U définie pour tous les elements de l'ensemble B.

Désignons par $\omega(x)$(1) $\limsup U(a) - \liminf U(a)$, $a \to x$, $a \neq x$, $a \subset B$. Il est clair que, si pour un point $x, \omega(x) > 0$, on ne peut pas définir U au point x de telle manière que U soit continue en x. Si nous supposons maintenant que $\omega(x) > 0$ pour chaque point de $E - B$, peut-on affirmer que la fonctionnelle U n'est pas continue dans B?

Dans cette Note, je démontre que pour que la réponse soit affirmative. il est nécessaire et suffisant que B ne soit pas un G_δ(2).

M. Paul Lévy pose dans son excellent livre(3) le probleme suivant: „Considérons une fonctionnelle U définie pour toutes les fonctions ayant des dérivées finies jusqu'à l'ordre p, mais n'ayant aucun sens si la dérivée d'ordre p n'existe pas ou devient infinie. Peut-on affirmer qu'elle n'est pas continue d'ordre $p-1$?" Si nous admettons que la phrase „n'avoir aucun sens" est équivalente à „ne pas être défini" la réponse est triviale. En effet, la fonctionnelle qui s'annule pour chaque fonction ayant une dérivée d'ordre p finie et pour d'autres fonctions est indéfinie resout le problème de M. Lévy négativement(4). Changeons maintenant l'énoncé du problème de M.

---

(1) Nous appelons $\omega(x)$ l'oscillation au point x.

(2) G_δ est un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts.

(3) *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris 1922, p. 18–19.

(4) G. Bouligand, *Sur quelques points d'analyses fonctionnelles*, Comptes Rendus 176, p. 822 et *Sur les modes de continuité de certaines fonctionnelles*, Bulletin des Sciences Mathématiques (2) 47 (1923).

Lévy de la manière suivante: Considérons une fonctionnelle U, définie pour toutes les fonctions ayant des dérivées finies jusqu'à l'ordre p, mais telle que si φ est une fonction arbitraire n'admettant pas de dérivée finie d'ordre p, on ne peut pas définir U pour φ, de sorte que U soit continue d'ordre $p-1$ pour φ. Peut-on affirmer que U n'est pas continue d'ordre $p-1$? La réponse maintenant est affirmative et un peu moins triviale. En effet, si nous désignons par E l'ensemble de toutes les fonctions ayant la dérivée d'ordre $p-1$ finie, par B l'ensemble de toutes les fonctions ayant la dérivée d'ordre p finie et si nous définissons la distance de deux éléments φ, ψ de E comme égale à

$$\max|\varphi-\psi|+\max\left|\frac{d^{p-1}\varphi}{dt^{p-1}}-\frac{d^{p-1}\psi}{dt^{p-1}}\right|,$$

on voit sans peine que, d'après notre théorème cité ci-dessus, la réponse est négative ou affirmative suivant que B est un G_δ, donc la réponse est affirmative.

2. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si E est un ensemble métrique et continu, B un ensemble dense dans E, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonctionnelle U définie et continue dans B mais telle que pour chaque x de $E-B$ $\omega(x)$ soit positif est que B soit un G_δ.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, soit U une fonctionnelle qui remplit les conditions de notre théorème. Désignons par A_n tous les points x de E pour lesquels $\omega(x) < 1/n$.

Il est clair que A_n est un ensemble ouvert et que

$$B = \prod_{n=1}^{\infty} A_n.$$

B est donc un G_δ.

La condition est suffisante. En effet, posons

$$B = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n,$$

où les φ_n sont des ensembles ouverts. Nous pouvons sans aucune restriction admettre que $\varphi_{n+1}\subset\varphi_n$ pour chaque n. Désignons par $V_n(x)$ la distance d'un point x à l'ensemble fermé $E-\varphi_n$. En d'autres termes $V_n(x) = \lim\inf x\varphi y$ $\subset E-\varphi_n$. Il est évident que la fonctionnelle

$$U_n(a) = \sin\frac{1}{V_n(a)}$$

est bien définie et continue dans B, parce que $V_n(a) \neq 0$ si $a \subset B$.

La fonctionnelle

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n U_n,$$

où $\{\alpha_n\}_{n=1,\dots}$, est une suite de nombres positifs remplissant la condition

$$\alpha_n > \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i,$$

d'ailleurs quelconque, est la fonctionnelle cherchée. En effet, U est bien définie et continue dans B car chaque U_n est définie et continue dans B, $|U_n| \leqslant 1$ et la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ est absolument convergente. Soit x un point quelconque de $E-B$. Nous démontrerons maintenant que si

$$x \subset E-\varphi_n, \qquad \omega_n(x) = 2$$

en désignant par $\omega_n(x)$ l'oscillation de la fonctionnelle $U_n(x)$ en x. Si nous joignons un point quelconque a de B avec x au moyen de l'arc simple k, il y a sur k deux points y', y'' aussi voisins que l'on veut du point x pour lesquels

$$\frac{1}{\sin \dfrac{1}{V_n(y')}} = -\frac{1}{\sin \dfrac{1}{V_n(y'')}} = 1.$$

Or puisque B est partout dense, il y a deux points a', a'' de B assez voisins de y' et y'' pour que

$$U_n(a') - U_n(a'') > 2-\varepsilon,$$

ε étant un nombre positif quelconque donné d'avance. Cela montre que $\omega_n(x) \geqslant 2$. Il est évident que d'après la définition de $U_n, \omega_n(x)$ est au plus égal à 2, donc $\omega_n(x) = 2$. Si maintenant N est le plus petit des nombres n tels que $x \subset E-\varphi_n$, nous avons

$$\omega_i(x) = 0 \text{ pour } i < N, \qquad \omega_i(x) = 2 \text{ pour } i \geqslant N.$$

Par conséquent

$$\omega(x) \geqslant \alpha_n \omega_n(x) - \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i \omega_i(x) = 2\alpha_n - 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i.$$

Comme d'après la supposition

$$\alpha_N > \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i,$$

donc $\omega(x) > 0$. Notre théorème est démontré.

3. Nous allons maintenant envisager divers champs fonctionnels. Nous disons qu'un ensemble B est G_δ par rapport à un ensemble métrique E, si B est le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts situés dans E. Si nous définissons la distance de deux fonctions $x(t)$, $y(t)$ définies dans l'intervalle $(0\ldots 1)$ et admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $p-1$ comme égale à

$$\max|x(t)-\varphi(t)|+\max\left|\frac{d^{p-1}x}{dt^p}-\frac{d^{p-1}y}{dt^p}\right|,$$

nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME II. *L'ensemble B de toutes fonctions définies dans* $(0\ldots 1)$, *admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre p, n'est pas un* G_δ *par rapport à l'ensemble E de toutes les fonctions définies dans* $(0\ldots 1)$ *admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre* $p-1$.

Démonstration. Supposons que B est un G_δ par rapport à E. Dans ce cas, il y a une suite dénombrable d'ensembles $\{A_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$ ouverts tels que $B=\prod_{i=1}^{\infty}A_i$. Si α et β sont des constantes quelconques mais telles que $0<\alpha<\beta<1/2$, désignons par $f(t,\alpha,\beta)$ la fonction définie par les formules

$$f(t,\alpha,\beta)=0 \text{ pour } t=0,\alpha,\beta,1, \quad f(t,\alpha,\beta)=1 \text{ pour } t=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

et par la condition de varier linéairement dans chacun des intervalles

$$(0,\alpha),\quad \left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\quad \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right),\quad (\beta,1).$$

Soit $\{\varepsilon_n\}_{n=1,\ldots,\infty}$ une suite quelconque des nombres positifs tendant vers zéro. Envisageons la sphère([5]) k_1 de centre $x(t)\equiv 0$ et de rayon plus petit que ε_1 contenue dans A_1. Il est clair qu'on peut trouver un nombre α_1 assez petit pour qu'il existe dans la sphère k_1 une fonction $x_1(t)$ vérifiant l'équation

$$\frac{d^p x_1}{dt^p}=f(t,0,\alpha_1).$$

Désignons par k_2 une sphère de centre x_1 de rayon plus petit que ε_2 contenue dans $k_1\cdot A_2$. On peut trouver un nombre $\alpha_2, \alpha_1<\alpha_2<1/2$ assez voisin de α_1 pour qu'il existe dans la sphère k_2 une fonction x_2 vérifiant l'équation

$$\frac{d^p x_2}{dt^p}=f(t,\alpha_1,\alpha_2)+\frac{d^p x_1}{dt^p}.$$

([5]) La sphère k de centre x et de rayon r est l'ensemble de toutes les fonctions appartenant a E, dont la distance de x est plus petite que r.

En général nous désignons par k_n une sphère de centre x_{n-1} et de rayon plus petit que ε_n, contenue dans $A_n \cdot k_{n-1}$, par α_n un nombre remplissant les conditions: 1) $\alpha_{n-1} < \alpha_n < 1/2$; 2) Dans la sphère k_n, il existe une fonction x_n vérifiant l'équation

$$\frac{d^p x_n}{dt^p} = f(t, \alpha_{n-1}, \alpha_n) + \frac{d^p x_{n-1}}{dt^p}.$$

Il est clair que tous les x_n à indices plus grands que N appartiennent à k_N. Puisque le rayon de k_n tend vers 0 avec $1/n$, x_n tend uniformément avec ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$ vers une fonction x et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$. Il est évident que $x \subset k_n$ pour chaque n, donc $x \subset A_n$ pour chaque n. Il en résulte que $x \subset B$. Mais

$$\frac{d^p x}{dt^p} = f(t, 0, \alpha_1) + \sum_{i=1}^{\infty} f(t, \alpha_i, \alpha_{i+1})$$

pour toutes les valeurs de t sauf

$$t = \alpha = \lim_{i \to \infty} \alpha_i \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Mais un simple calcul montre qu'au point $t = \alpha$ la dérivée d'ordre p droite n'est pas égale à la dérivée d'ordre p gauche et, par conséquent, au point $t = \alpha$ la fonction $x(t)$ n'a pas de dérivée d'ordre p. Mais c'est contradictoire avec le fait obtenu que $x \subset B$. Donc B n'est pas un G_δ par rapport à E.

Remarque I. On peut facilement démontrer que B est $G_{\delta\sigma}$, c'est-à-dire B est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est un G_δ.

Remarque II. On voit sans peine que le théorème II serait vrai si nous supposions que E (respectivement B) est l'ensemble de toutes les fonctions ayant la dérivée d'ordre $p-1$ (respectivement d'ordre p) finie. En conséquence du théorème I et de la remarque II, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME III. *Si la fonctionnelle U, définie seulement pour toutes les fonctions ayant la dérivée d'ordre p finie, est continue d'ordre $p-1$, il existe une fonction $x(t)$ qui remplit les conditions suivantes*: 1° $d^{p-1}x/dt^{p-1}$ *est continue, la dérivée d'ordre p de x n'existe pas*; 2° *on peut définir x de telle manière que U soit continue d'ordre $p-1$ pour x.*

4. On peut généraliser les résultats obtenus pour certains champs fonctionnels. Je remarquerai que si E est l'ensemble de toutes les fonctions continues (la distance étant égale au maximum du module de la différence de deux fonctions) et B est l'ensemble de toutes les fonctions ayant la même dérivée au plus égale à 1 en valeur absolue, B n'est pas un G_δ par rapport à E. Si maintenant E est l'ensemble de toutes les fonctions sommables