# Sur les fonctionnelles linéaires

publié dans Studia Math. 1 (1929), p. 211–216.

**Introduction.** Soit $E$ un ensemble vectoriel([1]) normé. Dans ce qui va suivre nous désignerons par $x, y, z, \ldots$ des éléments de $E$ et par $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des nombres réels.

Un ensemble $G(\subset E)$ sera dit *linéaire* lorsqu'il contient toute combinaison linéaire $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ de deux quelconques de ses éléments $x_1, x_2$. On définit une fonctionnelle $f(x)$ dans $G$, en faisant correspondre à chaque élément $x$ de $G$ un nombre réel $\xi = f(x)$. Nous dirons que la fonctionnelle $f(x)$ est *linéaire* si

1° elle est additive, c'est-à-dire $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$ pour tout $x_1 \subset G, x_2 \subset G$,

2° elle est continue, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ $(x_n \subset G, x \subset G)$ entraîne toujours $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

On prouve aisément qu'il existe alors un nombre $M > 0$, de sorte que

$$|f(x)| \leqslant M \|x\|$$

pour tout $x \subset G$. Le plus petit possible des nombres $M$ est dit la *norme* de $f(x)$ dans $G$. Nous la désignons par $\|f\|_G$ ou bien simplement par $\|f\|$, si $G = E$. On a donc

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_G \cdot \|x\| \qquad (x \subset G).$$

§ **1.** Théorème 1. *Soit $G$ un ensemble linéaire et $y_0$ un élément d'$E$ non contenu dans $G$. Nous désignons par $G'$ l'ensemble formé par tous les*

([1]) L'ensemble $E$ est dit *vectoriel* lorsque pour ses éléments sont définies les opérations d'addition et de multiplication par un nombre réel, conformément aux règles d'algèbre. Un ensemble vectoriel est dit *normé* lorsqu'à tout son élément $x$ est attribué un nombre réel, désigné par $\|x\|$ — la *norme* de cet élément, de manière que: 1° $\|x\| > 0$ pour tout $x \neq \theta$; $\|\theta\| = 0$, le symbole $\theta$ désignant l'élément *nul* (module d'addition), 2° $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ pour tout $\alpha$ réel, 3° $\|x_1+x_2\| \leqslant \|x_1\|+\|x_2\|$. La suite $\{x_n\}$ des éléments d'un ensemble vectoriel normé est, par définition, *convergente* vers l'élément $x$ lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Pour une exposition detaillée voir S. Banach [7] [ce volume, p. 305–348].

$x+\alpha y_0$ ($x \subset G, \alpha$ *réel*), *évidemment linéaire et contenant* $G$. *Soit* $f(x)$ *une fonctionnelle linéaire définie dans* $G$. *Il existe alors une fonctionnelle linéaire* $\varphi(x)$ *définie dans* $G'$, *telle que*

1° $\varphi(x) = f(x) \quad (x \subset G)$,

2° $\|\varphi\|_G = \|f\|_G$.

Démonstration. On peut évidemment supposer que $\|f\|_G = 1$. On a, pour $x_1 \subset G, x_2 \subset G$,

$$f(x_2-x_1) \leqslant \|x_2-x_1\| = \|x_2+y_0-y_0-x_1\| \leqslant \|x_2+y_0\|+\|x_1+y_0\|,$$

donc

$$-\|x_1+y_0\|-f(x_1) \leqslant \|x_2+y_0\|-f(x_2). \tag{1}$$

Soit $m$ la borne supérieure des nombres $-\|x_1+y_0\|-f(x_1)$ et $M$ la borne inférieure des nombres $\|x_2+y_0\|-f(x_2)$. Les nombres $m$, $M$ sont finis en vertu de (1) et on a $m \leqslant M$. Soit $\lambda$ un nombre, satisfaisant à l'inégalité

$$m \leqslant \lambda \leqslant M, \tag{2}$$

d'ailleurs quelconque.

Nous posons par définition

$$\varphi(x+\alpha y_0) = f(x)+\alpha\lambda \quad (x \subset G,\ \alpha \text{ réel}).$$

On voit aisément que la fonctionnelle $\varphi(z)$, ainsi définie(2) dans $G'$, est additive et que $\varphi(z) = f(z)$ $(z \subset G)$. On a pour $\alpha \neq 0$ (en vertu de (1), (2)):

$$-\left\|\frac{x}{\alpha}+y_0\right\|-f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leqslant \lambda \leqslant \left\|\frac{x}{\alpha}+y_0\right\|-f\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

d'où

$$\left|f\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\lambda\right| \leqslant \left\|\frac{x}{\alpha}+y_0\right\|,$$

ou bien

$$|f(x+\alpha\lambda)| \leqslant \|x+\alpha y_0\|,$$

c'est-à-dire

$$|\varphi(z)| \leqslant \|z\| \quad (z \subset G').$$

On a donc:

$$\|\varphi\|_{G'} = 1 = \|f\|_G.$$

(2) L'élément $y_0$ n'appartenant pas à $G$, un élément $z$ de $G'$ n'admet qu'une seule représentation $z = x+\alpha y_0$. La définition de $\varphi(z)$ est donc univoque.

THÉORÈME 2. *$G$ étant un ensemble linéaire et $f(x)$ une fonctionnelle linéaire définie dans $G$, il existe une fonctionnelle linéaire $\varphi(x)$, définie dans $E$, telle que*

$$\varphi(x) = f(x) \quad (x \subset G),$$
$$\|\varphi\| = \|f\|_G.$$

Démonstration. On prouve ce théorème par induction transfinie en appliquant succesivement le théorème 1 aux éléments de l'ensemble $E-G$ (supposé bien ordonné).

Remarque. A l'aide du théorème ci-dessus on peut définir dans chaque ensemble vectoriel normé une fonctionnelle linéaire non identiquement nulle.

Soit en effet $x_0 \neq \Theta$ un élément d'$E$. Les éléments $\alpha x_0$ forment un ensemble linéaire $G$. Posons $f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$. C'est une fonctionnelle linéaire, définie dans $G$, dont la norme $\|f\|_G = 1$. En vertu du théorème 2, il existe donc une fonctionnelle $\varphi(x)$, définie dans $E$, telle que $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ et $\|\varphi\| = 1$.

§ 2. THÉORÈME 3. *Soient $\{x_n\}$ une suite des éléments de $E$, $\{c_n\}$ une suite numérique et $M$ un nombre positif. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonctionnelle linéaire $f(x)$, remplissant les relations*

1° $f(x_n) = c_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$,

2° $\|f\| \leqslant M$,

*est que l'on ait l'inégalité*

$$\Big|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i\Big| \leqslant M \Big\|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\Big\|$$

*pour tout système fini des nombres réels $\lambda_i$* ([3]).

Démonstration. *La condition est nécessaire.* En effet, si $f(x)$ existe, alors

$$f\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i.$$

D'autre part,

$$\Big|f\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\Big)\Big| \leqslant \|f\| \cdot \Big\|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\Big\|,$$

ce qui donne (1) en vertu de 1° et 2°.

([3]) Ce théorème a été démontré pour certains ensembles particuliers par M. F. Riesz (*Untersuchungen über Systeme integriebarer Funktionen*, Mathematische Annalen 69 (1910), p. 449–497; *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Gauthier–Villars, 1913) et dans quelques cas plus généraux par M. Helly (Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, IIa, 121 (1912), p. 265). Notre démonstration est très simple et ne suppose sur l'ensemble $E$ que ce qui est dit dans l'introduction. Notamment nous ne supposons pas que l'ensemble $E$ soit complet ou séparable.

*La condition est suffisante.* Désignons par $G$ l'ensemble linéaire formé par tous les éléments de la forme $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$. Définissons une fonctionnelle $\varphi(x)$ de la manière suivante[4]: si $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$, posons

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i .$$

On a, en vertu de (1),

$$|\varphi(x)| \leqslant M \|x\| ,$$

$\varphi(x)$ est donc une fonctionnelle linéaire définie dans $G$ et $\|\varphi\|_G \leqslant M$. Par conséquent, il existe, d'après de théorème 2, une fonctionnelle linéaire $f(x)$ satisfaisant aux conditions énoncées.

Remarque. On peut formuler ce théorème d'une manière plus générale que voici:

$\varphi(x)$ étant une fonctionnelle définie dans l'ensemble $W$ (linéaire ou non), la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonctionnelle linéaire, définie dans $E$, et remplissant les relations

1° $f(x) = \varphi(x) \quad (x \subset W)$,

2° $\|f\| \leqslant M$,

$M$ étant un nombre positif donné, est que l'on ait

$$\Big|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi(x_i)\Big| \leqslant M \Big\| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \Big\| ,$$

quel que soit le système des $r$ éléments $x_i$ de $W$, le système des $r$ nombres réels $\lambda_i$ et l'entier positif $r$.

THÉORÈME 4. *$G$ étant un ensemble linéaire et $y_0$ un élément, dont la distance à $G$ est $d > 0$, il existe une fonctionnelle linéaire $f(x)$, définie dans $E$, remplissant les équations*

1° $f(x) = 0 \quad (x \subset G)$,

2° $f(y_0) = 1$,

3° $\|f\| = 1/d$.

Démonstration. Désignons par $G'$ l'ensemble linéaire formé par les éléments $z = x + \alpha y_0 (x \subset G, \alpha$ réel). Posons dans $G'$:

$$\varphi(z) = \alpha . \tag{2}$$

On a pour $\alpha \neq 0$:

$$\|z\| = \|x + \alpha y_0\| = |\alpha| \left\| \frac{1}{\alpha} x + y_0 \right\| .$$

[4] Cette définition est univoque, comme il résulte aisément du § 1.

Comme l'élément $\frac{1}{\alpha}x$ appartient à $G$, on a par l'hypothèse

$$\|z\| \geqslant |\alpha| \cdot d,$$

donc, en vertu de (2),

$$|\varphi(z)| \leqslant \frac{1}{d}\|z\|$$

et

(3) $$\|\varphi\|_{G'} \leqslant \frac{1}{d}.$$

On a, par définition,

$$\varphi(x+y_0) = 1 \qquad (x \subset G)$$

donc, en vertu de (3),

(4) $$1 \leqslant \|\varphi\|_{G'} \cdot \|x+y\| \leqslant \frac{1}{d}\|x+y\|.$$

La distance de $y_0$ et $G$ étant $d$, il existe dans $G$ une suite $\{x_n\}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n+y_0\| = d.$$

L'inégalité (4), appliquée à cette suite, donne

$$1 \leqslant \|\varphi\|_{G'} \cdot d \leqslant 1$$

ou

$$\|\varphi\|_{G'} = \frac{1}{d}.$$

D'après le théorème 2, il existe donc une fonctionnelle satisfaisant aux conditions demandées.

Théorème 5. *Si $G$ est un ensemble linéaire fermé tel que toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ égale à 0 pour tout $x$ de $G$ est égale à 0 pour tout $x$, alors*

$$G \equiv E.$$

Théorème 6. *Soit $W$ un ensemble arbitraire $\subset E$ et $y_0$ un élément qui n'y appartient pas. La condition nécéssaire et suffisante pour l'existence d'une suite $\{w_n\} \subset E$, remplissant les relations*

1° $w_n = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_i^{(n)} x_i \qquad (x_i \subset W)$,

2° $\lim_{n\to\infty} w_n = y_0$,

*est que l'on ait $f(y_0) = 0$, pour toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans $E$ et identiquement nulle dans $W$.*

Démonstration. On l'obtient aisément à l'aide du théorème 4 appliqué à l'ensemble linéaire $G$ formé par tous les éléments de la forme $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i$ ($x_i \subset W$, $\alpha_i$ nombres réels).

*(Reçu par la Rédaction le 28. IV. 1929)*