Sur la convergence forte dans le champ L^p

publié en commun avec S. Saks dans Studia Math. 2 (1930), p. 51–57.

1. Soit L^p $(p > 1)$ le champ des fonctions sommables de p-ième puissance dans l'intervalle $(0, 1)$. On dit qu'une suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ de ce champ tend *fortement* (ou bien, *en moyenne d'ordre* p) vers une fonction $x(t)$ lorsque

$$\lim_n \int_0^1 |x(t)-x_n(t)|^p \, dt = 0.$$

Outre cette convergence, on envisage encore, dans des champs L^p, une autre dite la *faible*: on dit notamment qu'une suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions du champ $L^p (p > 1)$ tend *faiblement* vers une fonction $x(t)$ du même champ lorsque, pour toute fonction $y(t)$ sommable de puissance q $(1/p+1/q = 1)$, on a

$$\lim_n \int_0^1 y(t)\, x_n(t)\, dt = \int_0^1 y(t)\, x(t)\, dt\text{(1)}.$$

M. F. Riesz a prouvé que, lorsque, pour une suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ du champ L^p, il existe un nombre fini M tel que

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt \leqslant M^p,$$

cette suite contient nécessairement une suite partielle $\{x_{n_k}(t)\}$ convergeant au sens *faible*(2); en d'autres terms, tout ensemble de fonctions de la classe L^p, borné *en norme*(3), est *compact faiblement*. Une proposition analogue relative à la convergence *forte* serait évidemment en défaut. Nous pourrons cependant prouver la proposition suivante:

THÉORÈME I. *Toute suite de fonctions* $\{x_n(t)\}$ *du champ* L^p $(p > 1)$ *bornée en norme contient une suite partielle* $\{x_{n_k}(t)\}$ *qui est sommable* $(C1)$ *au sens*

---

(1) F. Riesz, *Über Systeme integrierbarer Funktionen*, Mathematische Annalen 69 (1910), p. 449–497.

(2) F. Riesz, l.c.

(3) On entend par *norme* d'une fonction $x(t)$ d'un champ L^p le nombre $\sqrt[p]{\int_0^1 |x(t)|^p \, dt}$; une famille de fonctions dans un champ L^p est dite *bornée en norme* lorsque les normes des fonctions de cette famille sont bornées en leur ensemble.

fort, c.-à-d. est telle que ses premières moyennes

$$\sigma_k(t) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{n_i}(t)$$

convergent fortement.

2. Nous établirons tout d'abord une inégalité arithmétique:

Pour tout couple de nombres réels a, b et pour $p > 1$ on a

$$|a+b|^p \leqslant |a|^p + p|a|^{p-1}\cdot \operatorname{sgn} a \cdot b + \sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i}|a|^{p-i}|b|^i + A|b|^p, \tag{1}$$

où A désigne une constante ne dépendant pas de a, b.

Démonstration. Posons

$$\varphi(z) = \frac{|1+z|^p - \left[1+pz+\sum_{i=1}^{E(p)}\binom{p}{i} z^i\right]}{|z|^p}.$$

Il est évident que $\varphi(z)$ reste borné lorsque z tend vers l'infini; d'autre part, en développant $|1+z|^p$ d'après la formule du binôme, on vérifie de suite que $\lim\limits_{z\to 0}\varphi(z) = 0$. Il s'ensuit qu'il existe une constante A telle que

$$|\varphi(z)| \leqslant A$$

pout toute valeur de z, donc

$$|1+z|^p \leqslant 1+pz+\sum_{i=2}^{E(p)}\binom{p}{i} z^i + A|z|^p \leqslant 1+pz+\sum_{i=2}^{E(p)}\binom{p}{i}|z|^i + A|z|^p.$$

En y posant $z = b/a$, on en obtient l'inégalité (1).

3. Il s'ensuit, de l'inégalité que nous venons d'établir, la proposition suivante:

Soit $p > 1$ et $\{x_n(t)\}$ une suite de fonctions telles que

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{2}$$

posons

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t).$$

Ceci étant, on a pour chaque $n > 1$

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p\,dt \leqslant A + Bn^{p-2} + p\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-1}\cdot \operatorname{sgn} s_{n-1}(t)\cdot x_n(t)\,dt + \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^p\,dt, \tag{3}$$

où A et B sont des constantes ne dépendant pas de la suite envisagée.

Démonstration. En posant dans l'inégalité (1) du § précédent $a = s_{n-1}(t), b = x_n(t)$, et en intégrant les deux parties de la relation ainsi obtenue, on en tire, en vertu de (2)

$$(4) \quad \int_0^1 |s_n(t)|^p dt \leqslant \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^p dt + p\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn} s_{n-1}(t) \cdot x_n(t)\, dt + \\ + \sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i} \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-i} \cdot |x_n(t)|^i dt + A.$$

On a, par l'inégalité de MM. F. Riesz–Hölder pour chaque $i \leqslant p$ (vu (2))

$$\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-i} \cdot |x_n(t)|^i dt \leqslant \left[\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^p dt\right]^{\frac{p-i}{p}};$$

d'autre part, par l'inégalité de Minkowski,

$$\left[\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^p dt\right]^{1/p} = \left[\int_0^1 \Big|\sum_{k=1}^{n-1} x_k(t)\Big|^p dt\right]^{1/p} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_0^1 |x_k(t)|^p dt\right]^{1/p} \leqslant n-1 < n.$$

Donc, pour chaque $i \leqslant p$,

$$\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-i} \cdot |x_n(t)|^i dt \leqslant n^{p-i}$$

et

$$\sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i} \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-i} |x_n(t)|^i dt \leqslant \sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i} n^{p-i} \leqslant n^{p-2} \sum_{i=2}^{E(p)} \binom{p}{i} = Bn^{p-2},$$

où B désigne une constante([4]).

En portant ce résultat dans (4), on obtient l'inégalité cherchée.

4. Le théorème signalé dans le § 1 est une conséquence facile de la relation que nous venons d'établir.

On peut supposer tout d'abord que l'on ait pour toute fonction $x_n(t)$ de la suite considérée

$$(5) \qquad \int_0^1 |x_n(t)|^p dt \leqslant 1;$$

on peut supposer aussi (en vertu du théorème de M. F. Riesz cité au début de cet article) que la suite $\{x_n(t)\}$ converge *faiblement* vers zéro. Ceci étant, nous déterminerons une suite partielle $\{x_{n_k}(t)\}$ $(n_1 = 1)$ en procédant,

([4]) Dans le cas $p < 2$, l'expression que nous venons d'évaluer dans le texte n'existe pas et tout le raisonnement se simplifie, l'inégalité fonctionnelle (3) découlant immédiatement de l'inégalité arithmétique du paragraphe précédant; une simplification considérable a lieu aussi dans le cas $p = 2$.

par recurrence, de la manière suivante: supposons que k premiers termes de la suite $\{x_{n_k}(t)\}$ sont définis et soit

$$s_k(t) = \sum_{r=1}^{k} x_{n_r}(t);$$

$s_k(t)$ étant sommable de puissance p, la fonction $|s_k(t)|^{p-1}\operatorname{sgn} s_k(t)$ l'est de puissance $\frac{p}{p-1}$, et, par suite, les fonctions $x_n(t)$ convergeant *faiblement* vers zéro, il existe des valeurs $n > n_k$ telles que

$$\left|\int_0^1 |s_k(t)|^{p-1}\cdot\operatorname{sgn} s_k(t)\cdot x_n(t)\,dt\right| \leqslant 1; \tag{6}$$

nous définirons comme n_{k+1} une valeur quelconque de n (p. ex. la plus petite) satisfaisant à cette condition.

La suite partielle $\{x_{n_k}(t)\}$ ainsi établie, on posera, pour simplifier l'écriture,

$$y_k(t) = x_{n_k}(t),$$

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} y_n(t);$$

on aura alors, en vertu de (6), pour chaque $n > 1$,

$$\left|\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-1}\cdot\operatorname{sgn} s_{n-1}(t)\cdot y_n(t)\,dt\right| \leqslant 1,$$

donc, en tenant compte de l'inégalité (3) du § précédent,

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p\,dt \leqslant A+Bn^{p-2}+p+\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^p\,dt,$$

d'où

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p\,dt \leqslant (A+p)n+Bn^{p-1}+1$$

et

$$\lim_n \int_0^1 \left[\frac{s_n(t)}{n}\right]^p dt = 0,$$

ce qui montre que les premières moyennes de la suite partielle $\{x_{n_k}(t) = y_k(t)\}$ tendent *fortement* vers zéro.

5. Le théorème démontré dans le § précédent pour les espaces $L^p (p > 1)$, ne s'étend pas au cas $p = 1$, c.-à-d. au champ de fonctions sommables. On le voit aisément sur l'exemple suivant:

Désignons, pour tout entier positif n, par $x_n(t)$ la fonction égale à 1 pour tout t tel que

$$\frac{i}{2^n}+\frac{1}{2^{2n+1}} \leqslant t \leqslant \frac{i+1}{2^n} \quad (i = 0, 1, \ldots, 2^n-1),$$

et à $1-2^{n+1}$ partout ailleurs dans l'intervalle $(0, 1)$. On voit de suite qu'on a alors

$$\Big|\int_0^T x_n(t)\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

pour chaque T de l'intervalle $(0, 1)$, et que

$$\int_0^1 |x_n(t)|\,dt \leqslant 2,$$

donc, que les fonctions $x_n(t)$ tendent *faiblement* vers zéro (*).

D'autre part, on voit facilement que, pour tout n, l'ensemble des points t où

$$x_n(t) \neq 1,$$

est de mesure $\leqslant 1/2^{n+1}$; il s'ensuit donc que l'on a, pour chaque suite partielle $\{x_{n_k}(t)\}$ et chaque nombre k,

$$\int_0^1 \left|\frac{x_{n_1}(t)+x_{n_2}(t)+\ldots+x_{n_k}(t)}{k}\right| dt \leqslant \frac{1}{2} \ (^5).$$

Les premières moyennes de la suite $\{x_{n_k}(t)\}$ convergeant *faiblement* (en même temps que la suite $\{x_n(t)\}$) vers zéro, il s'ensuit de l'inégalité précédente qu'elles forment une suite qui est divergente au sens *fort*.

Notre théorème est ainsi en défaut dans le cas envisagé, c.q.f.d.

6. Soit $l^p (p > 1)$ le champ des suites $\{\xi_i\}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty.$$

On dit qu'une suite $\{\xi_i^{(n)}\}$ de suites de ce champ tend *fortement* (ou bien en moyenne d'ordre p) vers une suite $\{\xi_i\}$ lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}-\xi_i|^p = 0.$$

(*) Les auteurs ont commis ici une erreur. Les fonctions $x_n(t)$ ne tendent pas faiblement vers zéro, car ils ne sont pas uniformément intégrables. C'est pourquoi que l'exemple est faux (Note de la Rédaction).

(5) Plus généralement, on a

$$\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(t)\Big|\,dt \geqslant \frac{1}{2},$$

pour chaque système de n nombres non-négatifs λ_i tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

On dit qu'une suite $\{\xi_i^{(n)}\}$ de suites du champ l^p tend faiblement vers une suite $\{\xi_i\}$ du même champ, lorsque

(1) les suites $\{\xi_i^{(n)}\}$ sont bornées en norme, c.-à-d. lorsqu'il existe un nombre $M > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p < M^p \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$

Théorème II. *Toute suite $\{\xi_i^{(n)}\}$ des suites du champ l^p $(p > 1)$ bornée en norme contient une suite partielle $\{\xi_i^{(n_k)}\}$ sommable $(C\,1)$ au sens fort, c.-à-d. telle que ses premières moyennes*

$$\sigma_i^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \xi_i^{(n_j)}$$

convergent fortement.

Démonstration. Posons

$$x_n(t) = 2^{j/p}\xi^{(n)} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2^{j-1}} \geqslant t > \frac{1}{2^j} \ (n = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots)$$

et nous aurons

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(n)}|^p.$$

D'après le théorème I, il existe une suite partielle $\{x_{n_k}(t)\}$ telle que ses premières moyennes convergent fortement, donc la suite $\{\sigma_i^{(k)}\}$ converge de même fortement.

(Reçu par la Rédaction le 20. 2. 1930)